14. Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. I. Les espaces à connexion affine.

Par Makoto ABE.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1944.)

La connexion affine d'un espace de Riemann se caractérise par les deux propriétés suivantes:

1° Qu'elle soit sans torsion,

2° Que la forme métrique fondamentale donnée

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j$$

se conserve par le transport parallèle au sens de cette connexion. Supposons réciproquement qu'une connexion affine sans torsion soit donnée d'avance dans une variété E à n dimensions. Alors se posent les questions suivantes:

Est-il possible de définir cette connexion par une métrique riemannienne?

S'il en est ainsi, quelle est la métrique la plus générale qui définit cette connexion?

Si $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ est une telle métrique, elle se détermine en chaque point de la variété E, dès qu'elle est définie au point origine O (d'ailleurs arbitrairement choisi); on n'a qu'à la transporter par parallélisme le long d'un chemin allant de O au point arbitraire P de E. Mais, pour que le résultat soit indépendent du choix d'un chemin suivi, la métrique définie au point O doit se conserver quand on la transporte le long d'un contour fermé arbitraire partant de O et y revenant. Autrement dit, la forme quadratique doit être invariante par le groupe d'holonomie[1] g associé au point O, ou plus exactement, par le groupe des substitutions linéaires homogènes γ[1] (homomorphe à g) que les déplacements affines du groupe g effectuent sur les vecteurs issus de O. Réciproquement, chaque forme invariante par γ peut être transporté de O en tout point de E et la métrique riemannienne ainsi obtenue définit à son tour la connexion affine donnée, parce que celle-ci est uniquement déterminée par les conditions 1° et 2°.

La connexion donnée peut être donc définie par une métrique riemannienne, si et seulement si γ *est* (*équivalent à*) *un groupe des transformations orthogonales*. De plus, le problème de chercher la métrique la plus générale définissant cette connexion est ainsi réduit au problème d'Algèbre de *déterminer la forme quadratique la plus générale invariante par le groupe* γ. Si γ est irréductible, une telle forme est déterminée uniquement à un facteur constant près; si γ est réductible, le résultat sera plus compliqué. Mais pour étudier les questions de cette nature, il importe d'abord d'examiner plus généralement:

---

1) E. Cartan: Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la Relativité généralisée, Deuxième Partie, Ann. Ec. Norm. (3) 42 (1925), p. 17-88. Chap. VI.

Quelles sont les conséquences que la réductibilité du groupe γ porte sur la structure géométrique de l'espace E?

Nous allons traiter cette question dans cette Partie I dans le cas général d'un espace à connexion affine, pour revenir ensuite en Partie II au cas particulier d'un espace de Riemann.

§ 1. *Les champs des p-directions parallèles.*

Soit E un espace à connexion affine (en général, avec torsion). Désignons par g et γ les groupes considérés plus haut. Supposons maintenant que le groupe γ soit réductible et laisse invariant un plan à p dimensions (ou un *p-plan*) Σ^p (ou encore, le groupe d'holonomie g laisse invariante (ou *stable*) la *direction* d'un p-plan Σ^p (ou une *p-direction*)).

Attachons au point origine O l'élément de p-plan σ^p, déterminé par le plan Σ^p passant par O dans l'espace affine tangent en O. Transportons cet élément σ^p par parallélisme à un point quelconque P de la variété E. Le résultat étant indépendent du choix d'un chemin suivi pour aller de O en P, on obtiendra ainsi un *champ des p-directions parallèles* (au sens absolu) dans l'espace E. La réciproque étant évidente, on a ainsi obtenu :

Si le groupe γ est réductible et laisse invariant un p-plan, il existe dans cet espace un champ des p-directions parallèles, et réciproquement.

§ 2. *Les familles des p-plans parallèles.*

Mais ces éléments de p-plans σ^p, attachés à tous les points de E et parallèles entre eux, quand engendrent-ils des variétés à p dimensions? Remarquons d'abord: s'il en est ainsi, les variétés engendrées seront certainement totalement géodésiques (ou *p-plans* E^p); en effet, un vecteur tangent à une d'elles lui reste tangent, quand on le transporte par parallélisme le long d'un chemin tracé sur cette variété. Nous obtiendrons ainsi une *famille à $n-p$ paramétres des p-plans E^p parallèles entre eux,* de sorte que par chaque point de E il passe un p-plan de cette famille et un seul.

Revenous à la question posée et adoptons en chaque point de l'espace un repère, de manière que p premiers vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p$ de ce repère soient situés dans l'élément de p-plan σ^p. Parmi les formes de Pfaff ω^b et ω_a^b, qui définissent la connexion

$$(1) \qquad d\boldsymbol{P}=\omega^b\boldsymbol{e}_b\,, \qquad d\boldsymbol{e}_a=\omega_a^b\boldsymbol{e}_b\,, \qquad a, b=1, \dots, n$$

de cet espace, s'annulent identiquement à cause du choix de ce repère les $p(n-p)$ formes suivantes

$$(2) \qquad \omega_i^\alpha=0\,, \qquad i=1, \dots, p\,, \qquad \alpha=p+1, \dots, n\,.$$

Or, σ^p est défini par le système de Pfaff

$$(3) \qquad \omega^\alpha=0\,, \qquad \alpha=p+1, \dots, n\,.$$

Les σ^p engendreront une famille des E^p, si et seulement si le système (3) est complètement intégrable. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les covariants bilinéaires

$$(\omega^\alpha)'=\Omega^\alpha+[\omega^b\omega_b^\alpha]\,, \qquad \alpha=p+1, \dots, n\,, \qquad b=1, \dots, n$$

s'annulent en tenant compte de (3), où $\Omega^a = A^a_{ab}[\omega^a\omega^b]$ expriment la torsion de cet espace. Des identité (2) résultent

$$[\omega^b\omega^a_b] = [\omega^\beta\omega^a_\beta], \qquad \alpha, \beta = p+1, \dots, n.$$

$[\omega^\beta\omega^a_\beta]$ s'annulent d'autre part en tenant compte de (3). Le système (3) est donc complètement intégrable, si les équations $\omega^a = 0$ entraînent $\Omega^a = 0$, ou encore, si les $\frac{1}{2}p(p-1)(n-p)$ composantes du tenseur de torsion

$$(4) \qquad A^a_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, \dots, p, \qquad a = p+1, \dots, n$$

s'annulent identiquement. On est ainsi conduit à la proposition suivante :

Pour qu'un champ des p-directions parallèles engendre une famille à $n-p$ paramètres des p-plans, il faut et il suffit que la condition (4) soit satisfaite ; ou, plus géométriquement, que le déplacement affine associé à un cycle élémentaire situé dans cette p-direction laisse toujours le p-plan $\sum^p$ fixe (et non seulement sa direction) à une quantité infiniment petite près par rapport à l'aire limitée par ce cycle.

En particulier, la condition est remplie, si $p=1$; c'est le cas d'un *champ des vecteurs parallèles.*

La condition étant aussi toujours remplie au cas d'un espace sans torsion, quel que soit p, on a

Théorème. Soit E un espace à connexion affine sans torsion. Si le groupe d'holonomie de E admet une p-direction stable, il existe dans E une famille à $n-p$ paramètres des p-plans parallèles entre eux, et réciproquement.

§ 3. *La connexion affine admettant une famille des p-plans parallèles.*

Si l'on adopte un système de coordonnées $u^1, \dots, u^n$, tel que les ∞^{n-p} p-plans soient définis par

$$(5) \qquad u^{p+1} = \text{const}, \dots, u^n = \text{const},$$

la connexion de l'espace prendra la forme suivante (en se servant du repère naturel)

$$(6) \qquad \begin{cases} d\boldsymbol{P} = du^k\boldsymbol{e}_k + du^\gamma\boldsymbol{e}_\gamma, \\ d\boldsymbol{e}_i = \omega^k_i\boldsymbol{e}_k, \\ d\boldsymbol{e}_a = \omega^k_a\boldsymbol{e}_k + \omega^\gamma_a\boldsymbol{e}_\gamma, \end{cases} \qquad \begin{matrix} i, k = 1, \dots, p \\ \\ a, \gamma = p+1, \dots, n. \end{matrix}$$

Réciproquement, si la connexion est donnée par les formules (6), les équations (5) définissent évidemment une famille à $n-p$ paramètres des p-plans parallèles, $\omega^k_i, \omega^k_a, \omega^\gamma_a$ étant des formes de Pfaff *absolument quelconques* en $u^1, \dots, u^n$.

La connexion affine d'un p-plan de cette famille est fournie par les formules (en posant $\omega^k_i = \Gamma^k_{ij}du^j + \Gamma^k_{i\beta}du^\beta$)

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{P} &= du^k\boldsymbol{e}_k, \\ d\boldsymbol{e}_i &= \Gamma^k_{ij}du^j\boldsymbol{e}_k, \end{aligned} \qquad i, j, k = 1, \dots, p, \qquad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(u^1, \dots, u^n),$$

$u^{p+1}, \dots, u^n$ supposés fixes. Les espaces à p dimensions ainsi définis ne sont pas, en général, isomorphes entre eux, les Γ^k_{ij} dépendant aussi des paramètres $u^{p+1}, \dots, u^n$. Au contraire, nous verrons plus loin (en II) au cas d'un espace de Riemann que tous les E^p sont nécessairement isométriques entre eux.

§ 4. *Le cas de la réductibilité complète.*

Supposons maintenant que le groupe γ soit complètement réductible, et décomposable en s composantes irréductibles. Il existent alors les champs des $\sigma^{p_1}, \sigma^{p_2}, \dots, \sigma^{p_s} (p_1+p_2+\dots+p_s=n)$ parallèles. Adoptons en chaque point de l'espace un repère de manière que p_ν vecteurs $\boldsymbol{e}_{\nu 1}, \dots, \boldsymbol{e}_{\nu p_\nu}$ en soient situés dans σ^{p_ν}, respectivement pour $\nu=1, \dots, s$. Supposons, en outre, que les composantes du tenseur de torsion rapportées à ce repère remplissent la condition

$$A^{\nu k}_{\lambda i,\, \mu j}=0 \quad \text{sauf pour} \quad \lambda=\mu=\nu\,. \tag{7}$$

Alors engendrent les champs des $\sigma^{n-p_\nu}=\sigma^{p_1}\smile\dots\smile\sigma^{p_{\nu-1}}\smile\sigma^{p_{\nu+1}}\smile\dots\smile\sigma^{p_s}$ respectivement des familles des E^{n-p_ν}; on peut donc introduire un système de coordonnées, tel que les E^{n-p_ν} soient fournis par

$$u^{\nu 1}=\text{const}, \dots, u^{\nu p_\nu}=\text{const}\,.$$

Les champs des σ^{p_ν} engendrent alors respectivement des familles des E^{p_ν}, donnés par

$$u^{\lambda 1}=\text{const}, \dots, u^{\lambda p_\lambda}=\text{const}\,, \qquad \lambda=1\,, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, s\,.$$

Réciproquement la condition (7) est évidemment nécessaire, pour qu'on puisse introduire les coordonnées $u^{\lambda i}$, de sorte que l'on obtienne chaque famille des E^{p_ν} en égalant aux constantes $n-p_\nu$ entre $u^{\lambda i}$. Cette condition est du reste toujours remplie, si l'espace est *sans torsion.*

Si cette condition est remplie, la connexion de l'espace peut s'exprimer de la manière suivante:

$$\left\{\begin{array}{lll} d\boldsymbol{P}=du^{1k_1}\boldsymbol{e}_{1k_1}+du^{2k_2}\boldsymbol{e}_{2k_2}+\cdots+du^{sk_s}\boldsymbol{e}_{sk_s} & & \\ d\boldsymbol{e}_{1i_1}=\omega^{1k_1}_{1i_1}\boldsymbol{e}_{1k_1}\,, & & \\ d\boldsymbol{e}_{2i_2}= \qquad\qquad \omega^{2k_2}_{2i_2}\boldsymbol{e}_{2k_2}\,, & & i_\nu, k_\nu=1, \dots, p_\nu\,, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ d\boldsymbol{e}_{si_s}= \qquad\qquad\qquad \omega^{sk_s}_{si_s}\boldsymbol{e}_{sk^s}\,, & & \end{array}\right. \tag{8}$$

$\omega^{\nu k_\nu}_{\nu i_\nu}$ étant encore des formes de Pfaff quelconques en u.

Si, en particulier, la torsion est nulle, il résulte de la symétrie des coefficients Γ^c_{ab} par rapport aux deux indices inférieurs a, b, que tous les $\Gamma^{\nu k_\nu}_{\lambda i_\lambda,\, \mu j_\mu}$ s'annulent sauf pour $\lambda=\mu=\nu$; on a donc

$$\omega^{\nu k_\nu}_{\nu i_\nu}=\Gamma^{\nu k_\nu}_{\nu i_\nu,\, \nu j_\nu}du^{\nu j_\nu}\,. \tag{9}$$

Les formes de Pfaff $\omega^{\nu k_\nu}_{\nu i_\nu}$ ne dépendent que des différentielles $du^{\nu j_\nu}$, mais les coefficients $\Gamma^{\nu k_\nu}_{\nu i_\nu,\, \nu j_\nu}=\Gamma^{\nu k_\nu}_{\nu j_\nu,\, \nu i_\nu}$ sont fonctions arbitraires des u.

§ 5. *Un cas particulier*[1].

Supposons maintenant que le groupe d'holonomie admette n $(1-)$-directions stables indépendentes. Si les n champs des $(n-1)$-directions parallèles, déterminés par $n-1$ entre les n champs des vecteurs parallèles, engendrent n familles des E^{n-1}, la connexion de cet espace est donnée par

$$d\boldsymbol{P}=du^i\boldsymbol{e}_i\,,\qquad d\boldsymbol{e}_1=\omega_1^1\boldsymbol{e}_1,\,\cdots,\qquad d\boldsymbol{e}_n=\omega_n^n\boldsymbol{e}_n\,.$$

C'est toujours le cas pour un espace sans torsion; ω_i^i ne contiendra alors que la différentielle du^i:

$$\omega_i^i=\Gamma_{ii}^i du^i\,.$$

Ces formules contiennent encore n fonctions $\Gamma_{ii}^i(i=1,\dots,n)$ des $u^1,\dots,u^n$. Remarquons d'ailleurs que l'espace de Riemann à n dimensions, dont le groupe d'holonomie admet n directions stables, n'est autre que l'espace euclidien ; le groupe γ se réduit en effet à la seule transformation identique, parce que γ est alors le groupe orthogonal laissant invariants n vecteurs indépendents.

Mais, si l'on introduit aussi des quantités *complexes*, un espace de Riemann V^n peut admettre n champs des vecteurs parallèles, sans se réduire à un espace euclidien. Par exemple, soit V^2 un espace de Riemann *analytique* à 2 dimensions. Le groupe γ de V^2 est le groupe des rotations

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

qui sont réductibles aux formes

$$\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}.$$

Il laisse donc invariantes les deux directions *isotropes* $(1, \pm i)$. Par conséquent, il existent deux familles des géodésiques isotropes, données respectivement par $u=$const. et $v=$const.; les coordonnées u et v sont conjuguées l'une à l'autre en tout point *réel*. Si l'on adopte le repère naturel par rapport à ce système de coordonnées, on a

$$(10)\qquad d\boldsymbol{P}=du\boldsymbol{e}_1+dv\boldsymbol{e}_2\,,\qquad \boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=0\,.$$

En posant

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}f(u,v)$$

la métrique est donnée par

$$ds^2=d\boldsymbol{P}^2=f\,du\,dv\,,$$

et la connexion par (10) et

$$(10')\qquad d\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial\log f}{\partial u}du\boldsymbol{e}_1\,,\qquad d\boldsymbol{e}_2=\frac{\partial\log f}{\partial v}dv\boldsymbol{e}_2\,.$$

1) E. Cartan: l. c. p. 21, Exemple I.