106. Über die masstreuen Abbildungen vom Mischungstypus im weiteren Sinne.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

1. In der vorliegenden Note sollen einige Eigenschaften der masstreuen Abbildungen vom Mischungstypus im weiteren Sinne mengentheoretisch begründet werden.

Es sei Ω ein abstrakter Raum, $\boldsymbol{B}$ ein Borelscher Mengenkörper der Teilmengen von Ω und m ein vollständig-additives Mass auf $\boldsymbol{B}$ mit $m(\Omega)=1$. Im folgenden bezeichnen wir solchen Raum mit $(\Omega, \boldsymbol{B}, m)$ und nennen ihn ein Massraum. T sei eine masstreue Abbildung von Ω, d. h. eine eineindeutige Abbildung von Ω auf sich, so dass TE und $T^{-1}E \in \boldsymbol{B}$ und $m(E)=m(TE)$ für jedes $E \in \boldsymbol{B}$ gilt.

T heisst *ergodisch*, falls aus $m(E \ominus TE)=0$[1] $(E \in \boldsymbol{B})$ entweder $m(E)=0$ oder $m(E)=1$ folgt. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden äquivalent:

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c_E(T^k\omega)=m(E)$$

fast überall auf Ω für jedes $E \in \boldsymbol{B}$, wobei $c_E(\omega)$ die charakteristische Funktion von E bedeutet; oder aber, für jede $A, B \in \boldsymbol{B}$

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m(T^kA \frown B)=m(A)m(B)\,.$$

T heisst *vom Mischungstypus im weiteren Sinne*, falls für jede $A, B \in \boldsymbol{B}$

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\, m(T^kA \frown B)-m(A)m(B)\,|^2=0$$

gilt. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden äquivalent: für jede $A, B \in \boldsymbol{B}$ gibt es eine Teilmenge $\{n'\}$ von $\{n\}$ mit der Dichte 1, so dass

$$(4)\qquad \lim_{n'\to\infty} m(T^{n'}A \frown B)=m(A)m(B)$$

gilt.[2]

Nun sei $(\Omega', \boldsymbol{B}', m')$ ein anderer Massraum und T' eine masstreue Abbildung auf Ω'.

$$\bar{\Omega}=\{\bar{\omega}=(\omega, \omega')\,;\ \omega \in \Omega,\ \omega' \in \Omega'\}=\Omega \times \Omega'$$

sei das Produktraum von Ω und Ω', $\bar{\boldsymbol{B}}$ sei der kleinste Borelsche Mengenkörper, der $E \times E'=\{\bar{\omega}=(\omega, \omega')\,;\ \omega \in E,\ \omega' \in E'\}$ $(E \in \boldsymbol{B},\ E' \in \boldsymbol{B}')$ enthält, und $\bar{m}=m \times m'$ sei das Produktmass von m und m', d. h. ein

---

1) $\ominus$ bedeutet die symmetrische Differenz: $A \ominus B = A \smile B - A \frown B$.

2) Vgl. etwa E. Hopf, Ergodentheorie, (1937).

vollständig-additives Mass auf $\overline{\boldsymbol{B}}$ mit $\overline{m}(E\times E')=m(E)\cdot m'(E')$. Wir definieren eine masstreue Produktabbildung $\overline{T}=T\times T'$ auf $\overline{\Omega}$ durch

$$\overline{T}(\omega,\omega')=(T\omega, T'\omega').$$

Satz 1. Dafür dass eine masstreue Abbildung T auf $(\Omega, \boldsymbol{B}, m)$ vom Mischungstypus im weiteren Sinne ist, ist es notwendig und hinreichend, dass für beliebige ergodische masstreue Abbildung T' auf jedem Massraum $(\Omega' \boldsymbol{B}', m')$ die Produktabbildung $\overline{T}=T\times T'$ auf dem Produktmassraum $(\overline{\Omega}, \overline{\boldsymbol{B}}, \overline{m})$ ergodisch ist.[1]

Satz 2. Dafür dass eine masstreue Abbildung T auf $(\Omega, \boldsymbol{B}, m)$ vom Mischungstypus im weiteren Sinne ist, ist es notwendig und hinreichend, dass für jedes $E\in\boldsymbol{B}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\lambda}c_E(T^k\omega)=\begin{cases}m(E), & \textit{falls } \lambda\equiv 0 (\text{mod. } 2\pi),\\ 0, & \textit{falls } \lambda\not\equiv 0 (\text{mod. } 2\pi),\end{cases}\tag{5}$$

fast überall auf Ω gilt; oder aber, für jede $A, B\in\boldsymbol{B}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\lambda}m(T^kA\frown B)=\begin{cases}m(A)m(B), & \textit{falls } \lambda\equiv 0 (\text{mod. } 2\pi),\\ 0, & \textit{falls } \lambda\not\equiv 0 (\text{mod. } 2\pi),\end{cases}\tag{6}$$

gilt.[2]

Diese Sätze stehen im engen Zusammenhang mit der Theorie des Kollektivs von v. Mises und K. Dörge.

2. Wir beweisen nun, (I) dass die Bedingung im Satz 1 notwendig ist; (II) dass die Relation (5) aus der Bedingung im Satz 1 folgt; (III) dass die Relation (6) dafür hinreichend ist, dass T vom Mischungstypus im weiteren Sinne ist.

(I). Es wäre $\overline{T}$ nicht ergodisch, d. h. es gäbe eine Menge $\overline{E}\in\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{m}(\overline{E})=c$, $c\neq 1$, $c\neq 0$ mit

$$\overline{m}(\overline{T}\overline{E}\ominus\overline{E})=0.\tag{7}$$

Wir bezeichnen für $\omega'\in\Omega'$ $(\overline{E})_{\omega'}=\{\omega;\ (\omega,\omega')\in\overline{E}\}$. Nach dem Satz von Fubini gehört $(\overline{E})_{\omega'}$ zu $\boldsymbol{B}$ für alle ω' und es gilt

$$c=\overline{m}(\overline{E})=\int_{\Omega'}m\big((\overline{E})_{\omega'}\big)m'(d\omega').\tag{8}$$

Es gilt dann

$$m\big((\overline{E})_{\omega'}\big)=c \qquad \text{fast überall auf } \Omega' \text{ in bezug auf } m'\text{-Mass.}\tag{9}$$

Denn andernfalls gäbe es ein $\varepsilon>0$, so dass $m'(A')>0$ mit $A'=\big\{\omega';\ m\big((\overline{E})_{\omega'}\big)>c+\varepsilon\big\}$ und $m'(B')>0$ mit $B'=\big\{\omega';\ m\big((\overline{E})_{\omega'}\big)<c+\varepsilon\big\}$

1) Vgl. E. Hopf, loc. cit. Dort wird der symmetrische Produktraum behandelt. Vgl. auch P. Hartman und A. Wintner, Statistical independence and statistical equibrium, Amer. Journ. of Math., **62** (1940), 646–654.

2) Satz 2 ist im Wesentlichen von E. Hopf, On causality, statistics and probability, Journ. of Math. and Phy., **13** (1934), 51–102, bewiesen. Hier beweisen wir ihn als Korollar des Satzes 1.

gilt. Da T' ergodisch ist, gibt es eine ganze Zahl n mit $m'(T'^n A' \frown B') > 0$, also folgt aus (8)

$$\overline{m}(T^n \overline{E} \ominus \overline{E}) \geqq \int_{\Omega'} \left| m\big((\overline{E})_{\omega'}\big) - m\big((T^n \overline{E})_{\omega'}\big)\right| m'(d\omega') > 2\varepsilon m'(T'^n A' \frown B') > 0,$$

was der Annahme (7) widerspricht.

Nach der Definition von $\overline{B}$ gibt es für $\overline{E} \in \overline{B}$ und für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ $E_i \in B$, $E_i' \in B'$ $(i=1, \dots, r)$ mit $E_i' \frown E_j' = 0$ $(i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^r E_i' = \Omega'$, so dass

$$(10) \qquad \overline{m}(\overline{E} \ominus \overline{E}_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{für} \quad \overline{E}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^r E_i \times E_i'$$

gilt. Für solches $\overline{E}_\varepsilon$ ist

$$\varepsilon > \overline{m}(\overline{E} \ominus \overline{E}_\varepsilon) = \int_{\Omega'} m\big((\overline{E} \ominus \overline{E}_\varepsilon)_{\omega'}\big) m'(d\omega') \geqq \sum_{i=1}^r |\, m(E_i) - c \,| \cdot m'(E_i'),$$

also gilt für $d > 0$.

$$(11) \qquad \sum_{m(E_i) \geq c+d} m'(E_i') \leqq \varepsilon \cdot d^{-1}$$

Es gilt auch nach (7) und (10)

$$(12) \quad \overline{m}(T^n \overline{E}_\varepsilon \ominus \overline{E}_\varepsilon) \leqq \overline{m}(T^n \overline{E}_\varepsilon \ominus T^n \overline{E}) + \overline{m}(\overline{E}_\varepsilon \ominus \overline{E}) = 2\overline{m}(\overline{E}_\varepsilon \ominus \overline{E}) \leqq 2\varepsilon.$$

Da T nach unserer Voraussetzung vom Mischungstypus im weiteren Sinne ist, gibt es für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl n, so dass

$$(13) \qquad |\, m(T^n E_i \frown E_j) - m(E_i) \cdot m(E_j) \,| < \varepsilon/2 \quad (i, j = 1, \dots, r)$$

gilt. Daraus folgt

$$(14) \qquad \begin{aligned} m(T^n E_i \ominus E_j) &= m(E_i) + m(E_j) - 2m(T^n E_i \frown E_j) \\ &\geqq m(E_i) + m(E_j) - 2m(E_i) m(E_j) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir setzen $E_{ij}' = T'^n E_i' \frown E_j'$, $a_{ij} = m'(E_{ij}')$ $(i, j = 1, \dots, r)$, dann ist

$$(15) \quad \begin{cases} E_{ij}' \frown E_{kl}' = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \quad \text{oder } j \neq l, \\ E_j' = \bigcup_{i=1}^r E_{ij}', \quad T'^n E_i' = \bigcup_{j=1}^r E_{ij}', \\ \sum_{i,j=1}^r a_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^r a_{ij} = m'(E_j'), \quad \sum_{j=1}^r a_{ij} = m'(T'^n E_i') = m'(E_i'). \end{cases}$$

Aus (14), (15) ergibt sich

$$(16) \quad \begin{aligned} \overline{m}(T^n \overline{E}_\varepsilon \ominus \overline{E}_\varepsilon) &= \overline{m}\Big(\bigcup_{i,j=1}^r \big((T^n E_i \ominus E_j) \times E_{ij}'\big)\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^r m(T^n E_i \ominus E_j) \cdot m'(E_{ij}') \geqq \sum_{i,j=1}^r m(E_i) m'(E_{ij}') \\ &+ \sum_{i,j=1}^r m(E_j) m'(E_{ij}') - 2\sum_{i,j=1}^r m(E_i) m(E_j) \cdot m'(E_{ij}') - \varepsilon \\ &= 2\Big(\sum_{i=1}^r m(E_i) m'(E_i') - \sum_{i,j=1}^r m(E_i) m(E_j) \cdot m'(E_{ij}')\Big) - \varepsilon \end{aligned}$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung folgt aus (11)

$$(17)\quad \sum_{i,j=1}^{r} m(E_i)m(E_j)a_{ij} \leqq \left(\left(\sum_{i,j=1}^{r} m(E_i)^2 a_{ij}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{r} m(E_j)^2 a_{ij}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} m(E_i)^2 m'(E'_i) \leqq \sum_{m(E'_i) \geqq c+d} m(E_i)m'(E'_i)$$
$$+(c+d)\sum_{m(E'_i) \leqq c+d} m(E_i)m'(E'_i)$$
$$\leqq (c+d)\sum_{i=1}^{r} m(E_i)m'(E'_i) + (1-c-d)\varepsilon \cdot d^{-1}$$

Wir setzen nun $c+2d=1$ und $7\varepsilon < c(1-c)$. Dann folgt aus (12), (16), (17)

$$\overline{m}(\overline{T}^n \overline{E}_\varepsilon \ominus \overline{E}_\varepsilon) \geqq 2\left(d\sum_{i=1}^{r} m(E_i)m'(E'_i) - (1-c-d)\frac{\varepsilon}{d}\right) - \varepsilon$$
$$= 2\left(d\overline{m}(\overline{E}_\varepsilon) - \varepsilon\right) - \varepsilon \geqq (1-c)(c-\varepsilon) - 3\varepsilon \geqq c(1-c) - 4\varepsilon \geqq 3\varepsilon\,,$$

was mit (12) in Widerspruch steht. Also muss $\overline{T}$ ergodisch sein.

3. (II) T sei eine masstreue Abbildung vom Mischungstypus im weiteren Sinne. (i) λ sei eine irrationale Zahl. Es sei Ω' die Gesamtheit aller reellen Zahlen mod. 1, $\boldsymbol{B}'$ die Gesamtheit aller Borelschen Mengen und m' das gewöhnliche Lebesguesche Mass. Die masstreue Abbildung $T'\omega' = \omega' + \lambda$ (mod. 1) ist bekanntlich ergodisch. Nach Satz 1 ist also die masstreue Abbildung $\overline{T} = T \times T'$ auf $\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega'$ auch ergodisch.

Es sei $f(\omega) \in L^1(\Omega)$. Wir definieren dann $F(\overline{\omega}) = e^{i\omega'} f(\omega) \in L^1(\overline{\Omega})$. Da $F(\overline{T}\overline{\omega}) = e^{i(\omega'+\lambda)} f(T\omega)$ ist, ergibt sich aus dem individuellen Ergodensatz[1)]

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\overline{T}^k \overline{\omega}) = e^{i\omega'} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} f(T^k\omega) = \int_{\overline{\Omega}} F(\overline{\omega})\overline{m}(d\overline{\omega})$$
$$= \int_{\Omega} f(\omega)m(d\omega) \cdot \int_{\Omega'} e^{i\omega'} m'(d\omega') = 0$$

für fast alle $\overline{\omega}$ auf $\overline{\Omega}$. Nach dem Satz von Fubini gibt es also sicher ein ω', so dass für fast alle $\omega \in \Omega$ (*) gilt. Wir haben also (5).

(ii) λ sei nun eine rationale Zahl: $\lambda = \dfrac{s}{r}$. Da T eine masstreue Abbildung vom Mischungstypus im weiteren Sinne ist, ist T^r auch ergodisch. Also ergibt sich aus dem Ergodensatz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} f(T^k\omega) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} e^{i\frac{l}{r}s} \int_{\Omega} f(T^l\omega)m(d\omega)$$
$$= \frac{1}{r}\left(\sum_{l=0}^{r-1} e^{i\frac{l}{r}s}\right) \cdot \int_{\Omega} f(\omega)m(d\omega) = 0$$

fast überfall auf Ω, und wir haben auch in diesem Falle die Relation (5).

(6) folgt aus (5) nach der Integration auf B.

4. (III). Dieser Teil des Beweises ist im Wesentlichen von E. Hopf gegeben.[2)] Wir geben ihn hier wieder wegen der Vollständigkeit.

---

1) Vgl. etwa E. Hopf, loc. cit.

2) E. Hopf, loc. cit. 2), S. 519.

Es sei $f(\omega)$ endlichwertige messbare Funktion auf Ω, dann ist die Folge $\{a_k\}$ mit

$$a_k=\int_\Omega f(T^k\omega)\cdot\overline{f(\omega)}m(d\omega)$$

positiv-definit. Daher gibt es eine beschränkte monoton-nicht-abnehmende Funktion $v(t)$ $(-\pi\leqq t\leqq\pi)$, so dass

$$a_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}dv(t)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\dots)\tag{18}$$

gilt. Setzen wir $\bar{v}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}v(t-s)\cdot dv(s)$, so ist

$$|a_k|^2=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}d\bar{v}(t)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\dots).\tag{19}$$

Bekanntlich gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a_k e^{ikt}=v(t+0)-v(t-0)\tag{20}$$

Also folgt aus (6)

$$v(t+0)-v(t-0)=\begin{cases}\left|\int_\Omega f(\omega)m(d\omega)\right|^2 & \text{für } t=0,\\ 0 & \text{für } t\neq0\end{cases}$$

Mithin gilt $\bar{v}(+0)-\bar{v}(-0)=\left|\int_\Omega f(\omega)m(d\omega)\right|^4$, und folglich aus (19) und (20) für $t=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^2=\left|\int_\Omega f(\omega)m(d\omega)\right|^4,\tag{21}$$

Aus (6) und (21) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_\Omega f(T^k\omega)\overline{f(\omega)}m(d\omega)-\left|\int_\Omega f(\omega)m(d\omega)\right|^2\right|^2=0,$$

woraus folgt, wie üblich, die Realtion (3), w.z.b.w.