108. Über modulare Verbände, welche die Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe bilden. I.

Von Eizi INABA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

Alle Untergruppen einer Gruppe bilden bezüglich ihrer Vereinigung und Durchschnittbildung einen Verband, dessen charakteristischen Merkmale schwer zu finden sind. In der vorliegenden Note will ich die Definition eines Verbandes ohne Anlehnung an den Gruppenbegriff vornehmen und bestätigen, dass es mit mehreren Merkmalen des Verbandes aller Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe versehen ist.

Ein Element a aus einem Verband $\mathfrak{B}$ heisst *neutral*, wenn für zwei Elemente x, y aus $\mathfrak{B}$ stets die beiden Relationen

$$a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y), \quad a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y)$$

bestehen. Wenn $\mathfrak{B}$ Einselement e und Nullelement n besitzt, so heissen diese *uneigentlich neutral* und alle anderen neutralen Elemente *eigentlich neutral*. Nimmt man zwei Elemente b, c aus $\mathfrak{B}$ mit $b \leqq c$, so bilden alle Elemente zwischen b und c einen Teilverband von $\mathfrak{B}$. Dieser heisst nach Ore *Quotient* von $\mathfrak{B}$ und werde mit dem Symbol $\frac{c}{b}$ bezeichnet. Wir wollen einen modularen Verband $\mathfrak{B}$ *primär* nennen, wenn jeder Quotient von $\mathfrak{B}$ eine Kette oder ein Verband mit keinem eigentlichen neutralen Element ist. Der Verband der Untergruppen einer beliebigen kommutativen p-Gruppe G ist ein Exemplar dafür. In der Tat sei G nicht zyklisch und H ihre beliebige echte Untergruppe. Wenn H nicht zyklisch ist, wähle man ein beliebiges Element aus G, das zu H nicht gehört. Wenn H zyklisch ist, sei es ferner noch der Bedingung, $\{a\}$ nicht H enthält, unterworfen. Jedenfalls gilt dann $\{a\} \cap H < H$, $\{a\} \cap H < \{a\}$, und $\{a\} \cap H = \{a^{\nu}\}$ mit $\nu > 1$. Wählt man nun ein Element b aus H derart, dass b nicht zu $\{a\} \cap H$ gehört, so gilt $(\{a\} \cap H) \cup (\{ab\} \cap H) = \{a^{\nu}, b^{\nu}\}$, $(\{a\} \cup \{ab\}) \cap H = \{a^{\nu}, b\}$. Also ist H nicht neutral. Ein Verband soll ferner *halbprimär* heissen, wenn es direkte Vereinigung endlich vieler primären Verbände ist. Jeder Quotient eines halbprimären Verbandes ist offenbar halbprimär, und dergleichen gilt auch für das duale isomorphe Bild. Der Verband der Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe ist nun stets halbprimär, da es direkte Vereinigung der Verbände der Untergruppen von ihren Sylowschen Gruppen ist.[1] Ein halbprimärer oder primärer Verband endlicher Dimension soll im folgenden mit H^- bzw. P^- Verband bezeichnet werden. Zuerst ist zu bemerken, dass jede

---

1) Der halbprimäre Verband endlicher Dimension ist doch nicht im Stande, den Verband der Untergruppen einer abelschen Gruppe vollständig zu charakterisieren. Denn jener Verband ist nicht immer zu sich selbst dual isomorph.

Kette und jeder komplementäre modulare Verband endlicher Dimension stets halbprimär sind. Sei nämlich $\mathfrak{B}$ eine projektive Geometrie, so sind zwei Atomelemente x und y stets perspektiv (d. h. besitzen ein gemeinsames Komplement). Ist $x \leqq a$, $y \leqq a$, und z ein gemeinsames Komplement von x, y, so wird $x \cup (z \cap a) = a$, $y \cup (z \cap a) = a$, $x \cap (z \cap a) = n$, $y \cap (z \cap a) = n$. Also sind x und y perspektiv im Quotienten $\frac{a}{n}$ und dieser ist folglich frei von eigentlichen neutralen Elementen.

Jeder Quotient $\frac{a}{n}$ heisse *D-Hülle* von $\mathfrak{B}$. Wenn eine D-Hülle $\frac{a}{n}$ von $\mathfrak{B}$ eine Kette ist, so heisse sie eine *Kette in* $\mathfrak{B}$. Wenn sie überdies maximal, d. h. nicht in einer anderen Kette in $\mathfrak{B}$ enthalten ist, so heisst sie eine *maximale Kette in* $\mathfrak{B}$ mit a als ihr Einselement.

Satz 1. *Jedes Element aus einem H^- Verband $\mathfrak{B}$ ist darstellbar als Vereinigung endlich vieler Elemente aus maximalen Ketten in $\mathfrak{B}$.*

Wir beweisen den Satz für das Element einer primären Komponenten von $\mathfrak{B}$ durch Induktion bezüglich seiner Dimension. Jedes Atomelement ist natürlich in einer maximalen Kette enthalten. Ist die D-Hülle $\frac{a}{n}$ keine Kette, so existieren mindestens zwei verschiedene untere Nachbar b und c von a. $\left(\text{sonst wäre } \frac{a}{n} \text{ nicht primär}\right)$. Da der Satz für b und c nach Induktionsannahme gilt, so gilt es auch für a.

Jedes irreduzible Element ist also ein Element aus einer maximalen Kette und umgekehrt. Ist $\mathfrak{B}$ eine direkte Vereinigung von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, so gilt $a = (a \cap e_1) \cup (a \cap e_2)$, wo e_1, e_2 Einselemente von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ sind. Jede Kette eines H^- Verbandes liegt also in einer seiner primären Komponenten. In einem H^- Verband werde die Gesamtheit derjenigen Elemente, welche als Vereinigung der irreduziblen Elemente von Dimension höchstens ν darstellbar sind, *ν-te Ableitung von* $\mathfrak{B}$ genannt, und werde mit $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ bezeichnet. Speziell sei $\mathfrak{B}^{(0)} = n$. Ist $\mathfrak{B}^{(n-1)} < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{B}$, so wird n die *Stufe von* $\mathfrak{B}$ genannt. Das einzige Element höchster Dimension in $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ sei $e^{(\nu)}$.

Satz 2. *$\mathfrak{B}^{(\nu)}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{B}$.*

Beweis durch Induktion nach ν. Es braucht beim Fall $\nu = 1$ nur zu zeigen, dass eine Kette der Dimension 2 nicht in $\mathfrak{B}^{(1)}$ enthalten ist. $e^{(1)} = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_l$ sei mit den Atomelementen a_i unverkürzbar dargestellt, und b ein irreduzibles Element der Dimension 2. Ist der untere Nachbar von b das Atomelement a_s, so erhält man $e^{(1)} = A_s \cup b$, $A_s \cap b = n$ mit $A_s = a_1 \cup \cdots \cup a_{s-1} \cup a_{s+1} \cdots \cup a_l$. Dann würde die Dimension von $e^{(1)}$ gleichzeitig l und $l+1$ sein, was der Modularität von $\mathfrak{B}$ widerspricht. Wenn keines unter a_i der untere Nachbar von b ist, so gibt es unter A_s, $s = 1, 2, \dots l$ mindestens ein solches, für welches $A_s \cup b = e^{(1)}$, $A_s \cap b = n$ gilt, was wieder einen Widerspruch ergibt. Beim Fall $\nu > 1$ genügt es nur zu beweisen, dass eine Kette $\frac{x}{n}$ von Dimension $\nu + 1$ nicht in $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ enthalten ist. Es ist $\frac{x \cup e^{(\nu-1)}}{e^{(\nu-1)}} \simeq \frac{x}{x \cap e^{(\nu-1)}}$, und $\frac{x \cup e^{(\nu-1)}}{e^{(\nu-1)}}$

ist dann nach Induktionsannahme eine Kette der Dimension 2 in $\frac{e}{e^{(\nu-1)}}$. Da andererseits $\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}$ die erste Ableitung von $\frac{e}{e^{(\nu-1)}}$ ist, so kann $e^{(\nu)}$ das Element x nicht enthalten. w. z. b. w.

Aus dem obigen Satz folgt nun, dass der Quotient $\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}$ ein komplementärer modularer Verband ist. Man ordne jedem Element a aus $\mathfrak{V}$ das Element $a^{(i)}=(a \frown e^{(i)}) \smile e^{(i-1)}$ in $\frac{e^{(i)}}{e^{(i-1)}}$ zu. Das System, das wir *Repräsentantensystem* von a nennen wollen, bestimmt nun das ursprüngliche Element a eindeutig. Ist nämlich $a^{(i)}=b^{(i)}$, $i=1, 2, \dots n$, so wird $a^{(n)}=b^{(n)}=a \smile e^{(n-1)}=b \smile e^{(n-1)}$ und sukzessiv erhält man die Relation $a \smile e^{(i-1)}=b \smile e^{(i-1)}$ aus $a \smile e^{(i)}=b \smile e^{(i)}$ wegen $(a \smile e^{(i-1)}) \frown e^{(i)}=(b \smile e^{(i-1)}) \frown e^{(i)}$, $(a \smile e^{(i-1)}) \smile e^{(i)}=(b \smile e^{(i-1)}) \smile e^{(i)}$. Man erhält somit schliesslich $a=b$. Bezeichnet man ferner mit $\gamma_i(a)$ die Dimension von $a^{(i)}$ in $\frac{e^{(i)}}{e^{(i-1)}}$, so wird $\mathrm{Dim}\,(a \frown e^{(i)})=\gamma_i(a)+\mathrm{Dim}\,(a \frown e^{(i-1)})$, und folglich $\mathrm{Dim}\, a=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(a)$. Setzt man ferner $\gamma_i(e)=\gamma_i$, so wird das System $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ *Invariant von* $\mathfrak{V}$ genannt.

Ist ein Element a in der Gestalt $a=a_1 \smile a_2 \smile \cdots \smile a_m$ mit den irreduziblen a_i unabhängig dargestellt, (d. h. mit den Relationen $(a_1 \smile \cdots a_{s-1} \smile a_{s+1} \cdots \smile a_m) \frown a_s=n$, $s=1, 2, \dots n$), so wird das System $(a_1, a_2, \dots a_m)$ *eine Basis von* a genannt.

Satz 3. *Sei das System* $(a_1, a_2, \dots a_m)$ *eine Basis des Einselements* e *von* $\mathfrak{V}$ *und* $a_1, a_2, \dots a_{m_\nu}$ *diejenigen unter den Basiskomponenten, deren Dimensionen nicht kleiner als* ν *sind.* $a_i \smile e^{(\nu-1)}$, $i=1, 2, \dots m_\nu$ *wird dann eine Basis von* $\frac{e}{e^{(\nu-1)}}$ *und* $a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)} \dots a_{m_\nu}^{(\nu)}$ *eine Basis von* $\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}$ *mit* $m_\nu=\gamma_\nu$. *Die Anzahl der Basiskomponenten gleicher Dimension ist folglich invariant gegenüber der Wahl der Basis.*

Zuerst bestätigen wir, dass $a_i^{(\nu)}$, $i=1, 2, \dots m_\nu$ in $\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}$ unabhängig sind. Man bezeichne mit b_i das in $\frac{a_i}{n}$ enthaltene Element der Dimension ν, und setze $B_s=b_1 \smile \cdots \smile b_{s-1} \smile b_{s+1} \cdots \smile b_{m_\nu}$. Wäre $a_s^{(\nu)} \leqq a_1^{(\nu)} \smile \cdots a_{s-1}^{(\nu)} \smile a_{s+1}^{(\nu)} \cdots \smile a_{m_\nu}^{(\nu)}$, so würde $B_s \smile b_s \leqq B_s \smile e^{(\nu-1)}$. Wegen der Relationen $\frac{B_s \smile b_s}{B_s} \simeq \frac{b_s}{n}$ und $\frac{B_s \smile e^{(\nu-1)}}{B_s} \simeq \frac{e^{(\nu-1)}}{B_s \frown e^{(\nu-1)}}$ würde dann $\frac{b_s}{n}$ isomorph zu einer D-Hülle von $\frac{e^{(\nu-1)}}{B_s \frown e^{(\nu-1)}}$ sein. Da es aber nach Satz 2 keine Kette der Dimension ν in $e^{(\nu-1)}$ gibt, so sind $a_i^{(\nu)}$ in $\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}$ unabhängig. Da hiermit $\mathrm{Dim}\,\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}} \geqq m_\nu$, $\mathrm{Dim}\, e=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{Dim}\,\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}$ gilt, so hat man $\mathrm{Dim}\,\frac{e^{(\nu)}}{e^{(\nu-1)}}=\gamma_\nu=m_\nu$. Da ferner $\mathrm{Dim}\,\frac{e}{e^{(\nu-1)}}=\sum_{i=r}^{n} m_i=$

$\sum \mathrm{Dim}\ \frac{a_i \cup e^{(\nu-1)}}{e^{(\nu-1)}}$ gilt, so sind $a_i \cup e^{(\nu-1)}$, $i=1,2,\dots m_\nu$ in $\frac{e}{e^{(\nu-1)}}$ unabhängig.

Satz 4. *Wenn das Einselement eines P^- Verbandes eine Basis hat, und wenn die Dimensionen ihrer Komponenenten sämtlich nicht kleiner als ν sind, so ist jede maximale Kette in $\mathfrak{V}$ mindestens von ν-ter Dimension.*

Ist $\lambda < \nu$, so sind die Dimensionen aller Komponenten a_i, $i=1,2,\dots s$ der Basis des Quotienten $\frac{e^{(\lambda+1)}}{e^{(\lambda-1)}}$ gleich 2. Gäbe es eine maximale Kette $\frac{b}{n}$ der Dimension λ mit $\lambda<\nu$ in $\mathfrak{V}$, so würde die 1-dimensionale maximale Kette $\frac{b\cup e^{(\lambda-1)}}{e^{(\lambda-1)}}$ in $\frac{e^{(\lambda+1)}}{e^{(\lambda-1)}}$ enthalten sein. Im Fall $s=2$ sei $\frac{e^{(\lambda+1)}}{e^{(\lambda-1)}}=a_1\cup a_2$, $a_1\cap a_2=e^{(\lambda-1)}$. Die erste Ableitung von $\frac{e^{(\lambda+1)}}{e^{(\lambda-1)}}$ hat nun die Dimension 2. Dann gibt es mindestens einen oberen Nachbar c von b, der vom Einselement der Ableitung verschieden ist. Es gälte nun $c=b\cup d$ mit einem Element d aus der ersten Ableitung, was aber einen Widerspruch ergibt. Im Fall $s>2$ beweist man durch Induktion nach s. Ist nämlich $\frac{e^{(\lambda+1)}}{e^{(\lambda-1)}}=A\cup a_s$ mit $A=a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_{s-1}$, so ist b nach Induktionsannahme nicht in A enthalten. Folglich gilt $b\cap A =e^{(\lambda-1)}$, $b\cap a_s=e^{(\lambda-1)}$. Setzt man ferner $(b\cup a_s)\cap A=d$, so wird $\mathrm{Dim}\ d=1$ in bezug auf $e^{(\lambda-1)}$, und $b\cup a_s=d\cup a_s$ wegen der Relationen $\mathrm{Dim}\ \frac{e^{(\lambda+1)}}{e^{(\lambda-1)}}=2s$, $\mathrm{Dim}\ A=2(s-1)$, $\mathrm{Dim}\ (b\cup a_s)=3$. Ferner gibt es nach Induktionsannahme eine Kette $\frac{c}{e^{(\lambda-1)}}$ der Dimension 2 in A, die das Element d enthält. Der Quotient $\frac{c\cup a_s}{e^{(\lambda-1)}}$ hätte nun die Basis c, a_s und die 1-dimensionale maximale Kette $\frac{b}{e^{(\lambda-1)}}$, was aber nicht der Fall ist.

Satz 5. *Jedes Element aus einem H^- Verband hat eine Basis.*

Man braucht es zu bestätigen nur für das Einselement e einer primären Komponenten $\mathfrak{V}$ des Verbandes. Sei a_1 das Einselement einer maximalen Kette in $\mathfrak{V}$ mit höchster Dimension, so gibt es eine andere mit $\frac{a_1}{n}$ unabhängige maximale Kette $\frac{a_2}{n}$. Denn es gibt mindestens zwei Atomelemente in $\mathfrak{V}$. Mit $a_1, a_2, \dots a_\nu$ wähle man sukzessiv $a_{\nu+1}$ derart, dass die Kette $\frac{a_{\nu+1}}{n}$ mit $a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_\nu$ unabhängig und von höchster Dimension ist. Dass man wirklich im Fall $A_\nu=a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_\nu<c$ eine solche maximale Kette $\frac{a_{\nu+1}}{n}$ wählen kann, beweist man folgendermassen.

Sei $\frac{b_{\nu+1}}{n}$ eine maximale Kette in $\mathfrak{V}$, die in A_ν nicht enthalten ist, und $A_\nu \frown b_{\nu+1} = d_{\nu+1} > n$. $\dfrac{e_{\nu+1}}{n}$ sei ferner eine maximale Kette höchster Dimension in A_ν, die $d_{\nu+1}$ enthält. Dann wird $e_{\nu+1} > d_{\nu+1}$. Denn, wäre $e_{\nu+1} = d_{\nu+1}$, so würde $\mathrm{Dim}\, e_{\nu+1} = \mathrm{Dim}\, d_{\nu+1} < \mathrm{Dim}\, b_{\nu+1}$ wegen $b_{\nu+1} > d_{\nu+1}$. Da ferner $\mathrm{Dim}\, a_1 \geqq \mathrm{Dim}\, b_{\nu+1}$ ist, so wird nach Satz 4 $\mathrm{Dim}\, a_1 > \mathrm{Dim}\, e_{\nu+1} \geqq \mathrm{Dim}\, a_\nu$. $\mu = \mathrm{Dim}\, e_{\nu+1}$ gesetzt, gibt es dann ein a_p unter a_i, $i = 1, 2, \dots \nu$ derart, dass $\mathrm{Dim}\, a_p > \mu$, $\mathrm{Dim}\, a_{p+1} \leqq \mu$. Da $\mathrm{Dim}\, a_i > \mu$, $i = 1, 2, \dots p$ ist, so gilt nach Satz 4 $(a_1 \smile a_2 \smile \cdots \smile a_p) \frown e_{\nu+1} = n$. Das Atomelement g in $\dfrac{d_{\nu+1}}{n}$ ist dann nicht in $a_1 \smile a_2 \smile \cdots \smile a_p$ enthalten und folglich $(a_1 \smile a_2 \smile \cdots \smile a_p) \frown b_{\nu+1} = n$ mit $\mathrm{Dim}\, b_{\nu+1} > \mu$, was aber der Relation $\mathrm{Dim}\, a_{p+1} \leqq \mu$ widerspricht. $c_{\nu+1}$ sei nun der in $\dfrac{b_{\nu+1}}{n}$ enthaltene obere Nachbar von $d_{\nu+1}$. Dann wird $\dfrac{e_{\nu+1} \smile c_{\nu+1}}{n}$ keine Kette. $\dfrac{e_{\nu+1} \smile c_{\nu+1}}{n}$ hat somit ein von g verschiedenes Atomelement h und $h \smile e_{\nu+1} = c_{\nu+1} \smile e_{\nu+1}$ ist in A_ν nicht enthalten. Es ist also notwendig $h \frown A_\nu = n$. Die das Element h enthaltende maximale Kette in $\mathfrak{B}$ dient also zur $\nu+1$ -ten Basiskomponenten $a_{\nu+1}$.