40. *Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathémathique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 12, 1943.)

§ 1. *Le groupe d'holonomie de l'espace de Riemann.*

Soit V_n un espace de Riemann à n dimensions dont la forme quadratique différentielle fondamentale est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \qquad (\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, \dots, n) \tag{1.1}$$

et $[e_\lambda]$ le repère naturel dans l'espace euclidien tangent en un point courant M, alors on aura $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$ en chaque point de l'espace.

Cela étant, la connexion euclidienne sans torsion de l'espace s'exprime par les équations

$$dM = dx^\lambda e_\lambda, \qquad de_\mu = \left\{{}^{\,\lambda}_{\mu\nu}\right\} dx^\nu e_\lambda \tag{1.2}$$

où $\left\{{}^{\,\lambda}_{\mu\nu}\right\}$ sont les symboles de Christoffel formés avec les $g_{\mu\nu}$.

Si l'on se donne, dans l'espace de Riemann, un chemin allant d'un point P à un autre point Q, on peut raccorder, grâce à cette connexion euclidienne, l'espace tangent en P de proche en proche le long du chemin considéré avec l'espace tangent en Q. C'est-à-dire que l'on peut développer, sur un même espace euclidien, le chemin et le repère naturel attaché à chaque point de ce chemin. En décrivant ainsi un contour fermé partant d'un point P et y revenant, le point P et le repère naturel en ce point subit un certain déplacement par rapport à leur position initiale.

Ces déplacements associés à tous les contours fermés d'origine donnée P forment un groupe que M. Cartan appelle groupe d'holonomie de l'espace. Ce groupe est essentiellement le même quel que soit le point d'origine P de l'espace. Si ce groupe d'holonomie de l'espace est un sous-groupe du groupe général de déplacements euclidiens, chaque transformation infinitésimale de la connexion euclidienne appartient aussi à ce sous-groupe.

§ 2. *Le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann.*

Supposons que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann laisse une direction invariante et désignons par v^λ le vecteur ayant cette direction et de longueur constante. Alors, d'après ce qui est dit dans § 1, on a

$$d(v^\lambda e_\lambda) = (dv^\lambda + \left\{{}^{\,\lambda}_{\mu\nu}\right\} v^\mu dx^\nu) e_\lambda = 0\,,$$

d'où

$$v^\lambda{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \left\{{}^{\,\lambda}_{\mu\nu}\right\} v^\mu = 0\,, \tag{2.1}$$

donc, v^λ est un champ de vecteur parallèle.

Inversement, si v^λ est un champ de vecteur parallèle, il est évident que le groupe d'holonomie de l'espace laisse la direction $v^\lambda e_\lambda$ invariante. Donc, nous avons le

Théorème 2.1. Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann laisse une direction invariante, il est nécessaire et suffisant que l'espace admette un champ de vecteur parallèle, soit, qu'il existe un vecteur satisfaisant à (2.1).

Cela étant, supposons ensuite que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann laisse un point invariant et désignons-le par $M+v^\lambda e_\lambda$. Alors, d'après ce qui est dit dans § 1, on trouve

$$d(M+v^\lambda e_\lambda)=(dx^\lambda+dv^\lambda+\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}v^\mu dx^\nu)e_\lambda=0\,,$$

d'où

$$\delta^\lambda_\nu+v^\lambda{}_{;\nu}\equiv\delta^\lambda_\nu+\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}v^\mu=0\,. \tag{2.2}$$

Nous dirons dans ce cas que v^λ est un champ de vecteur concourant.

Inversement, si v^λ est un champ de vecteur concourant, il est manifeste que le groupe d'holonomie de l'espace laisse le point $M+v^\lambda e_\lambda$ invariant. Donc, nous avons le

Théorème 2.2. Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann laisse un point invariant, il est nécessaire et suffisant que l'espace admette un champ de vecteur v^λ concourant, soit, qu'il existe un vecteur v^λ satisfaisant à (2.2).

§ 3. *Les propriétés des géodésiques et des cercles dans un espace de Riemann.*

Nous commençons par un théorème bien connu:

Théorème 3.1. La courbe dont la tangente se déplace toujours parallèlement à elle-méme le long de la courbe est une géodésique.

Cela étant, supposons que la tangente passe toujours par un point fixe quand on développe cette courbe sur l'espace tangent en un point de la courbe.

En désignant ce point par $M+a\dfrac{dx^\lambda}{ds}e$ on doit avoir

$$\frac{d}{ds}\Big(M+a\frac{dx^\lambda}{ds}e_\lambda\Big)=\Big(\frac{dx^\lambda}{ds}+\frac{da}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}+\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\Big)=0\,,$$

d'où $$\frac{\delta^2x^\lambda}{\delta s^2}\equiv\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0\,,\qquad 1+\frac{da}{ds}=0\,,$$

ce qui montre que cette courbe est aussi une géodésique. Donc, nous avons le

Théorème 3.2. Si la tangente d'une courbe passe, quand on la développe, toujours par un point fixe, elle est une géodésique.

Considérons cette fois une courbe dont le vecteur de courbure $\dfrac{\delta^2x^\lambda}{\delta s^2}$ passe, quand on la développe, par un point fixe. Alors, on aura

$$\frac{d}{ds}\Big(M+a\frac{\delta^2x^\lambda}{\delta s^2}e_\lambda\Big)=\Big(\frac{dx^\lambda}{ds}+\frac{da}{ds}\frac{\delta^2x^\lambda}{\delta s^2}+a\frac{\delta^3x^\lambda}{\delta s^3}\Big)e_\lambda=0\,,$$

d'où
$$\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3}+\frac{dx^\lambda}{ds}g_{\mu\nu}\frac{\delta^2 x^\mu}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^\nu}{\delta s^2}=0\,, \qquad \frac{1}{a}=g_{\mu\nu}\frac{\delta^2 x^\mu}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^\nu}{\delta s^2}\,,$$

ce qui montre que cette courbe est un cercle de l'espace de Riemann, et on a le

Théorème 3.3. La courbe dont le vecteur de courbure passe, si l'on la développe, par un point fixe est un cercle de l'espace de Riemann.

En combinant les résultats du paragraphe précédent et les Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3, on aura les

Théorème 3.4. Si un espace de Riemann admet un champ de vecteur v^λ parallèle, la courbe dont la tangente est toujours dirigée dans la direction du vecteur v^λ est une géodésique.

Théorème 3.5. Si un espace de Riemann admet un champ de vecteur v^λ concourant, la courbe dont la tangente est toujours dirigée dans la direction du vecteur v^λ est une géodésique.

Théorème 3.6. Si un espace de Riemann admet un champ de vecteur v^λ concourant, la courbe dont le vecteur de courbure est toujours dirigé dans la direction du vecteur v^λ est un cercle de l'espace de Riemann.

§ 4. *Les propriétés des hypersurfaces totalement géodésiques et ombiliquées dans un espace de Riemann.*

Soient

$$(4.1) \qquad x^\lambda=x^\lambda(x^i)\,, \qquad (i,j,k,\ldots=\dot{1},\dot{2},\dot{3},\ldots,\dot{n}-\dot{1})$$

les équations paramétriques d'une hypersurface V_{n-1}, et posons

$$B_i^{\cdot\lambda}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\,, \quad g_{jk}=g_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu}\,, \quad B^i_{\cdot\lambda}=g^{ij}g_{\lambda\mu}B_j^{\cdot\mu} \quad (g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k)$$

et

$$(4.2) \qquad H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=B_{j:k}^{\cdot\lambda}=\frac{\partial B_j^{\cdot\lambda}}{\partial x^k}+B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu}\left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}-B_i^{\cdot\lambda}\left\{{}^{i}_{jk}\right\}\,,$$

où $\left\{{}^{i}_{jk}\right\}$ désignent les symboles de Christoffel formés avec les composantes g_{jk} du tenseur fondamental de l'hypersurface.

Si l'on désigne par B^λ le vecteur unitaire normal à l'hypersurface, on peut poser $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{jk}B^\lambda$ et H_{jk} s'appelle le second tenseur fondamental de l'hypersurface.

Cela étant, pour une courbe $x^\lambda(s)=x^\lambda\big(x^i(s)\big)$ sur l'hypersurface, nous avons

$$(4.3) \qquad \frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}=B_i^{\cdot\lambda}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\,,$$

où $\delta/\delta s$ désigne la dérivée covariante le long de la courbe.

Or, si toutes les géodésiques sur l'hypersurface V_{n-1} sont aussi des géodésiques de l'espace ambiant V_n, l'hypersurface est dite totalement géodésique.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface soit totalement géodésique est $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0$, et par suite $H_{jk}=0$.

Cela dit, pour un vecteur $v^\lambda=B_i^{\cdot\lambda}v^i$ tangent à l'hypersurface totalement géodésique, nous avons $\delta v^\lambda=B_i^{\cdot\lambda}\delta v^i$, δ désignant la dérivée covariante, d'où on tire le

Théorème 4.1. Si l'on déplace parallèment un vecteur tangent à l'hypersurface totalement géodégique le long de cette hypersurface, le vecteur déplacé est aussi tangent à cette hypersurface.

La dérivée covariante de $B_{j}^{\cdot\lambda}$ étant $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$, la dérivée covariante du vecteur unitaire normal B^{λ} est donnée par les équations de Weingarten:

$$B^{\lambda}_{\cdot ;k} = -B_{i}^{\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot k},$$

où $H^{i}_{\cdot k} = g^{ij} H_{jk}$, d'où on obtient le

Théorème 4.2. Pour qu'une hypersurface soit totalement géodésique, il est nécessaire et suffisant que le vecteur unitaire normal soit toujours parallèle le long de l'hypersurface.

Le second tenseur fondamental étant donné par H_{jk}, l'hypersurface dont les directions principales et par suite dont les lignes de courbure sont indéterminées, c'est-à-dire l'hypersurface pour laquelle on a

$$H_{jk} = \frac{1}{n-1} H^{a}_{\cdot a} g_{jk}$$

est dite totalement ombiliquée.

Quand on développe l'hypersurface totalement ombiliquée, ses normales B^{λ} et $B^{\lambda} + \delta B^{\lambda}$ se coupent. Car

$$B^{\lambda} + \delta B^{\lambda} = B^{\lambda} - B_{i}^{\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot k} dx^{k} = B^{\lambda} + \frac{1}{n-1} H^{a}_{\cdot a} dx^{\lambda}.$$

Inversement, si B^{λ} et $B^{\lambda} + \delta B^{\lambda}$ se coupent toujours, on doit avoir

$$\alpha B^{\lambda} + dx^{\lambda} = \beta (B^{\lambda} + \delta B^{\lambda}) = \beta (B^{\lambda} - B_{i}^{\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot k} dx^{k}),$$

d'où $$H^{i}_{\cdot j} = -\frac{1}{\beta} \delta^{i}_{j}, \qquad -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\beta} = \frac{1}{n-1} H^{a}_{\cdot a},$$

ce qui montre que l'hypersurface est totalement ombiliquée. Donc, on a le

Théorème 4.3. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface soit totalement ombiliquée est que les normales en deux points infiniment voisins se coupent toujours quand on développe l'hypersurface.

Cela étant, considérons une hypersurface dont la normale passe toujours par un point fixe quand on la développe. Dans ce cas, nous avons

$$d(M + \alpha B^{\lambda} e_{\lambda}) = (dx^{\lambda} + d\alpha B^{\lambda} + \alpha \delta B^{\lambda}) e_{\lambda} = (dx^{\lambda} + d\alpha B^{\lambda} - \alpha B_{i}^{\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot k} dx^{k}) e_{\lambda} = 0,$$

d'où $$H^{i}_{\cdot j} = \frac{1}{\alpha} \delta^{i}_{j}, \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n-1} H^{a}_{\cdot a} = \text{constante},$$

c'est-à-dire l'hypersurface doit être totalement ombiliquée et sa coubure moyenne constante. Inversement, si une hypersurface jouit de cette propriété, ses normales passent, quand on la développe, toujours par un point fixe. Donc, on peut énoncer le

Théorème 4.4. Pour qu'une hypersurface soit totalement ombiliquée et à courbure moyenne constante, il est nécessaire et suffisant que sa normale passe, quand on la développe, toujours par un point fixe.

Cela étant, considérons une géodésique $x^\lambda(s)=x^\lambda(x^i(s))$ sur l'hypersurface totalement ombiliquée à courbure moyenne constante, on a de (4.3)

$$\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}=\frac{1}{n-1}H^{a}_{\cdot a}B^\lambda$$

ce qui montre que le vecteur de courbure $\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}$ passe toujours par un point fixe, donc la courbe $x^\lambda(s)$ est un cercle de l'espace ambiant V_n de Riemann. Donc, nous avons le

Théorème 4.5. La géodésique de l'hypersurface totalement ombiliquée à courbure moyenne constante est un cercle de l'espace ambiant.

Inversement, si la géodésique d'une hypersurface est toujours un cercle de l'espace ambiant, les équations

$$\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}=H_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}B^\lambda$$

montrent que la normale B^λ doit passer toujours par un point fixe quand on développe l'hypersurface, donc elle est une hypersurface totalement ombiliquée à courbure moyenne constante, et nous avons le

Théorème 4.6. Si la géodésique d'une hypersurface est toujours un cercle de l'espace ambiant, cette hypersurface est totalement ombiliquée et à courbure moyenne constante.

Pour une courbe sur l'hypersurface totalement ombiliquée à courbure moyenne constante, en dérivant encore les équations

$$\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}=B_i^{\cdot\lambda}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}+\frac{1}{n-1}H^{a}_{\cdot a}B^\lambda$$

le long de la courbe, on a

$$\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3}=B_i^{\cdot\lambda}\frac{\delta^3 x^i}{ds^3}-\left(\frac{1}{n-1}H^{a}_{\cdot a}\right)^2\frac{dx^\lambda}{ds},$$

donc, si les $\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3}$ sont proportionnelles aux $\frac{dx^i}{ds}$, c'est-à-dire, si la courbe est un cercle de l'hypersurface, $\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3}$ sont proportionnelles aux $\frac{dx^\lambda}{ds}$, c'est-à-dire, la courbe est un cercle de l'espace ambiant. Donc, on a le

Théorème 4.7. Le cercle de l'hypersurface totalement ombiliquée à courbure moyenne constante est aussi un cercle de l'espace ambiant V_n.

Inversement, si les cercles d'une hypersurface sont toujours les cercles de l'espace ambiant, les équations

$$\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3}=B_i^{\cdot\lambda}\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3}+3H_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{dx^k}{ds}B^\lambda+H_{jk;h}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds}B^\lambda$$
$$-B_i^{\cdot\lambda}H_{jk}H^{i}_{\cdot h}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds},$$

qui sont obtenues de (4.3), nous donnent

$$H_{jk}=\frac{1}{n-1}H^{a}_{\cdot a}g_{jk}, \qquad \frac{1}{n-1}H^{a}_{\cdot a}=\text{constante},$$

donc, nous avons le

Théorème 4.8. L'hypersurface dont les cercles sont toujours les cercles de l'espace ambiant est totalement ombiliquée et sa courbure moyenne est constante.

§ 5. *La structure de l'espace de Riemann qui admet un champ de vecteur parallèle ou concourant*[1].

Si un espace de Riemann V_n admet un champ de vecteur v^λ parallèle, v^λ doit, d'après le Théorème 2.1, satisfaire à $v^{\lambda}_{;\nu}=0$ d'où $v_{\mu;\nu}=0$ en posant $v_\mu=g_{\lambda\mu}v^\lambda$, donc, nous avons

$$v_{\mu;\nu}-v_{\nu;\mu}=\frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu}=0,$$

ce qui montre qu'il existe une fonction telle que $v_\lambda=\dfrac{\partial v}{\partial x^\lambda}$. Alors, les hypersurfaces définies par les équations $v(x^1, x^2, \dots, x^n)=$constantes sont totalement géodésiques et ses trajectoires orthogonales sont les géodésiques, car, v^λ étant un champ de vecteur parallèle, la courbe dont la tangente est dirigée dans la direction de v^λ est une géodésique et la normale à l'hypersurface $v(x^1, x^2, \dots, x^n)=$constante est toujours parallèle. Donc, dans notre espace V_n, il existe une famille des hypersurfaces totalement géodésiques dont les trajectoires orthogonales sont géodésiques. Inversement, s'il existe une telle famille des hypersurfaces dans un espace de Riemann, il est facile de démontrer que l'espace de Riemann admet un champ de vecteur parallèle, donc, nous avons le

Théorème 5.1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Riemann admette un champ de vecteur parallèle est qu'il contienne une famille des hypersurfaces totalement géodésiques dont les trajectoires orthogonales sont géodésiques.

Dans ce cas, si-l'on choisit un systeme de cordonnées dans lequel les équations des hypersurfaces sont $x^n=$const. et les courbes $x^i=$constantes sont orthogonales aux hypersurfaces, la forme quadratique différentielle de l'espace s'écrit

$$ds^2=g_{jk}(x^i)dx^j dx^k+dx^n dx^n. \tag{5.1}$$

Inversement, si la forme fondamentale a cette forme, les hypersurfaces $x^n=$constantes sont totalement géodésiques et les courbes $x^i=$ constantes sont géodésiques. Donc, nous avons le

Théorème 5.2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Riemann admette un champ de vecteur parallèle est qu'il existe un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale de l'espace s'écrit sous la forme (5.1).

L'espace V_n admettant un champ de vecteur v^λ parallèle, considérons une hypersurface $x^\lambda=x^\lambda(x^i)$ totalement géodésique dont la normale ne coïncident pas avec v^λ, et posons $v^i=B^{i}_{\cdot\lambda}v^\lambda$, alors on a

---

1) Tous les résultats de ce paragraphe sont communiqués à l'auteur par M. S. Sasaki.

$$v^i_{;k} = (B^i_{.\lambda} v^\lambda)_{;k} = H^i_{.k\lambda} v^\lambda + B^i_{.\lambda} v^\lambda_{;\nu} B^{;\nu}_k = 0\,.$$

Donc, l'hypersurface admet aussi un champ de vecteur v^λ parallèle, et on a le

Théorème 5.3. Si l'espace admet un champ de vecteur parallèle et il existe une hypersurface totalement géodésique qui n'est pas orthogonale à v^λ, l'hypersurface admet aussi un champ de vecteur parallèle.

Cela étant, supposons que l'espace de Riemann admette un champ de vecteur v^λ concourant, alors, d'après le Théorème 3.2, il doit satisfaire à $\delta^\lambda_\nu + v^\lambda_{;\nu} = 0$, d'où $g_{\mu\nu} + v_{\mu;\nu} = 0$. Donc $v_{\mu;\nu}$ est symétrique par rapport à μ et ν et par conséquent, en raisonnant comme ci-dessus, on en conclut qu'il existe une fonction telle que $v_\lambda = \dfrac{\partial v}{\partial x^\lambda}$. Or, hypersurfaces définies par les équations $v\ (x^1, \dots, x^n) =$ constantes sont totalement ombiliquées et à courbure moyenne constante et ses trajectoires orthogonales sont les géodésiques, car v^λ étant un champ de vecteur concourant, la courbe dont la tangente est dirigée dans la direction de v^λ est une géodésique et la normale à l'hypersurface $v\ (x^1, \dots, x^n) =$ constante est toujours concourante, donc, dans notre espace, il existe une famille des hypersurfaces totalement ombiliquées à courbure moyenne constante dont les trajectoires orthogonales sont géodésiques. Inversement, s'il exsiste une telle famille des hypersurfaces dans un espace de Riemann, il est facile de démontrer que l'espace de Riemann admet un champ de vecteur concourant, donc nous avons le

Théorème 5.4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Riemann admette un champ de vecteur concourant est qu'il contienne une famille des hypersurfaces totalement ombiliquées à courbure moyenne constante dont les trajectoires orthogonales sont les géodésiques.

Dans ce cas, si l'on choisit un système de coordonnées dans lequel les hypersurfaces sont représentées par $x^n =$ constantes et les trajectoires orthogonales par $x^i =$ constantes, alors, il est facilement montré que la forme fondamentale de l'espace s'écrit

$$ds^2 = (x^n)^2 g_{jk}(x^i) dx^j dx^k + dx^n dx^n\,. \tag{5.1}$$

Inversement, si la forme fondamentale a cette forme, les hypersurfaces $x^n =$ constantes sont totalement ombiliquées et à courbure moyenne constante et ses trajectoires orthogonales sont géodésique, donc, nous avons le

Théoréme 5.5. La condition nécessaire et suffisante pour qu' un espace de Riemann admette un champ de vecteur concourant est qu'il existe un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale s'écrit sous la forme (5.1).

L'espace admettant un champ de vecteur concourant v^λ, considérons une hypersurface totalement géodésique $x^\lambda(x^i)$ qui n'est pas orthogonale à v^λ, et posons $v^i = B^i_{.\lambda} v^\lambda$, alors on a

$$\delta^i_k + v^i_{;k} = \delta^i_k + (B^i_{.\lambda} v^\lambda)_{;k} = \delta^i_k + (H^i_{.k\lambda} v^\lambda + B^i_{.\lambda} v^\lambda_{;\nu} B^{;\nu}_k) = \delta^i_k - \delta^i_k = 0\,,$$

ce qui montre que l'hypersurface admet aussi un champ de vecteur v^i, donc, on a le

Théorème 5.6. Si l'espace de Riemann admet un champ de vecteur v^λ concourant et il existe une hypersurface totalement géodésique qui n'est pas orthogonale à v^λ, l'hypersurface admet aussi un champ de vecteur concourant.

§ 6. *Lès espace d'Einstein admettant un champ de vecteur parallèle ou concourant.*

Considérons un espace d'Einstein, soit, un espace de Riemann dont le tenseur de Ricci satisfait à

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{n}Rg_{\mu\nu}\,, \tag{6.1}$$

où nous avons posé

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\frac{\partial\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}}{\partial x^{\omega}}-\frac{\partial\{{}^{\lambda}_{\mu\omega}\}}{\partial x^{\nu}}+\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\}\{{}^{\lambda}_{\alpha\omega}\}-\{{}^{\alpha}_{\mu\omega}\}\{{}^{\lambda}_{\alpha\nu}\}\,,\quad R_{\mu\nu}=R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda}\,,\quad R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,.$$

Or, si l'on suppose que cet espace d'Einstein admette un champ de vecteur v^λ parallèle, d'après le Théorème 5.2, la forme fondamentale peut s'écrire

$$ds^2={}^*g_{jk}(x^i)dx^jdx^k+dx^ndx^n\,. \tag{6.2}$$

En calculant, dans ce système de coordonnées, les symboles de Christoffel, le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, on a

$$\{{}^{i}_{jk}\}={}^*\{{}^{i}_{jk}\}\,,\quad R^{i}_{\cdot jkh}={}^*R^{i}_{\cdot jkh}\,,\quad R_{jk}={}^*R_{jk}\,,\quad R={}^*R\,. \tag{6.3}$$

les autres $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$, $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ et $R_{\mu\nu}$ étant tous nuls, où les étoiles indiquent que les quantités qui les portent sont formées à partir de ${}^*g_{jk}$. Des équations (6.1) et (6.3), on peut facilement déduire que ${}^*R_{jk}=0$, $R={}^*R=0$. Donc, on a le

Théorème 6.1. Si un espace d'Einstein admet un champ de vecteur parallèle, sa courbure scalaire est nulle et sa forme fondamentale prend la forme (6.2) où ${}^*g_{jk}(x^i)dx^jdx^k$ est la forme fondamentale d'un espace d'Einstein à $(n-1)$ dimensions dont la courbure scalaire est nulle.

De ce Théorème, on tire le

Théorème 6.2. Un espace d'Einstein à $(n-1)$ dimensions dont la courbure scalaire est nulle peut se plonger dans un espace d'Einstein à n dimensions dont la courbure scalaire est aussi nulle.

Cela étant, considérons un espace d'Einstein admettant un champ de vecteur concourant, alors sa forme fondamentale peut s'écrire, d'apres le Théorème 5.5, sous la forme

$$ds^2=(x^n)^2\,{}^*g_{jk}(x^i)dx^jdx^k+dx^ndx^n\,, \tag{6.4}$$

dans ce cas, les symboles de Christoffel $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ sont donnés par

$$\{{}^{i}_{jk}\}={}^*\{{}^{i}_{jk}\}\,,\quad \{{}^{n}_{jk}\}=-x^n\,{}^*g_{jk}\,,\quad \{{}^{i}_{nk}\}=\{{}^{i}_{kn}\}=\frac{1}{x^n}\delta^i_k$$

les autres étant nuls, par suite, les composantes du tenseur de courbure par

$$R^{i}_{\cdot jkh} = {}^*R^{i}_{\cdot jkh} - ({}^*g_{jk}\delta^i_h - {}^*g_{jh}\delta^i_k), \quad R^{n}_{\cdot jkn} = R^{i}_{\cdot jnh} = R^{n}_{\cdot jnn} = R^{i}_{\cdot nnh} = R^{n}_{\cdot nnn} = 0$$

Donc, en les substituant dans (6.1), on obtient

$$ {}^*R_{jk} = (n-2){}^*g_{jk}, \quad {}^*R = (n-1)(n-2), \quad R = 0, $$

d'où on obtient le

Théorème 6.3. Si un espace d'Einstein admet un champ de vecteur concourant, sa courbure scalaire est nulle et sa forme fondamentale prend la forme (6.4) où ${}^*g_{jk}(x^i)dx^j dx^k$ *est la métrique d'un espace d'Einstein à* $(n-1)$ *dimensions dont la courbure scalaire est* $(n-1)(n-2)$.

D'où on obtient immédiatement le

Théorème 6.4. Un espace d'Einstein à $(n-1)$ *dimensions dont la courbure scalaire est* $(n-1)(n-2)$ *peut se plonger dans un espace d'Einstein à* n *dimensions dont la courbure scalaire est nulle.*

Si l'espace donné est un espace à courbure constante, on peut naturellement le considérer comme étant un espace d'Einstein. Si cet espace admet un champ de vecteur parallèle ou concourant, les Théorèmes 6.1 et 6.3 montrent que sa courbure scalaire est nulle, donc, l'espace à courbure constante devient l'espace euclidien, et on a le

Théorème 6.5. Si un espace à courbure constante admet un vecteur parallèle ou concourant, il doit être nécessairement un espace euclidien.