110. Über das Helmholtzsche Raumproblem, II.

Von Shôkichi IYANAGA und Makoto ABE.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

§1. Unsere frühere Note über den gleichen Gegenstand[1] enthält ein Versehen, das jetzt berichtigt werden soll. Es bezieht sich auf die Kongruenz des Winkels $<(\alpha'\beta')$ mit dem umgeklappten Winkel $<(\beta'\alpha')$, oder kurz die " Winkelsymmetrie ": $<(\alpha'\beta') \equiv <(\beta'\alpha')$. In H wurde behauptet, dass dies unter den Annahmen I, II des Satzes a. a. O. (der freien Beweglichkeit des ganzen Raumes und der der Teilräume) eine Folge der Pythagoreizität des Körpers K ist[2]. Das war aber nicht richtig; in einem von Hilbert angegebenen, geordneten und *pythagoreischen* Körper lässt sich nämlich eine Geometrie konstruieren, in der zwar die freie Beweglichkeit des ganzen Raumes sowie die der Teilräume, jedoch nicht die Winkelsymmetrie gilt[3]. Der Satz und Zusatz in H müssen folgendermassen umformuliert werden.

Satz. *Es sei (wie in H) K ein geordneter Körper, $R=R^n(K)$ ein n-dimensionaler affiner Raum über K, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^n(K)$ die Gruppe aller affinen Transformationen von R. Als geordnetes Paar von Halbgeraden α', β', die von einem und demselben Punkt ausgehen, wird der Winkel $<(\alpha'\beta')$ erklärt.*

Eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ erfülle nun folgende Bedingungen:

I. *Die Forderung der freien Beweglichkeit,*[4]

II. *Die Forderung der freien Beweglichkeit für Teilräume,*[4]

III. *Die Forderung der Winkelsymmetrie: Ist $<(\alpha'\beta')$ ein beliebiger Winkel, so gibt es eine Transformation T von $\mathfrak{G}$, sodass $T(\alpha')=\beta'$ und $T(\beta')=\alpha'$ gilt.*

Existiert eine solche Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$, so ist der Körper K notwendig pythagoreisch, und $\mathfrak{G}$ ist als diejenige Untergruppe von $\mathfrak{A}$ charakterisiert, deren Transformationen eine bestimmte positiv-definite quadratische Form der Koordinatendifferenzen je zweier Punkte des Raumes — den „Abstand" dieser Punkte — invariant lassen.

Zusatz. *$\mathfrak{G}_0$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, deren Transformationen einen Punkt O des Raumes festlassen. $\mathfrak{G}_0$ genüge ferner den Bedingungen der „freien Beweglichkeit um den Punkt O[5]", und der Forderung der Winkelsymmetrie für die Winkel mit dem Scheitel O.*

---

1) Über das Helmholtzsche Raumproblem, diese Proc. 19, S. 174, im folgenden zit. mit H. Die Bezeichnungen in H benutzen wir auch in vorliegender Note.

2) Vgl. H. S. 176ff., insb. die Anm. 6) auf S. 177. Der Fehlschluss liegt darin, dass wir auf S. 178 im Absatz 7) aus $<Q_1OQ_2 \equiv <Q_2OQ_1'$ das Senkrechtstehen der Geraden Q_1Q_1' und Q_2Q_2' folgerten. Nach unserer Definition des rechten Winkels wäre dies erst dann erlaubt, wenn etwa $<Q_2OQ_1' \equiv <Q_1'OQ_2$ bewiesen würde!

3) D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. S. 135. Dieses Buch wird im folgenden mit G zitiert.

4) Siehe H. S. 175.

5) Siehe H. S. 179.

Dann ist $\mathfrak{G}_0$ *die Gruppe der „orthogonalen Transformationen", d. h. die Gruppe aller affinen Transformationen, die den Punkt* O *und den Abstand je zweier Punkte invariant lassen.*

Die Absätze 1)—6) im Beweis des Satzes in H können genau so wie sie waren zum Beweis dieses umformulierten Satzes verwendet werden, da wir dabei von der Pythagoreizität des Körpers K keinen Gebrauch gemacht haben. Wegen der Annahme III fällt nun die oben erwähnte Schwierigkeit[6] im Absatz 7) aus; wir haben aber beim Beweis folgender Tatsache wesentlich benutzt, dass K pythagoreisch ist:

Ist $\sphericalangle(\alpha'\beta')$ *ein Winkel (z. B. wie in H,* α': *positive x-Achse,* β': *die Halbgerade* $y=mx, m>0, x>0$*), so gibt es in der Ebene des Winkels eine Gerade* γ*, sodass die Spiegelung dieser Ebene an* γ α' *in* β' *und* β' *in* α' *abbildet.*

Unter der Annahme III lässt sich dies wie folgt elementar-geometrisch beweisen.

Es sei O der Scheitel des Winkels $\sphericalangle(\alpha'\beta')$ und A ein beliebiger, von O verschiedener Punkt von α'. Man trage eine mit OA kongruente Strecke OB auf β' ab. M sei der Mittelpunkt von AB. Dann, behaupten wir, leistet die Gerade $\gamma=OM$ das Gewünschte.

Sei nämlich T ein nach III sicher existierendes Element von $\mathfrak{G}$, das α' mit β' vertauscht. Dann gilt offenbar $T(A)=B$ und $T(B)=A$, T lässt also die Gerade AB invariant. Die Spiegelung S_M dieser Gerade am Punkt M vertauscht aber auch A mit B. Nach II muss also die von T induzierte Transformation der Gerade AB mit S_M übereinstimmen. T lässt also den Punkt M fest. Da andererseits T offenbar den Scheitel O unverändert lässt, gilt $T(OMA)=(OMB)$; die Geraden OM und AB stehen mithin senkrecht zueinander. T ist also eben die Spiegelung an $\gamma=OM$.—

Wie in H folgt alsdann der pythagoreische Lehrsatz, und somit auch die Pythagoreizität des Körpers.

§ 2. Im Falle, wo K der Körper der reellen Zahlen ist, und $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist, lässt sich nun auch die neu eingeführte Annahme III aus I allein folgern, sodass unsere Methode nach wie vor einen einfacheren Beweis für den Weylschen Satz liefert. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Zu dem Zwecke ist vorerst zu bemerken, dass unsere Annahme III wesentlich von 2-dimensionalem Charakter ist. Sie hat nämlich keinen Sinn, wenn der ganze Raum 1-dimensional ist, und der Satz

A_n: *Für* $R=R^n(K)$ *folgt II, III aus I.*

bedeutet, dass A_2 in jedem 2-dimensionalen Teilraum von R gilt, falls $n\geqq 3$ ist. In H ist der Satz

A'_n: *Für* $R=R^n(K)$ *folgt II aus I.*

durch Induktionsschluss nach n, und unter Benutzung des Zusatzes in H für die niedrigeren Dimensionen $k<n$ (Wir bezeichnen den Zusatz in H für den k-dimensionalen Fall mit Z'_k, und mit Z_k den entsprechenden Zusatz in der oben richtiggestellten Form), bewiesen worden. Nach dem vorhin Gesagten ist die Behauptung Z'_k für $k\geqq 2$ nicht stichhal-

6) Vgl. obige Anm. 2).

tig; $Z_1'=Z_1$ gilt aber trivialerweise. A_2' steht also auf festem Grund und kann zum Beweis von A_2 dienen. Wird A_2 einmal gezeigt, so kann man A_n $(n\geqq 3)$ wie in H beweisen, indem man Z_k statt Z_k' zu Hilfe nimmt. A_n folgt dann aus A_n' wie A_2 aus A_2'. Es kommt also nur darauf an, folgendes nachzuweisen:

Für $R=R^2(K)$ folgt III aus I, II.

Dabei können wir uns freilich aller Folgerungen aus I, II, also insb. der eindeutigen Abtragbarkeit des Winkels, bedienen[7].

Unserer Annahme III kann man nun folgende von P. Bernays herrührende Wendung geben[8], indem man das „Innere" des Winkels in naheliegender Weise definiert:[9]

III′ *Liegen zwei Halbgeraden γ', δ', die vom Scheitel eines Winkels $<(\alpha'\beta')$ ausgehen, im Innern dieses Winkels, so findet die Kongruenz $<(\alpha'\beta')\equiv<(\gamma'\delta')$ nicht statt.*

Nach § 1 ist nämlich klar, dass III′ aus I, II, und III folgt. Dass umgekehrt III eine einfache Folge aus I, II und III′ ist, kann man so zeigen:[10]

Es sei $<(\alpha'\beta')$ nicht mit $<(\beta'\alpha')$ kongruent. Dann trage man einen mit $<(\alpha'\beta')$ kongruenten Winkel $<(\beta'\gamma')$ an β' in der Ebene des Winkels $<(\beta'\alpha')$ und an der Seite, wo α' liegt, ab. γ' liegt dann entweder im Innern oder ausserhalb des Winkels $<(\alpha'\beta')$. Betrachten wir nur den erstern Fall, denn der andere Fall behandelt sich in analoger Weise. Dann trage man an γ' in derselben Seite wie β' wieder mit $<(\beta'\gamma')$ kongruenten Winkel $<(\gamma'\delta')$ ab. δ' liegt dann im Innern von $<(\gamma'\beta')$, also auch von $<(\alpha'\beta')$, und man bekommt $<(\alpha'\beta')\equiv<(\gamma'\delta')$ entgegen III′.—

Wir werden nun zeigen, dass die Verneinung von III′ zu einem Widerspruch führt.

Es sei also $<(\alpha'\beta')\equiv<(\gamma'\delta')$ und γ', δ' liegen im Innern von $<(\alpha'\beta')$. Die Transformation $T\in\mathfrak{G}$, die $T(\alpha', \beta')=(\gamma', \delta')$ ermittelt, wird durch Angabe von α', γ' und von den Seiten der Geraden α, γ, wo β' bzw. δ' liegen, eindeutig bestimmt. Der Scheitel des Winkels sei O genannt; $a_1'=\alpha'$, und a_2' die Halbebene des Winkels. In der Ebene a_2 sei ein affines, der Kette $a_2'\supset a_1'\supset a_0=O$ zugehöriges Koordinatensystem eingeführt.[11] $\alpha=\alpha'\vee\alpha''$ ist also die x-Achse. Die y-Achse sei etwa $\eta=\eta'\vee\eta''$, η' ihr positiver Teil. Jeder von O ausgehenden Halbgerade χ' ordnen wir nun eine reelle Zahl $\rho(\chi')$ folgendermassen zu: Es sei $\rho(\alpha')=0$, $\rho(\eta')=1$, $\rho(\alpha'')=2$, $\rho(\eta'')=3$; allgemein setzen wir $\rho(\chi')=m/m+1$, $1+(1/1-m)$, $2+(m/m+1)$, bzw. $3+(1/1-m)$, je nachdem χ' im 1., 2., 3., bzw. 4. „Quadranten" liegt, wobei $y=mx$ die Gleichung der Gerade $\chi=\chi'\vee\chi''$ sein soll. Diese Abbildung von $\{\chi'\}$ auf $\{\rho; 0\leqq\rho<4\}$ ist ersichtlich eineindeutig, monoton und stetig in leicht zu verstehendem Sinne. Insb. gilt $\rho(\delta')<\rho(\beta')$ und $\rho(\gamma'')=\rho(\gamma')+2>\rho(\alpha'')$, und $\rho\big(T(\chi')\big)$ hängt stetig von $\rho(\chi')$ ab, da $T\in\mathfrak{A}$ eine stetige Transfor-

7) Vgl. H. § 1, Absätze 1)–6).
8) G. S. 134.
9) G. S. 13.
10) Folgenden einfachen Beweis verdanken wir T. Iwamura.
11) Vgl. H. S. 175.

mation der Ebene ist. Nun ist aber $T(\beta')=\delta'$ und $T(\alpha'')=\gamma''$, weil $T(\alpha')=\gamma'$ und $T\in\mathfrak{A}$ ist. Die stetige Funktion $\rho\big(T(x')\big)-\rho(x')$ von $\rho(x')$ ändert also ihr Vorzeichen, während $\rho(x')$ von $\rho(\beta')$ bis $\rho(\alpha'')$ wächst. Für ein gewisses x', das im Innern des Winkels $<(\beta'\alpha'')$ liegt, müsste also $\rho\big(T(x')\big)=\rho(x')$ eintreten, und α', γ' lägen dabei an derselben Seite von diesem x'. Dann hätte man aber $T(x')=x'$, und $T(x', \alpha')=(x', \gamma')$, und das stimmte nicht mit der eindeutigen Abtragbarkeit des Winkels.

Zusatz bei der Korrektur.

Die am Anfang des § 1 gemachte Behauptung, dass sich in einem von Hilbert angegebenen Körper eine Geometrie konstruieren liesse, in der zwar I, II, aber nicht III besteht, muss zurückgezogen werden: es ist nicht leicht eine solche zu konstruieren. Die Frage nach der Abhängigkeit der Annahmen I, II, III und der Pythagoreizität des Körpers bleibt noch offen. Es steht aber jedenfalls fest, dass wir auf diesem elementar-geometrischen Wege den Weylschen Satz beweisen können.