25. *Über die allgemeinen algebraischen Systeme, V**.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1943.)

§ 16 *Auflösbare Systeme*. Es seien A und B Systeme der Verknüpfungsgleichungen. Wenn man durch B Kongruenzrelationen in einem primitiven A-algebraischen System $\mathfrak{A}$ definiert, so erhält man ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, welches zugleich B-algebraisch ist. Dieses Restklassensystem und auch die Restklassenzerlegung bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_B$. Jede Restklassenzerlegung von $\mathfrak{A}$ enthält dann $\mathfrak{A}_B$, wenn sie B-algebraisch ist. D. h. aus jeder B-algebraischen Restklassenzerlegung erhält man $\mathfrak{A}_B$ durch Verfeinerung[1].

Ist $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{B}_B$ zu $\mathfrak{A}_B$ homomorph. Ist nämlich $\mathfrak{A}^*$ das zu $\mathfrak{B}$ isomorphe Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, so ist die in $\mathfrak{A}^*_B$ definierte Kongruenz gleichbedeutend mit der Kongruenz in $\mathfrak{A}_B$ nach der Zerlegung $\mathfrak{A}^*$.

Ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produckt $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_k)$, so ist $\mathfrak{A}_B$ zu $\mathfrak{A}^*=(\mathfrak{A}_{1B}\ \mathfrak{A}_{2B} \dots \mathfrak{A}_{kB})$ isomorph. Da in $\mathfrak{A}^*$ die Gleichungen aus B gelten, so ist $\mathfrak{A}^*$ zu $\mathfrak{A}_B$ homomorph. Da aber das durch $\mathfrak{A}_B$ induziete Restklassensystem von $\mathfrak{A}_i$ zu $\mathfrak{A}_{iB}$ homomorph ist, so ist $\mathfrak{A}^*$ zu $\mathfrak{A}_B$ isomorph.

Wir werden nunmehr wieder voraussetzen:

I. $\mathfrak{A}$ besitzt ein Nullelement.

II. Die Vereinigung zweier normalen Untersysteme eines Untersystems $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist normal in $\mathfrak{A}'$,

III. Der Meromorphismus zweier zu $\mathfrak{A}'$ homomorphen Systeme ist stets ein Klassenmeromorphismus.

Dann ist $\mathfrak{A}_B$ ein Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ nach einem das Nullelement 0 enthaltenden normalen Untersystem $\mathfrak{A}'$. Analog ist $\mathfrak{A}'_B$ ein Restklassensystem $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}''$. Wenn man nach endlichmaligen Anwendungen dieser Schritte das aus 0 bestehende System $\mathfrak{A}^{(n)}=0$ erreichen kann[2], so heisst $\mathfrak{A}$ *auflösbar* nach B oder B-auflösbar. Ist dabei $\mathfrak{A}^{(n-1)} \neq 0$, so heisst n die Länge des auflösbaren Systems $\mathfrak{A}$. Die eben konstruierte Reihe heisst die *absteigende K-Reihe.*

Ist $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so haben wir schon gezeigt, dass $\mathfrak{B}_B$ zu $\mathfrak{A}_B$ homomorph ist. *Sind* $\mathfrak{B}_B=\mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}_B=\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$, *so ist* $\mathfrak{B}'$ *auch zu* $\mathfrak{A}'$ *homomorph.* Wie wir schon gesehen haben, ist nämlich $\mathfrak{B}_B$ zur Vereinigung der Restklassenzerlegungen $\mathfrak{A}_B$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ isomorph, wo $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{B}$ isomorph ist. Nach II und III ist daher $\mathfrak{B}_B$ einem Restklassen-

---

* I in Proc. **17** (1941), 323–327; II ebenda **18** (1942), 179–184; III ebenda **18** (1942), 227–232; IV ebenda **18** (1942), 276–279.

1) Vgl. hierzu § 3.

2) $\mathfrak{A}^{(n-1)}$ braucht nicht B-algebraisch zu sein. Der Schar $[\mathfrak{A}^{(n-1)}/\mathfrak{A}^{(n)}]$ muss aber ein B-algebraisches Restklassensystem enthalten. Nach der Voraussetzung III besitzt jeder Schar ein grösstes Restklassensystem, das jedem anderen System aus dem Schar homomorph ist. Also muss das grösste Restklassensystem $\mathfrak{A}^{(n-1)}/\mathfrak{A}^{(n)}$ B-algebraisch sein. Dies gilt auch für alle $\mathfrak{A}^{(i-1)}/\mathfrak{A}^{(i)}$.

system $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{C}$ isomorph; also ist $\mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ und folglich nach dem zweiten Isomorphiesatz einem $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ isomorph[1]. Durch wiederholte Anwendungen dieser Schritte beweist man: ***Ist $\mathfrak{B}$ einem B-auflösbaren System $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{B}$ auch B-auflösbar und die Länge von $\mathfrak{B}$ ist nicht grösser als die von $\mathfrak{A}$.***

Ist $\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_B=\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}_B=\mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$, so ist $\mathfrak{B}' \leq \mathfrak{A}'$. Denn $\mathfrak{A}'$ besteht aus den mit 0 kongruenten Elemente aus $\mathfrak{A}$ nach den Gleichungen aus B, die für alle Elemente aus $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt sind. Also ist sicher $\mathfrak{B}' \leq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}'$. Hieraus folgt unmittelbar: ***Jedes Untersystem $\mathfrak{B}$ eines B-auflösbaren Systems $\mathfrak{A}$ ist auch B-auflösbar und die Länge von $\mathfrak{B}$ ist nicht grösser als die von $\mathfrak{A}$.***

Man beweist auch leicht: *$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann B-auflösbar, wenn es eine K-Reihe besitzt.* Dabei verstehen wir unter einer K-Reihe eine Normalkette $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n=0$ derart, dass ein System der B-auflösbaren Restklassensysteme $\mathfrak{A}_{i-1}/\mathfrak{A}_i$, $i=1, \dots, n$, existiert, oder was dasselbe ist, dass die grösste Restklassensysteme $\mathfrak{A}_{i-1}/\mathfrak{A}_i$ alles B-algebraisch sind. Nach der Definition der Auflösbarkeit ist diese Bedingung notwendig. Gibt es umgekehrt solche K-Reihe, so ist $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'' \leq \mathfrak{A}_1' \leq \mathfrak{A}_2$, u. s. w. Daher ist $\mathfrak{A}^{(n)} \leq \mathfrak{A}_n=0$, u. s. b. w. Zugleich bewiesen ist: *Die Länge jeder K-Reihe ist nicht kleiner als die Länge von $\mathfrak{A}$.* Besitzt $\mathfrak{A}$ eine Kompositionsreihe $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_n=0$, so ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann auflösbar, wenn die grössten Restklassensysteme $\mathfrak{A}_{i-1}/\mathfrak{A}_i$ alles B-algebraisch sind. Dies folgt nach oben unmittelbar aus dem Jordan-Hölderschen Satz.

Eine K-Reihe $\mathfrak{A}=\mathfrak{a}_m \supset \dots \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_0=0$ heisst eine *aufsteigende*, wenn es keine K-Reihe $\mathfrak{A}=\mathfrak{b}_n \supset \dots \supset \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_0=0$ mit $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{a}_{i+1} \subset \mathfrak{b}_{i+1}$, $i=1, 2, \dots$, gibt. *Gilt die Maximalbedingung für die Untersysteme von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann auflösbar, wenn es eine aufsteigende K-Reihe besitzt*[2]. Dies ist nach der Definition der aufsteigenden K-Reihe klar.

Es gilt ferner: Das direkte Produkt der B-auflösbaren Systeme ist wieder B-auflösbar. Die Länge des direkten Produktes ist gleich der grössten Länge unter den der Glieder.

§ 17 *Stark auflösbare Systeme.* Es sei nun $\mathfrak{M}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$. Wenn man B als Relationen hinzufügt, die nur für die Elemente aus $\mathfrak{M}$ gelten, so erhält man ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ und folglich ein von $\mathfrak{M}$. Diese beiden Restklassensysteme mögen wir bzw. mit $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{M}(B)$ bezeichnen. Ersichtlich ist $\mathfrak{M}_B$ in $\mathfrak{M}(B)$ enthalten. $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{M})$ ist in der Tat die kleinste Restklassenzerlegung derart, das $\mathfrak{M}(B)$ die Zerlegung $\mathfrak{M}_B$ enthält[3]. Für $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{A}_B=\mathfrak{A}(B, \mathfrak{A})=\mathfrak{A}(B)$. Nun kann man analog wie bei § 16 vorgehen und beweisen: Ist $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph und ist $\mathfrak{N}$ das Bild von $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{B}(B, \mathfrak{N})$ zu $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{N}(B)$ zu $\mathfrak{M}(B)$ homomorph. Ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_k)$ und ist $\mathfrak{M}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}_i$, so ist $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{M})$ zum direkten

---

1) Vgl. § 11.

2) Die aufsteigende K-Reihe wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

3) Ist $\mathfrak{A}$ eine Gruppe und ist B die Kommutativität $ab=ba$, so stimmen diese beiden Begriffe bekanntlich überein.

Produkt $\big(\mathfrak{A}_1(B, \mathfrak{M}_1) \dots \mathfrak{A}_k(B, \mathfrak{M}_k)\big)$ isomorph, wobei $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_k)$ ist.

Nach der Voraussetzung I kann man $\mathfrak{A}(B) = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ und im allgemeinen $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{A}^{(i-1)}) = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^{(i)}$ setzen. Dadurch erhält man, wie man sich leicht überzeugt, eine Reihe der normalen Untersysteme $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)} \geqq \mathfrak{A}' \geqq \mathfrak{A}'' \geqq \cdots$. $\mathfrak{A}$ heisst *stark B-auflösbar,* wenn $\mathfrak{A}^{(n)} = 0$ für gewisse n ist. Dann heisst die Reihe die *absteigende K'-Reihe* nach B. Ist $\mathfrak{A}^{(n-1)} \neq 0$, so heisst n die Länge des stark B-auflösbaren Systems $\mathfrak{A}$. Ersichtlich ist jedes stark B-auflösbare System stets B-auflösbar. Für stark B-auflösbare Systeme kann man analog wie für B-auflösbare Systeme vorgehen. *Es sei nämlich* $\mathfrak{B}$ *zu* $\mathfrak{A}$ *homomorph und* $\mathfrak{N}$ *das Bild von* $\mathfrak{M}$. *Sind* $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{M}) = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ *und* $\mathfrak{B}(B, \mathfrak{N}) = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$, *so ist* $\mathfrak{B}'$ *zu* $\mathfrak{A}'$ *homomorph.* Daraus folgt: *Ist* $\mathfrak{B}$ *einem stark B-auflösbaren System* $\mathfrak{A}$ *homomorph, so ist* $\mathfrak{B}$ *auch stark B-auflösbar und die Länge von* $\mathfrak{B}$ *ist nicht grösser als die von* $\mathfrak{A}$. *Ist* $\mathfrak{B}$ *ein Untersystem von* $\mathfrak{A}$ *und ist* $\mathfrak{N}$ *ein in* $\mathfrak{M}$ *enthaltenes Untersystem von* $\mathfrak{B}$, *so ist* $\mathfrak{B}'$ *in* $\mathfrak{A}'$ *enthalten, wobei* $\mathfrak{A}(B, \mathfrak{M}) = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}(B, \mathfrak{N}) = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$ *ist.* Daraus folgt: *Jedes Untersystem* $\mathfrak{B}$ *eines stark B-auflösbaren Systems* $\mathfrak{A}$ *ist auch stark B-auflösbar und die Länge von* $\mathfrak{B}$ *ist nicht grösser als die von* $\mathfrak{A}$. Es gilt auch: $\mathfrak{A}$ *ist dann und nur dann stark B-auflösbar, wenn es eine K'-Reihe besitzt.* Dabei verstehen wir unter einer K'-Reihe eine Normalkette $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n = 0$ mit den normalen Untersysteme $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{A}$ derart, dass ein System der B-algebraischen Restklassensysteme $\mathfrak{A}_{i-1}/\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, existiert. *Die Länge jeder K'-Reihe ist nicht kleiner als die Länge von* $\mathfrak{A}$.

Eine K'-Reihe $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_m \supset \dots \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_0 = 0$ heisst eine *aufsteigende,* wenn es keine K'-Reihe $\mathfrak{A} = \mathfrak{b}_n \supset \cdots \supset \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_0 = 0$ mit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{a}_{i+1} \subset \mathfrak{b}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, gibt. *Gilt die Maximalbedingung für die normalen Untersysteme von* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{A}$ *dann und nur dann auflösbar, wenn es eine aufsteigende K'-Reihe besitzt.* Man kann in der Tat eine aufsteigende K'-Reihe folgendermassen konstruieren. In dem grössten Restklassensystem $\mathfrak{A}/0$ nehmen wir ein maximales normales Untersystem $\mathfrak{a}_1/0$ derart an, dass die Gleichungen aus B für die Elemente aus $\mathfrak{a}_1/0$ bestehen und, dass $\mathfrak{a}_1$ den zuletzten Glied $\mathfrak{A}^{(n-1)}$ der absteigenden K'-Reihe enthält. Dann ist das grösste Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}_1$ zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^{(n-1)}$ homomorph, also ist die Länge von $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}_1$ kleiner als n. Man kann für $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}_1$ analog vorgehen, u. s. w.[1] Damit ist zugleich bewiesen: *Es gibt eine aufsteigende K'-Reihe, deren Länge gleich der von* $\mathfrak{A}$ *ist.*

Es gilt ferner ersichtlich: Das direkte Produkt der stark B-auflösbaren Systeme ist auch stark B-auflösbar. Die Länge des direkten Produktes ist gleich der grössten Länge unter den der Glieder.

§ 18 *Nilpotente Systeme.* Es sei wieder $\mathfrak{M}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$. Sind die Gleichungen aus B die von den Elementen $a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t$, so betrachten wir B als Relationen von $\mathfrak{A}$ mit a aus $\mathfrak{A}$ und x aus $\mathfrak{M}$.

---

1) Ist $\mathfrak{a}_1$ dabei nur maximal angenommen, so kann man eine aufsteigende K'-Reihe konstruieren, die $\mathfrak{a}_1$ enthält. Die aufsteigende K'-Reihe wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. $\mathfrak{A}$ sei z.B. eine Gruppe, B die Kommutativität. $\mathfrak{a}_1$ sei ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_2/\mathfrak{a}_1$ ein von $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}_1$, u.s.w. Solche Reihe ist eine aufsteigende K-Reihe, die ersichtlich nicht eindeutig bestimmt.

Dann erhält man ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ und folglich ein von $\mathfrak{M}$. Diese beiden Restklassensysteme bezeichnen wir bzw. mit $\mathfrak{A}[B, \mathfrak{M}]$ und $\mathfrak{M}[B]$. Ersichtlich ist $\mathfrak{M}(B)$ in $\mathfrak{M}[B]$ enthalten. Für $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{A}_B=\mathfrak{A}(B)=\mathfrak{A}[B]$. Nun kann man wieder analog wie bei den §§ 16, 17 vorgehen und beweisen: Ist $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph und ist $\mathfrak{N}$ das Bild von $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{B}[B, \mathfrak{M}]$ zu $\mathfrak{A}[B, \mathfrak{M}]$ und $\mathfrak{N}[B]$ zu $\mathfrak{M}[B]$ homomorph. Ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_k)$ und ist $\mathfrak{M}_i$ normales Untersystem von $\mathfrak{A}_i$, so ist $\mathfrak{A}[B, \mathfrak{M}]$ zum direkte Produkt von den $\mathfrak{A}_i[B, \mathfrak{M}_i]$ isomorph, wobei $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \cdots \mathfrak{M}_k)$ ist.

Ist $\mathfrak{A}[B]=\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}'$ und im allgemeinen $\mathfrak{A}[B, \mathfrak{Z}^{(i-1)}]=\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}^{(i)}$, so erhält man eine Reihe der normalen Untersysteme $\mathfrak{A}=\mathfrak{Z} \geq \mathfrak{Z}' \geq \mathfrak{Z}'' \geq \cdots$ $\mathfrak{A}$ heisst *B-nilpotent*, wenn $\mathfrak{Z}^{(r)}=0$ für gewisse r ist. Diese Reihe heisst dann die absteigende Z-Reihe. Ist $\mathfrak{Z}^{(r-1)} \neq 0$, so heisst r die Länge des B-nilpotenten Systems $\mathfrak{A}$. Ersichtlich ist jedes nilpotente System stets stark B-auflösbar. Die in §§ 16, 17 angegebenen Sätze kann man auf den Fall der B-nilpotenten Systeme übertragen, wie folgt. *Ist $\mathfrak{B}$ einem B-nilpotenten System $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{B}$ auch B-nilpotent. Die Länge von $\mathfrak{B}$ ist dabei nicht grösser als die von $\mathfrak{A}$. Jedes Untersystem eines B-nilpotenten Systems $\mathfrak{A}$ ist stets ein nilpotentes, dessen Länge nicht grösser als die von $\mathfrak{A}$ ist. $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann B-nilpotent, wenn es eine Z-Reihe besitzt.* Dabei verstehen wir unter einer *Z-Reihe* eine Normalkette $\mathfrak{A}=\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_s=0$ mit den normalen Untersysteme $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{A}$ derart, dass ein System der Restklassensysteme $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{A}^{(s)}=\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}_s$ mit $\mathfrak{A}^{(i-1)} > \mathfrak{A}^{(i)}$ existiert und, dass die Gleichungen aus B für a aus $\mathfrak{A}^{(i)}$ und x aus dem Untersystem $\mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{A}^{(i)}$ gelten. Die Beldingung $\mathfrak{A}^{(i-1)} > \mathfrak{A}^{(i)}$ ist aber überflüssig, wenn man als $\mathfrak{A}^{(i)}$ stets das grösste Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{Z}_i$ annimmt. *Die Länge jeder Z-Reihe ist nicht kleiner als die von $\mathfrak{A}$.*

Eine Z-Reihe $\mathfrak{A}=\mathfrak{z}_m > \cdots > \mathfrak{z}_1 > \mathfrak{z}_0=0$ heisst eine *aufsteigende*, wenn es keine Z-Reihe $\mathfrak{A}=\mathfrak{y}_n > \cdots > \mathfrak{y}_1 > \mathfrak{y}_0=0$ mit $\mathfrak{z}_i=\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{z}_{i+1} < \mathfrak{y}_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots$, gibt. *Gilt die Maximalbedingung für die normalen Untersysteme von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann B-nilpotent, wenn es eine aufsteigende Z-Reihe besitzt. Es gibt eine aufsteigende Z-Reihe, deren Länge gleich der von $\mathfrak{A}$ ist*[1].

Es gilt ferner: Das direkte Produkt der B-nilpotenten Systeme ist auch B-nilpotent. Die Länge des direkten Produktes ist gleich der grössten Länge unter den der Glieder.

Kürzlich hat K. Iwasawa eine Verallgemeinerung der Zentralreihe in der Gruppentheorie aufgestellt,[2] die man auch auf unseren allgemeinen Fall übertragen kann. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}$ seien zwei Untersysteme von $\mathfrak{A}$. Betrachtet man die Gleichungen aus B für a aus $\mathfrak{N}$ und x aus $\mathfrak{B}$, so erhält man ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ und folglich ein von $\mathfrak{B}$. Das erste sei $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}'$. Analog kann man durch $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{N}$ ein normales

1) Die aufsteigende Z-Reihe wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Sie wird aber eindeutig bestimmt, wie im oben angegebenen Beispiel in der Gruppentheorie, wenn aus den Gleichungen $F(a_1 \ldots a_s\ x_1 \ldots x_t)$, $F(a_1 \ldots a_s\ y_1 \ldots y_t)$ stets $F(a_1 \ldots a_s\ x_1 a y_1 \ldots x \beta y)$ für jede Verknüpfung $\alpha, \ldots, \beta$ und für alle Elemente a aus $\mathfrak{A}$ folgt.

2) Die von K. Iwasawa angegebene Formulierung ist etwas anders. Er hat nämlich die in den Lehrbüchern übliche Definition der Zentralreihen direkt verallgemeinert.

Untersystem $\mathfrak{B}''$ von $\mathfrak{A}$ bestimmen. Ist $\mathfrak{B}^{(r)}=0$ für gewisse r, so erhält man eine *verallgemeinerte absteigende Z-Reihe.* Im Fall $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{R}$ stimmt diese Reihe mit der absteigenden Z-Reihe überein. Für die Systeme mit der verallgemeinerten Z-Reihe kann man auch analog vorgehen. Dadurch werden die in diesem Paragraph angegebenen Sätze ohne Mühe verallgemeinert.