130. *Sur la métrique riemannienne et l'élément de volume dans les espaces de groupes de Lie.*

Par Makoto ABE.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

§ 1. On sait qu'il existe dans l'espace d'un groupe de Lie G au moins une métrique riemannienne invariante par le premier et le second groupes des paramètres, lorsque G est semi-simple et clos (compact). La même chose arrive evidemment, quand G est un groupe commutatif. Nous allons faire voir dans le prochain § 2 que ces deux types de groupes sont essentiellement les seuls jouissant de cette propriété.

Nous considérerons ensuite dans le § 3 le problème correspondant au sujet du volume invariant dans G.

D'autre part, à un groupe de Lie quelconque G on peut attacher deux connexions affines au parallélisme absolu et, en général, avec torsion, en prenant pour transports parallèles les transformations de l'un ou l'autre groupe des paramètres[1]. Ces deux connexions définissent les mêmes géodésiques, à savoir, les sous-groupes à un paramètre du groupe G ou leurs transformés par les transformations du (premier) groupe des paramètres. A côté de ces deux connexions affines, il y en a une troisième, comportant les mêmes géodésiques, mais qui est sans torsion et, en général, avec courbure[2]. C'est précisément cette connexion, que définissent les métriques riemanniennes dans les groupes du type considéré dans § 2. Nous allons enfin déterminer complètement dans le dernier § 4 le type des groupes, dont la connexion affine sans torsion peut être définie par une métrique riemannienne.

§ 2. Soit G un groupe de Lie connexe. Une métrique riemannienne, qui se conserve par toutes les transformations du premier groupe des paramètres est complètement déterminée, dès qu'elle est définie à l'élément unité ; il suffit de la transporter au point arbitraire de G au moyen de la transformation du groupe des paramètres[3].

1) E. Cartan: La géométrie des groupes de transformations, J. de math. (9) VI (1927), p. 1–119. Chap. II.

2) E. Cartan: l. c. Chap. III.

3) Cela peut être exprimé analytiquement de la manière suivante: Soit O l'élément unité, P le point infiniment voisin de O, représenté par une transformation infinitésimale $\sum e^i X_i$. Une métrique soit définie au voisinage de O par

$$\overline{OP}^2=\varphi(e)=\sum g^0_{ij} e^i e^j.$$

Désignons maintenant par $\sum \omega^i X_i$ la transformation infinitésimale $S_a^{-1} S_{a+da}$, où ω^i sont des formes de Pfaff des paramètres du groupe $a^1, \cdots\cdots, a^r$, leurs coefficients étant fonctions des a^i. Si l'on transporte la métrique $\varphi(e)$, définie au point O, au point arbitraire S_a de G, la distance entre deux points infiniment voisins S_a et S_{a+da} sera donnée par

$$\overline{S_a S_{a+da}}^2=\varphi(\omega)=\sum g^0_{ij}\omega^i\omega^j=\sum g_{ij}(a) da^i da^j ;$$

ainsi se détermine $g_{ij}(a)$ au point arbitraire de G.

Pour qu'elle soit aussi invariante par le second groupe des paramètres, il faut et il suffit qu'elle soit invariante par le groupe adjoint Γ de G. Une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe G admette une métrique riemannienne invariante par l'un et l'autre groupes des paramètres, est donc que *le groupe adjoint linéaire* Γ[4] *laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive,* ou encore, que Γ soit un groupe linéaire clos[5].

Désignons maintenant par G^* l'algèbre de Lie (ou le groupe infinitésimal) associée au groupe fini G. Soient R son radical (le plus grand sous-groupe invariant intégrable) et R' l'algèbre dèrivée de R:

$$G^* \supset R \supset R' \supset (0).$$

Γ est un groupe linéaire, opérant dans l'espace linéaire G^* et laissant invariants les sous-espaces R et R'. Supposons maintenant que Γ laisse invariante une forme quadratique définie; Γ est alors complètement réductible. On a par suite les décompositions de G^* et de R en somme directe des sous-espaces invariants:

$$G^* = S + R, \qquad R = C + R'.$$

S est un idéal semi-simple et C un idéal commutatif de G^*. De la deuxième identité, il résulte

$$R' = C' + R'' = R''.$$

Mais, R' étant intégrable, cela n'est possible que si R' se réduit à (0). G^* est donc la somme directe d'une algèbre semi-simple S et une algèbre commutative C:

$$G^* = S + C. \tag{1}$$

L'algèbre de Lie Γ^* associée au groupe adjoint Γ est donc isomorphe à S; S est par suite l'algèbre d'un groupe semi-simple *clos*. Réciproquement, si G^* a cette structure, Γ est un groupe (semi-simple) clos, et, par conséquent, il laisse invariante une forme quadratique définie (Théorème de H, Weyl)[6].

En résumé, on a obtenu

Théorème 1. *Pour qu'un groupe de Lie G admette une mêtrique riemannienne invariante par le premier et le second groupes des paramètres, il faut et il suffit que G soit localement le produit direct d'un groupe semi-simple clos et un groupe commutatif.* Cette condition s'exprime aussi de la manière suivante: que *G soit* (*globalement*) *le*

---

4) A savoir, le groupe des automorphies intérieures $S_{x'} = S_a S_x S_a^{-1}$ considérés comme substitutions linéaires opérant dans l'algèbre de Lie G^* associée à G.

5) Si le groupe linéaire Γ laisse invariante une forme quadratique définie, Γ est un sous-groupe fermé d'un groupe orthogonal; il est donc clos. Réciproquement, si Γ est clos, il laisse invariante, par exemple, la forme suivante

$$\int [(Sx_1)^2 + \cdots + (Sx_n)^2] dS$$

où $x_1, \cdots\cdots, x_n$ sont les variables transformés par Γ et l'intégrale est étendue à toute la variété du groupe Γ (Théorème de H. Weyl).

6) Voir la note précédente 5).

produit direct d'un groupe clos K et le groupe V des translations de l'espace euclidien à une certaine dimension :

$$G = K \times V \tag{2}$$

Remarque 1. M. H. Freudenthal a démontré un théorème[7], qui peut s'énoncer ainsi pour un groupe de Lie :

Pour qu'un groupe de Lie admette une métrique (pas nécessairement riemannienne) invariante par le premier et le second groupes des paramètres, il faut et il suffit que le groupe G ait la forme (2).

Ce théorème implique la nécessité de la condition dans notre théorème comme un cas particulier. Combinant ce théorème avec le nôtre, on peut faire la remarque suivante :

Si un groupe de Lie G admet une métrique invariante, il admet aussi une métrique riemannienne invariante.

Remarque 2. Si l'on n'exige pas que la forme métrique fondamentale soit *définie positive*, on arrivera également au groupe produit direct d'un groupe commutatif et un groupe semi-simple, mais ce dernier ne sera pas nécessairement clos.

§ 3. Le même problème se pose aussi pour l'élément de volume défini dans l'espace du groupe G. D'une considération tout à fait analogue à celle dans le numéro précédent, il résulte :

Pour qu'on puisse définir dans l'espace du groupe G un élément de volume invariant par l'un et l'autre groupes des paramètres, il faut et il suffit que *toutes les substitutions linéaires du groupe adjoint Γ soient de déterminant* 1 (*ou toutes les transformations infinitésimales de Γ soient de trace* 0)[8].

Si Γ est identique à son propre groupe dérivé Γ', la condition est evidemment remplie ; c'est ce qui se produit en particulier au cas d'un groupe semi-simple. Il en est de même pour un groupe nilpotent[9] (groupe de rang zéro), puisque toutes les transformations infinitésimales du groupe adjoint d'un tel groupe ont toutes les racines caractéristiques égales à 0 et, à plus forte raison, les traces égales à 0.

Revenons maintenant au cas général. D'après un théorème dû à E. E. Levi[10], l'algèbre de Lie G^* associée au groupe G est la somme directe d'une sous-algèbre (qui n'est pas nécessairement un idéal) semi-simple S et le radical R de G^* :

$$G^* = S + R .$$

Soient Γ^* l'algèbre de Lie linéaire associée au groupe linéaire Γ; Σ et P les sous-algèbses de Γ^* correspondant respectivement à S et à R. Les substitutions linéaires de Σ sont toutes de trace 0 ; on le

---

7) H. Freudenthal : Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen, Annals of math. (2) **37** (1936), p. 57–77.

8) E. Cartan : l. p. c. 47. La même condition y est déduite analytiquement

9) Un groupe est *nilpotent*, si les crochets $(\cdots((U_1U_2)U_3)\cdots U_{c+1})$ formés d'un certain nombre des transformations infinitésimales sont toujours 0. On appelle (d'après P. Hall) le plus petit nombre c de cette nature la *classe* de ce groupe.

10) Voir p. ex. J. H. C. Whitehead : On the decomposition of an infinitesimal group, Proc. Cambridge Phil. Soc. **32** (1936) p. 229–237.

déduit facilement du fait, que S est identique à sa propre algèbre dérivée. D'autre part, les substitutions de P opèrent dans G^*/R comme transformation nulle; elles seront donc de trace 0 comme substitutions de l'espace entière G^*, si elles induisent des substitutions de trace 0 dans le sous-espace invariant R. D'où l'on obtient

Théorème 2. *Pour qu'un groupe de Lie admette un volume invariant par l'un et l'autre groupes des paramètres, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour le radical de ce groupe.*

La question est ainsi ramenée au cas d'un groupe *intégrable.*

Envisageons donc de plus près l'algèbre intégrable R. Désignons par R' son algèbre dérivée et par $X_1, X_2, \cdots, X_s$ les éléments linéairement indépendents de R n'appartenant pas à R' :

$$R=(X_1)+\cdots+(X_s)+R'.$$

Les substitutions opérant sur R correspondant aux éléments de R' sont évidemment de trace 0. Il ne reste donc qu'à examiner si X_i induisent dans R' des substitutions de trace 0. Or, R/R' est une algèbre commutative et par suite X_i sont des substitutions nulles dans R/R' ; X_i seront donc de trace 0 comme substitutions de R, s'ils le sont comme celles de R'. La condition que les substitutions du groupe adjoint de R soient de trace 0, est enfin réduite à la condition suivante:

Que $X_1, \cdots, X_s$ soient, considérés comme opérant dans l'espace linéaire R', tous de trace 0.

§ 4. Considérons maintenant l'espace à connexion affine sans torsion E attaché à un groupe de Lie G[11]. Un vecteur infiniment petit issu du point origine est représenté par une transformation infinitésimale X du groupe G. Si l'on transporte par parallélisme ce vecteur le long d'un parallélogramme élémentaire, dont les deux côté sont deux vecteurs infiniment petits U et V issus de ce point, la variation géométrique de ce vecteur X serait égale à $\frac{1}{4}\big((UV)X\big)$[12]. On en déduit immédiatement, que le *groupe d'holonomie* de l'espace E transforme les vecteurs comme le groupe dérivé Γ' du groupe adjoint Γ de G[13].

Or, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace à connexion affine sans torsion soit un espace de Riemann, est evidemment, que son groupe d'holonomie laisse invariante au moins une forme quadratique définie. Notre problème est donc ramené au problème algébrique suivant:

Pour quel type de groupe G, le groupe dérivé Γ' du groupe adjoint Γ, laisse-t-il invariante une forme quadratique définie?

On voit facilement que les groupes du type considéré dans § 2, et en particulier, les groupes semi-simples clos satisfont à cette condition. Il en est de même pour les groupes *affinement plats,* c'est-a-dire les groupes tels, que les espaces à connexion affine sans torsion attachés

11) E. Cartan: l. c. Chap. III.
12) E. Cartan: l. c. p. 65.
13) E. Cartan: l. c. p. 77.

à ces groupes soient les espaces affines ordinaires. Les groupes G de ce type se caractérisent par la propriété que leurs groupes d'holonomie se réduisent à l'opération identique, ou encore, que tous les crochets $\big((UV)X\big)$ formés de trois transformations quelconques U, V, X de G soient identiquement nuls. Les groupes affinement plats ne sont donc autres que les groupes nilpotents de classe $\leqq 2$.

Revenons maintenant au cas général et démontrons

Théorème 3. *Soit E l'espace à connexion affine sans torsion attaché à un groupe de Lie G. Pour que E soit un espace de Riemann, il faut et il suffit que G soit localement le produit direct d'un groupe semi-simple clos et un groupe affinement plat.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante par ce qui précède. Supposons réciproquement que E soit un espace de Riemann. Le groupe dérivé Γ' du groupe adjoint Γ laisse alors une forme quadratique définie invariante; il est par suite complètement réductible. Désignons par G^* l'algèbre de Lie associée à G et par $G^{*\prime}$ son algèbre dérivée. Le groupe adjoint de $G^{*\prime}$ est le groupe Γ', considéré comme opérant dans le sous-espace $G^{*\prime}$ de G^*; il laisse donc aussi une forme quadratique définie (en variables de $G^{*\prime}$) invariante. La considération dans § 2 montre, que $G^{*\prime}$ est alors la somme directe d'un idéal semi-simple S et d'un idéal commutatif C:

$$G^{*\prime}=S+C:$$

S et C sont, comme sous-algèbres caractéristiques[14] de $G^{*\prime}$, aussi des idéaux dans G^*. Désignons d'autre part par R le radical de G^*; R contient l'idéal C comme un sous-idéal. G^*/S étant intégrable (puisque les facteurs $G^*/G^{*\prime}$, $G^{*\prime}/S$ sont commutatifs), et par suite ne contenant plus aucun facteur semi-simple, G^*/R est isomorphe au idéal S. Par conséquent G^* est la somme directe de *l'idéal* semi-simple S et le radical R:

$$G^*=S+R\,,\qquad R\supset C\,.$$

L'algèbre facteur R/C étant isomorphe à $G^*/G^{*\prime}=(S+R)/(S+C)$, elle est commutative; C contient par suite l'algèbre dérivée R' de R. Réciproquement, R' étant un idéal intégrable de $G^{*\prime}$, il est contenu dans le radical de $G^{*\prime}$, à savoir, dans $C=R\frown G^{*\prime}$. On a donc

$$C=R'\,.$$

Soient maintenant Γ^* et $\Gamma^{*\prime}$ les algèbres de Lie linéaires, associées respectivement aux groupes linéaires Γ et Γ'. $\Gamma^{*\prime}$ étant complètement réductible, il y a un sous-espace L de R, invariant par $\Gamma^{*\prime}$, de sorte que R se décompose en L et le sous-espace invariant C:

$$R=L+C\,.$$

Les transformés des éléments de L par $\Gamma^{*\prime}$ appartiennent à L, puisque L est invariant par $\Gamma^{*\prime}$, et en même temps à l'algèbre dérivée $G^{*\prime}$, par suite à $G^{*\prime}\frown R=C$; ils sont donc tous nuls. En particulier on obtient

14) A savoir, les sous-algèbres de $G^{*\prime}$, invariantes par toute automorphie de G^* .

$$(CL)=0\,,\quad \text{d'où}\quad (RC)=0\,.$$

En résumé, la structure de l'algèbre intégrable R est donnée par

$$R'=C\,,\qquad (RC)=0\,.$$

R est donc une algèbre nilpotente de classe $\leqq 2$, et par suite le groupe fini associé à R est un groupe affinement plat, c. q. f. d.

Soit maintenant S la somme directe des algèbres simples S_i:

$$S=S_1+\cdots+S_r\,.$$

La forme quadratique la plus générale invariante par Γ' sera alors de la forme

$$\varphi=c_1\varphi_1+\cdots+c_r\varphi_r+\psi$$

les φ_i étant respectivement les formes correspondantes dans S_i, déterminées à un facteur constant positif c_i près, et ψ une forme quadratique définie positive *arbitraire* en variables de R. Toutes ces formes métriques définissent la même connexion affine considérée plus haut.

Remarque 1. Remarque 2 de § 2 est aussi valable pour la question de ce paragraphe.

Remarque 2. Toutes les substitutions du groupe Γ' étant de déterminant 1, il existe toujours l'élément de volume dans cet espace, qui se conserve par le transport parallèle[15]. Par suite, la question correspondant à celle du paragraphe précédent ne se pose pas ici.

15) E. Cartan: l. c. p. 68.