46. *Sur les fonctions multivalentes.*

Par Akira KOBORI.
Daisan Kôtô-Gakkô.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 12, 1944.)

1. Considérons la famille (M_p) de fonctions

(1) $$w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$$

holomorphes et p-valentes dans le cercle-unité $|z|<1$. Si l'on pose

$$\{w(z^2)\}^{-\frac{1}{2p}}=\frac{1}{z}+b_1z+b_3z^3+\cdots+b_{2n-1}z^{2n-1}+\cdots$$

on peut écrire

$$\frac{w(z)}{z^p}=(1+b_1z+b_3z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots)^{-2p}$$

d'où on a

$$\left|\sqrt[2p]{\frac{z^p}{w(z)}}-1\right|=|b_1z+b_3z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots|.$$

Si $|z|=r$ (<1)

$$|b_1z+b_3z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots|$$
$$\leqq|b_1|r+|b_3|r^2+\cdots+|b_{2n-1}|r^n+\cdots$$

D'après le théorème de Schwarz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|b_{2\nu-1}|r^\nu\leqq\{\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-1)|b_{2\nu-1}|^2\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^{2\nu}}{2\nu-1}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Or, nous pouvons démontrer

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-1)|b_{2\nu-1}|^2\leqq1.$$

et nous avons

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^{2\nu}}{2\nu-1}=\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}.$$

Donc on a

$$\left|\sqrt[2p]{\frac{z^p}{w(z)}}-1\right|\leqq\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}.$$

Par suite, si $r\leqq0.833\ldots$, on a[1]

(3) $$|w(z)|\leqq\frac{r^p}{\left(1-\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}\right)^{2p}}.$$

Choisissons maintenant les valeurs de r de telle sorte qu'elles satisfassent l'inégalité

1) J'ai lu ce résultat et celui qui suit au séminaire (le 5 fév. 1944) de l'Institut de Mathématique de l'Université de Kyôtô.

$$\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\leqq r,$$

c'est-à-dire

$$r\leqq \tanh 1 = 0.761\cdots.$$

On a alors

$$1-\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}\geqq 1-\sqrt{r}$$

$$=\frac{1-r}{1+\sqrt{r}}.$$

Donc :

Si la fonction

$$w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$$

appartient à la famille (M_p), *on a, pour* $|z|\leqq \tanh 1$,

$$|w(z)|\leqq(1+\sqrt{|z|})^{2p}\cdot\frac{|z|^p}{(1-|z|)^{2p}}.$$

Puisque $1+\sqrt{|z|}<2$, ce résultat est, si l'on considère le cercle $|z|\leqq \tanh 1$, plus précis que celui qu'ont obtenu MM. Joh et Hukusima[1].

2. Dans un mémoire antérieur[2] nous avons introduit la notion d'étoile d'ordre p, c'est-à-dire, nous avons consideré un domaine étoilé formé par p feuillets. Et nous avons démontré :

Pour que la fonction de la famille (M_p) *représente le cercle-unité sur le domaine étoilé d'ordre* p, *il faut et il suffit que la relation, en posant* $w(z)=z^p g(z)$,

$$\Re\frac{zg'(z)}{g(z)}>-p \tag{4}$$

soit verifiée pour $|z|\leqq r<1$.

En tenant compte des inégalités (2) et (4), on peut démontrer le théorème suivant :

Toute fonction de la famille (M_p) *représente le cercle de rayon* $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *sur le domaine étoilé d'ordre* p.

D'où on peut déduire :

Toute fonction de la famille (M_p) *couvre le cercle de rayon* $\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^p$.

Les démonstrations paraîtront dans un autre recueil.

1) Proc. Physico-math. Society of Japan, **25**, 1943.
2) Proc. Physico-math. Society of Japan, **23**, 1941.