PAPERS COMMUNICATED

124. Sur la variation d'une fonction de représentation conforme, lorsque le domain varie.

Par Yûsaku KOMATU.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

1. On sait que les considérations de la variation d'une fonction de représentation conforme lorsque le domain varie, sont très utiles pour développer la théorie de représentation conforme des domains simplement connexes, et pour traiter ce problème, on a actuellement deux méthodes, bien connues d'ailleurs, l'une est celle de M. K. Löwner[1] et l'autre celle de M. G. Julia[2]. Mais, on devait attendre jusqu'en 1936 pour que les utilités remarquables de la méthode de M. K. Löwner aient été reconnues pour la première fois par les savants soviétiques, M. G. M. Golusin et M. J. Basilewitsch, bien que M. K. Löwner ont en déjà montré les applications très importantes de cette méthode trouvée par lui-même. M. K. Joh a aussi appliqué la méthode de M. K. Löwner à ses études sur les fonctions univalentes[3]. En ce qui concerne la méthode de M. G. Julia, on en a déjà quelques applications trouvées par M. G. Julia lui-même[4] aux quelques équations fonctionnelles et on a de plus par cette méthode quelques résultats intéressants sur la représentation conforme, dus à M. M. Biernacki[5].

Or, le procédé qu'on employait pour déduire ce qu'on appelle l'équation differentielle fondamentale de M. K. Löwner a été bien com-

1) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Math. Annalen **89** (1923), 103–121.

2) G. Julia, (a) Variation de la fonction qui fournit la représentation conforme d'une aire sur un cercle, lorsque le contour de l'aire varie, C. R. Paris **172** (1921), 568–570; (b) Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme, Ann. Ecole Norm. Sup. **39** (1922), 1–28.

3) Voir, par exemple, G. M. Golusin, Über die Verzerrungssätze der schlichten Abbildungen (en russe), Recueil Math. **1 (43)** (1936), 127–135; Sur les théorèmes de rotation dans la théorie des fonctions univalentes, ibid. 293–296; J. Basilewitsch, Zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen, ibid. 211–228; Sur les théorèmes de Koebe-Bieberbach, ibid. 283–292 et K. Joh, Theorems on the schlicht functions, I; II; III; IV; V, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **19** (1938), 1–12; **20** (1938), 591–610; **21** (1939), 191–208; **22** (1940), 329–343; **23** (1941), 409–423 etc.

4) G. Julia, Deux conséquences de l'équation aux dérivées fonctionnelles qu'on tire de la représentation conforme, C. R. Paris **172** (1921), 738–741; Sur une équation aux dérivées fonctionnelles analogue à l'équation de M. Hadamard, ibid. 831–833 et loc. cit. 2) (b).

5) M. Biernacki, Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes, C. R. Paris **201** (1935), 256–258; Sur les fonctions univalentes, Mathematica **12** (1936), 49–64. Pour ces résultats, on a une autre démonstration, due à M. G. M. Golusin, des théorèmes de M. M. Biernacki, obtenue par la méthode de M. K. Löwner: G. M. Golusin, Zur Theorie der schlichten Funktionen (en russe), Recueil Math. **6 (48)** (1939), 383–388. Cette Note contient, me semble-il, une petite faute qui peut heureusement être évitée par une modification convenable.

pliqué. Mais, l'auteur de cette Note a tout récemment donné une démonstration très simple de ce résultat[6], et il a aussi montré qu'on peut obtenir, d'après la considération analogue, l'équation différentielle fondamentale correspondant même au cas des domains doublement connexes, et qu'on peut déduire systématiquement et analytiquement non seulement les résultats de M. O. Teichmüller[7] mais encore quelques résultats nouvaux[8]. Mais, il me semble que, pour quelques questions et surtout pour les applications actuelles, le théorème de M. G. Julia, d'après sa propriété elle-même, a la possibilité d'être appliqué à ces questions avec plus de fruits. Le but de cette Note est de donner une démonstration simple des résultats de M. G. Julia pour le cas des domains simplement connexes, et en même temps de déduire les résultats correspondants au cas des domains doublement connexes. Deux domains arbitraires simplement connexes ayant plus d'un point-frontière sont en général toujours représentables l'un sur l'autre conformément. Au contraire, deux domains doublement connexes peuvent être représentés conformément quand et seulement quand un invariant conforme, et un seul essentiellement, associé au domain annulaire, c'est-à-dire, son *module* défini comme le logarithme du rapport (>1) des rayons des circonférences concentriques formant ces anneaux sur lesquels deux domains doublement connexes en question peuvent être représentés conformément, soit le même pour ces deux domains. Par conséquent, cette circonstance nous indique qu'il faut considérer, quand le domain varie, aussi la variation du module, ce qui n'était pas forcément nécessaire pour le domain simplement connexe, mais ce qui est absolument indispensable pour le domain doublement connexe.

2. Considérons sur le plan w, d'après M. G. Julia, un domain D limité par une courbe simple fermée C, analytique et régulière, et désignons par

$$z=\Phi(w)\,, \quad \Phi(a)=0\,, \quad \Phi'(a)>0\,,$$

la fonction qui fournit la représentation conforme du D sur le cercle-unité $|z|<1$, où a désigne un point de normalisation choisi arbitrairement mais fixé une fois pour toutes. Cette normalisation ne joue ici qu'un rôle épisodique. D'après l'hypothèse de l'analyticité de la frontière C, la fonction $z=\Phi(w)$ peut être prolongée analytiquement au delà de C sur un domain approprié. Donc, cette fonction donne en même temps la représentation univalente d'un domain Δ simplement connexe contenant le domain fermé $D+C$, sur un domain ayant comme sous-domain le cercle fermé $|z|\leqq 1$. Or, nous allons, dans la suite, faire varier la courbe-frontière C, mais, nous supposerons que la variation se fasse toujours dans le domain Δ, et que le domain obtenu par cette variation contienne le point $w=a$ dans son intérieur. Sous ces hypothèses, M. G. Julia a énoncé le théorème 1 ci-desous sur la variation

6) Y. Komatu, Über einen Satz von Herrn Löwner, Proc. **16** (1940), 512–514.

7) O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasi-konforme Abbildung, Deutsche Math. **3** (1938), 621–678.

8) Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **25** (1943), 1–42.

de fonction de représentation $\Phi(w)$ correspondant à la variation de D, et en a donné deux démonstrations[9]. Ici, nous en donnerons une démonstration plus directe et plus simple que celles de M. G. Julia à l'aide d'une méthode, analogue à celle de M. G. Julia employee dans sa deuxième démonstration, mais suggérée aussi par la méthode de l'auteur[10], qui nous conduit à l'équation de Löwner par l'emploi de la formule de Poisson pour les fonctions holomorphes dans le cercle-unité. Dans la démonstration qui va suivre, la circonstance est un peu simple à cause du fait que l'on considère seulement la variation de la fonction de représentation et par conséquent on peut se passer sans procédé de faire tendre vers zéro qui apparait dans la démonstration du théorème de M. K. Löwner et qui consiste à chercher l'équation différentielle. De plus, la méthode suivante nous fait voir bien clairement l'analogie entre deux méthodes quand on passe de la méthode pour le domain simplement connexe à celle pour le domain doublement connexe. Commençons par la démonstration du théorème de M. G. Julia.

Théorème 1. *Soit comme ci-dessus*

$$z=\Phi(w)\,,\quad \Phi(a)=0\,,\quad \Phi'(a)>0\,,$$

la fonction qui représente le domain D borné et entouré par une courbe simple fermée C, analytique et régulière, sur le cercle $|z|<1$, et

$$z=\Phi^*(w)=\Phi(w)+\delta\Phi(w)\,,\quad \Phi^*(a)=0\,,\quad \Phi^{*\prime}(a)>0\,,$$

la fonction qui représente l'intérieur D^* de la courbe C^* simple fermée, analytique et régulière, qui s'obtient de C lorsque chaque point ω de C se déplace de $\delta\omega$ dans la direction normale à C, sur le cercle-unité $|z|<1$. Alors, l'équation de variation

$$\frac{\delta\Phi(w)}{\Phi(w)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(w)+\Phi(\omega)}{\Phi(w)-\Phi(\omega)}\,\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\,\delta\omega d\omega$$

est valable pour chaque point w compris dans la partie commune à D et à D^*, où l'intégrale est, comme d'habitude, calculée pour un tour complet le long de C dans le sens positif par rapport à D.

En effet, si l'on considère la fonction

$$Z=T(z)=\Phi^*\big(\Phi^{-1}(z)\big)\,,$$

définie par la relation

$$T\big(\Phi(w)\big)=\Phi^*(w)\equiv\Phi(w)+\delta\Phi(w)$$

entre deux fonctions de représentation $\Phi(w)$ et $\Phi^*(w)$, c'est une fonction qui représente le domain transformé de D^* par la fonction $z=\Phi(w)$ sur le cercle-unité $|Z|<1$, et elle est en même temps une fonction qui représente l'intérieur du cercle-unité $|z|<1$ sur le domain transformé de D par la fonction $Z=\Phi^*(w)$. Donc, on a évidemment

$$T(0)=0\,,\qquad T'(0)=\frac{\Phi^{*\prime}(a)}{\Phi'(a)}>0$$

---

9) Voir loc. cit. 2) (b).

10) Voir loc. cit. 6).

et $\frac{T(z)}{z}$ étant holomorphe et ne s'annulant pas dans $|z| \leqq 1$, si l'on considère la branche de la fonction logarithmique $\lg \frac{T(z)}{z}$ qui prend la valeur réelle $\lg T'(0)$ à l'origine, cette fonction est uniforme et holomorphe dans $|z|<1$. Par conséquent, on peut la représenter par la formule de Poisson

$$\lg \frac{T(z)}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg |T(e^{i\varphi})| \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} d\varphi \qquad (|z|<1).$$

Dans la suite, on ne tient compte pas, comme d'habitude, des quantités d'ordre supérieur à un lorsque l'on traite la variation d'ordre un. Par cette convention, on en déduit

$$\frac{\delta\Phi(w)}{\Phi(w)} = \lg\left(1+\frac{\delta\Phi(w)}{\Phi(w)}\right) = \lg\frac{\Phi^*(w)}{\Phi(w)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|T(e^{i\varphi})| \frac{e^{i\varphi}+\Phi(w)}{e^{i\varphi}-\Phi(w)} d\varphi$$

pour $z=\Phi(w)$. Désignons par $\delta\xi=\xi^*-\xi$ le déplacement normal partant d'un point $\xi=e^{i\varphi}$ sur le cercle-unité $|z|=1$ et arrivant à la courbe transformée de C^* par la représentation $z=\Phi(w)$, et par ω et ω^* les points qui correspondent aux points ξ et ξ^* respectivement dans la représentation par $z=\Phi(w)$, soit $\Phi(\omega)=\xi$ et $\Phi(\omega^*)=\xi^*$. Alors, à cause du fait que la conformité de représentation est conservée même sur la frontière, $\delta\omega=\omega^*-\omega$ donne le déplacement normal de C à C^*. Cela dit, la grandeur du déplacement de $\xi=e^{i\varphi}$ le long de la normale du cercle-unité est

$$\delta N \equiv \delta_\varphi N = -\frac{\delta\xi}{\xi} = \pm|\delta\xi|,$$

la signe plus devant être prise quand le déplacement se dirige vers l'intérieur du cercle-unité, et la signe minus dans le cas contraire. En tenant compte encore de la conformité de la représentation sur $|z|=1$, on obtient, au point $\xi=\Phi(\omega)$,

$$\delta\xi=\Phi'(\omega)\delta\omega, \qquad \delta N = -\frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}\delta\omega.$$

Or, $T(\xi)=\Phi^*(\omega)$, $T(\xi^*)=\Phi^*(\omega^*)$ par la définition, donc, en remarquant que $|\Phi^*(\omega^*)|=1$, on a, d'après notre convention,

$$\begin{aligned}\lg|T(\xi)| &= \lg|\Phi^*(\omega^*)-(\Phi^*(\omega^*)-\Phi^*(\omega))| = \lg|\Phi^*(\omega^*)-\Phi^{*\prime}(\omega)\delta\omega| \\ &= \lg\left|1-\frac{\Phi^{*\prime}(\omega)}{\Phi^*(\omega^*)}\delta\omega\right| = \lg\left|1-\frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}\delta\omega\right| = -\frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}\delta\omega,\end{aligned}$$

en ne tenant compte que des quantités d'ordre un. Donc, en employant cette relation et l'équation

$$d\varphi = \frac{d\xi}{i\xi} = \frac{1}{i}\frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}d\omega$$

obtenue de $\xi=\Phi(\omega)=e^{i\varphi}$, on arrive à l'équation de variation cherchée. On a ainsi démontré le théorème de M. G. Julia.

Remarquons, en passant, qu'on peut déduire, sans difficulté, du théorème qui vient d'être démontré, un théorème concernant la variation de la dérivée $\Phi'(w)$ de la fonction de représentation :

Théorème 2. *Sous les mêmes conditions que celles du théorème* 1, *on a*

$$\frac{\delta\Phi'(w)}{\Phi'(w)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(w)+\Phi(\omega)}{\Phi(w)-\Phi(\omega)}\Big(1-\frac{2\Phi(w)\Phi(\omega)}{\Phi(w)^2-\Phi(\omega)^2}\Big)\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega\,,$$

spécialement pour la variation de ce qu'on appelle le module réduit $\lg\frac{1}{\Phi'(a)}$ *de D, on trouve*

$$-\frac{\delta\Phi'(a)}{\Phi'(a)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega\,.$$

3. Correspondant à la formule de Poisson pour les fonctions holomorphes dans un cercle, si la partie réelle uniforme de la fonction $f(z)$, analytique et holomorphe (n'étant pas nécessairement uniforme à cause d'une période de la partie imaginaire) dans l'anneau circulaire concentrique $Q<|z|<1$, possède les valeurs sur la frontière

$$\Re f(z)\to M(\varphi)\quad(z\to e^{i\varphi})\,,\quad \Re f(z)\to N(\varphi)\quad(z\to Qe^{i\varphi})\,,$$

alors on a la formule suivante de Villat pour cette fonction :

$$f(z)=\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\Big(\zeta\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)-\Big(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\Big)\lg z\Big)d\varphi$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\Big(\zeta_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)-\Big(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\Big)\lg z\Big)d\varphi+ic\,,$$

où c est une constante réelle et toutes les notations empruntées de la théorie des fonctions elliptiques se rapportent aux celles dont les périodes fondamentales $2\omega_1$ et $2\omega_3$ satisfont au $\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{i}{\pi}\lg\frac{1}{Q}$. Pour que la fonction $f(z)$ donnée par cette expression soit uniforme dans le domain $Q<|z|<1$, il faut et il suffit, comme l'on peut facilement le vérifier, que

$$\int_0^{2\pi}M(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}N(\varphi)d\varphi\,.$$

Ici, le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est seul en question, et on peut spécialement prendre comme

$$\omega_1=\pi\,,\qquad \omega_3=i\lg\frac{1}{Q}\,,$$

ce qui simplifie un peu la forme de l'expression.

Or, on considère sur le plan w un domain annulaire D limité par la circonférence du cercle-unité et une courbe simple fermée C, analytique et régulière, se trouvant en dehors du cercle-unité et l'entourant, et on désigne son module par $\lg\frac{1}{Q}$, et la fonction qui fournit la représentation univalente et conforme de ce domain sur l'anneau circulaire concentrique $1<|z|<\frac{1}{Q}$ par

$$z=\Phi(w), \qquad \Phi(1)=1.$$

La fonction $\Phi(w)$ se détermine uniquement par cette condition de normalisation en $w=1$. Nous allons démontrer le théorème suivant qui donne la variation de la fonction de représentation $\Phi(w)$, quand on fait varier le contour C dans un domain annulaire Δ dans lequel la fonction peut être prolongée analytiquement et qui contient le domain fermé $D+C$.

Théorème 3. *Soit, comme il a été défini en haut,*

$$z=\Phi(w), \qquad \Phi(1)=1,$$

la fonction qui représente le domain annulaire D au module $\lg\frac{1}{Q}$ et limité par $|w|=1$ et C sur l'anneau $1<|z|<\frac{1}{Q}$, et $\lg\frac{1}{Q^*}=\lg\frac{1}{Q}-\frac{\delta Q}{Q}$ $(Q^*=Q+\delta Q)$ le module du domain annulaire D^* limité par $|w|=1$ et la courbe simple fermée C^*, analytique et régulière, qui s'obtient quand chaque point ω de C se déplace de $\delta\omega$ dans la direction normale à C, et enfin

$$z=\Phi^*(w)=\Phi(w)+\delta\Phi(w), \qquad \Phi^*(1)=1,$$

la fonction qui le représente sur $1<|z|<\frac{1}{Q^*}$. Alors, on obtient l'équation de variation

$$\frac{\delta\Phi(w)}{\Phi(w)}=\frac{1}{\pi}\int_C\left(\zeta\left(i\lg\frac{\Phi(w)}{\Phi(\omega)}\right)-\zeta\left(i\lg\frac{1}{\Phi(\omega)}\right)\right)\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega$$
$$-\frac{2\eta_1\lg\Phi(w)}{\pi}\frac{\delta Q}{Q}$$

en chaque point w contenu dans la partie commune à D et à D^*, où l'intégrale est supposée d'être calculée pour un tour complet le long de C dans le sens positif, et les notations empruntées de la théorie des fonctions elliptiques se rapportent aux périodes fondamentales $2\omega_1=2\pi$ et $2\omega_3=2i\lg\frac{1}{Q}$.

En effet, par un raisonnement tout à fait analogue à celui dans la démonstration précédente, on voit que la fonction $Z=T(z)$ introduite par la relation

$$T\big(\Phi(w)\big)=\Phi^*(w) \quad \text{ou} \quad T(z)=\Phi^*\big(\Phi^{-1}(z)\big)$$

est celle qui représente l'image de D^* par $z=\Phi(w)$ sur l'anneau

$1<|Z|<\frac{1}{Q^*}$ et en même temps représente l'anneau $1<|z|<\frac{1}{Q}$ sur le domain transformé de D dans le plan Z par $Z=\Phi^*(w)$. On a évidemment $T(1)=1$, et $\frac{T(z)}{z}$ étant une fonction holomorphe qui ne s'annule point dans l'anneau fermé $1\leqq|z|\leqq\frac{1}{Q}$, la branche de $\lg\frac{T(z)}{z}$ est une fonction analytique de z, holomorphe dans cet anneau. De plus, si z fait un tour complet dans le sens positif autour de $|z|=1$ dans l'anneau circulaire, soit si $\lg z$ se transforme en $\lg z+2\pi i$, la fonction $\lg T(z)$ se transforme en $\lg T(z)+2\pi i$, donc, sa branche est une fonction uniforme de z. Par conséquent, en appliquant la formule de Villat citée en haut à la fonction

$$f(z)=\lg\frac{Q^*}{z}T\left(\frac{z}{Q}\right)\qquad\left(f(Q)=\lg\frac{Q^*}{Q}\ \text{réelle}\right),$$

holomorphe et uniforme dans $Q\leqq|z|\leqq 1$, on obtient

$$\lg\frac{Q^*}{z}T\left(\frac{z}{Q}\right)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\lg Q^*\left|T\left(\frac{e^{i\varphi}}{Q}\right)\right|\cdot\zeta(i\lg z+\varphi)d\varphi$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\delta Q}{Q}\zeta_3(i\lg z+\varphi)d\varphi+ic$$

dans $Q<|z|<1$, les valeurs de $\Re f(z)$ sur la frontière étant

$$\Re f(e^{i\varphi})=\lg Q^*\left|T\left(\frac{e^{i\varphi}}{Q}\right)\right|,\qquad \Re f(Qe^{i\varphi})=\lg\frac{Q^*}{Q}=\frac{\delta Q}{Q},$$

où $\zeta(u)$ et $\zeta_3(u)$ sont celles qui se rapportent aux périodes fondamentales $2\omega_1=2\pi$ et $2\omega_3=2i\lg\frac{1}{Q}$. Alors, en remarquant les formules simples

$$\int_0^{2\pi}\zeta_3(u+\varphi)d\varphi=\lg\frac{\sigma_3(u+2\pi)}{\sigma_3(u)}=2\eta_1(u+\pi)$$

et en écrivant Qz au lieu de z, on obtient

$$\lg\frac{Q^*}{Q}\,\frac{T(z)}{z}=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\lg Q^*\left|T\left(\frac{e^{i\varphi}}{Q}\right)\right|\cdot\zeta(i\lg Qz+\varphi)d\varphi$$
$$-\frac{2\eta_1}{\pi i}(i\lg Qz+\pi)\frac{\delta Q}{Q}+ic$$

dans $1<|z|<\frac{1}{Q}$. La constante c étant déterminée en posant $z=1$ dans cette relation, et en soustrayant l'équation ainsi obtenue de la relation précédente, on trouve

$$\lg\frac{T(z)}{z}=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\lg Q^*\left|T\left(\frac{e^{i\varphi}}{Q}\right)\right|\cdot\Big(\zeta(i\lg Qz+\varphi)-\zeta(i\lg Q+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$-\frac{2\eta_1\lg z}{\pi}\,\frac{\delta Q}{Q}.$$

Cela étant, on pose comme auparavant

$$\delta N \equiv \delta_\varphi N = -\frac{\delta\xi}{Q\xi} = \pm |\delta\xi|$$

la grandeur du déplacement $\delta\xi = \xi^* - \xi$ partant d'un point $\xi = \frac{e^{i\varphi}}{Q}$ sur la circonférence $|z| = \frac{1}{Q}$ et arrivant à la courbe de l'image de C^* par $z = \Phi(w)$, où l'on fait la convention d'après laquelle la signe plus doit être prise si le déplacement se dirige vers l'intérieur de l'anneau. Or, en posant $\xi = \Phi(\omega)$ et $\xi^* = \Phi(\omega^*)$, et en remarquant que $|\Phi^*(\omega^*)| = \frac{1}{Q^*}$, on voit facilement que

$$\lg Q^* \left| T\left(\frac{e^{i\varphi}}{Q}\right) \right| = \lg Q^* |\Phi^*(\omega^*) - \Phi^{*\prime}(\omega)\delta\omega| = \lg \left| 1 - \frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}\delta\omega \right|$$
$$= -\frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}\delta\omega ,$$

en ne tenant compte pas des quantités d'ordre supérieur. En employant cette relation et les équations

$$d\varphi = \frac{d\xi}{i\xi} = \frac{1}{i}\frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}d\omega , \qquad i \lg Q + \varphi = i \lg \frac{1}{\Phi(\omega)}$$

déduites de $\varphi = -i \lg Q\xi = -i \lg Q\Phi(\omega)$, on obtient l'équation de variation indiquée dans le théorème, en posant $z = \Phi(w)$ et $T(z) = \Phi^*(w)$.

Comme l'on voit dans la démonstration du théorème précédent, $\delta\xi d\xi = \Phi(\omega)^2 \delta\omega d\omega$, donc en désignant les grandeurs des déplacements $d\omega$ et $\delta\omega$ par dS et δN respectivement, et en remarquant que la conformité de représentation se conserve même sur la frontière, on s'assure de la validité des relations

$$\frac{\delta\xi}{\xi} = -Q\delta N , \quad \frac{d\xi}{\xi} = iQdS , \quad \delta N = |\Phi'(\omega)|\delta n , \quad dS = |\Phi'(\omega)| ds ;$$

$$\frac{1}{i}\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega = \frac{\delta\xi d\xi}{i\xi^2} = -Q^2 |\Phi'(\omega)|^2 \delta n ds ,$$

où la dernière grandeur est toujours réelle, et positive au point ω où C se prolonge en C^* dans la direction extérieure, et négative au point ω où C se contracte en C^* dans la direction intérieure. Si l'on écrit le deuxième membre de l'équation de variation du théorème en terme de cette grandeur, on obtient tout de suite les expressions de $\frac{\delta|\Phi(w)|}{|\Phi(w)|}$ et $\delta \arg \Phi(w)$ en comparant la partie réelle et la partie imaginaire de deux membres.

Pour la variation de la dérivée $\Phi'(w)$ de la fonction de représentation, le théorème suivant s'obtient facilement en partant du théorème précédent :

Théorème 4. *Sous les mêmes hypothèses que celles dans le théorème précédent, on a*

$$\frac{\delta\Phi'(w)}{\Phi'(w)}=\frac{1}{\pi}\int_C\left(\zeta\left(i\lg\frac{\Phi(w)}{\Phi(\omega)}\right)-\zeta\left(i\lg\frac{1}{\Phi(\omega)}\right)-i\wp\left(i\lg\frac{\Phi(w)}{\Phi(\omega)}\right)\right)\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega$$
$$-\frac{2\eta_1}{\pi}\frac{\delta Q}{Q},$$

et par conséquent, au point de normalisation $w=1$, on a spécialement

$$\frac{\delta\Phi'(1)}{\Phi'(1)}=\frac{1}{\pi i}\int_C\wp\left(i\lg\Phi(\omega)\right)\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega-\frac{2\eta_1}{\pi}\frac{\delta Q}{Q}.$$

Enfin, nous énonçons un théorème qui représente directement la variation du module apparu dans le dernier terme des seconds membres des expressions dans les deux théorèmes démontrés, et par conséquent un théorème qui donne un complément pour ces théorèmes.

Théorème 5. *Pour la variation du module* $\delta\lg\frac{1}{Q}=-\frac{\delta Q}{Q}$, *on a*

$$-\frac{\delta Q}{Q}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega.$$

Ce théorème se démontre facilement en appliquant la condition d'uniformité déjà remarquée à la fonction

$$f(z)=\lg\frac{Q^*}{z}T\left(\frac{z}{Q}\right)\qquad(Q\leqq|z|\leqq1)$$

employée dans la démonstration des théorèmes précédents. En effet, dans ce cas, on a, de cette condition,

$$0=\int_0^{2\pi}\left(\Re f(e^{i\varphi})-\Re f(Qe^{i\varphi})\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\lg Q^*\left|T\left(\frac{e^{i\varphi}}{Q}\right)\right|d\varphi-2\pi\frac{\delta Q}{Q},$$

donc, on en déduit

$$-\frac{\delta Q}{Q}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta N d\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi'(\omega)^2}{\Phi(\omega)^2}\delta\omega d\omega.$$

Il est bon de remarquer l'analogie entre la relation montrée dans le dernier théorème donnant la variation du module suivant la variation du l'image et la relation précédente donnant la variation de la dérivée au point de normalisation $w=a$ dans le cas du domain simplement connexe. Par cela même, on entrevoit la relation étroite très remarquable entre le module du domain annulaire et le module réduit du domain simplement connexe.

Remarquons enfin que, les relations

$$\delta\Psi(z) = -z\Psi'(z)\frac{\delta\Phi(w)}{\Phi(w)},$$

$$\delta\Psi'(z) = -\Psi'(z)\frac{\delta\Phi'(w)}{\Phi'(w)} - z\Psi''(z)\frac{\delta\Phi(w)}{\Phi(w)}$$

étant valables pour la fonction inverse $w=\Psi(z)$ de la fonction de représentation $z=\Phi(w)$, on peut facilement déduire les représentations pour ces grandeurs en partant des théorèmes correspondants.