42. *Über die Harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, (I).*

Von Kunihiko KODAIRA.
Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by TAKAGI, M.I.A., April 12, 1944.)

I. Existenz der Harmonischen Tensorfelder mit gegebenen Perioden.

Die Beziehung zwischen Topologie und Tensorfeld auf Mannigfaltigkeiten ist schon von mehreren Autoren untersucht worden[1]. Im folgenden geben wir davon eine kurze Zusammenfassung, wobei aber bemerkt werden soll, dass man eine formal übersichtlichere Theorie bekommt, wenn man dem Tensorbegriff den dazu dualen Begriff der Tensordichte gegenüberstellt. Der „obere Randoperator $\mathfrak{r}^*$" operiert auf Tensorfelder; der „untere Randoperator $\mathfrak{r}$" auf Tensordichte. Erst in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wo wegen der mittels Metrik bestimmten Zuordnung der Unterschied zwischen den beiden Begriffen sozusagen verschwindet, lassen sich die Operatoren $\mathfrak{r}^*$ und $\mathfrak{r}$ beide auf Tensorfelder operieren. Harmonisch heisst dasjenige Tensorfeld e, wofür $\mathfrak{r}e=\mathfrak{r}^*e=0$ gilt[2]. In diesem Teil I beweisen wir die Existenz der überall regulären harmonischen Tensorfelder mit gegebenen Perioden. Dabei bedienen wir uns der Weylschen „Methode der orthogonalen Projektion"[3]. Den Beweis eines dabei benötigten wichtigen Lemmas, das bei Weyl nur im Fall des Euklidischen Raumes aufgestellt ist, tragen wir im § 4 nach. Die Tensorfelder mit Singularitäten betrachten wir im Teil II. Es wird sich zeigen, dass mit unserer Methode auch die klassischen Theoreme der Existenz der Abelschen Integrale auf der Riemannschen Fläche sich leicht beweisen lassen.

§ 1. *Kombinatorische Topologie der Homologie-Mannigfaltigkeiten.* Zunächst erinnern wir uns an einige fundamentalen Eigenschaften der Homologie-Mannigfaltigkeiten. Es sei $K=K^n$ ein n-dim. endlicher simplizialer Komplex, t^ρ ein ρ-dim. Simplex von K. Die ρ-dim. algebraischen Komplexe mit reellen Koeffizienten auf K bezeichnen wir mit $A^\rho, C^\rho, \Phi^\rho$, etc.; $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}^*$ sei unterer bzw. oberer Randoperator[4]; $[t^\rho : t^{\rho-1}]$ Inzidenzzahlen; dann gilt

$$\mathfrak{r}t^\rho=\Sigma[t^\rho : t^{\rho-1}]t^{\rho-1}, \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{r}^*t^\rho=\Sigma[t^{\rho+1} : t^\rho]t^{\rho+1}. \tag{1.1)*}$$

---

1) U. a. von G. de Rham, E. Cartan, W. V. D. Hodge. Siehe insbesondere G. de Rham: Über mehrfache Integrale, Abh. Math. Sem. Hans. Univ. **12** (1938), 313-339, wo auch Literatur angegeben wird.

2) Hodge nennt das „harmonic integral". W. V. D. Hodge: Proc. London Math. Soc. Ser. 2 Vol. 36, 257-303; Vol. 38, 72-95; Vol. 41, 483-496.

3) H. Weyl: Method of orthogonal projections in potential theory, Duke Math. Jour. Vol. 7 (1940), 411-444.

4) Vgl. H. Freudenthal: Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie, Annals of Math. (2), Vol. 38 (1937), 647-655.

$t^\rho > t^\sigma$ soll bedeuten, dass t^σ eine Seite von t^ρ ist. $L^\rho(K)$ sei der lineare Raum der ρ-dim. algebraischen Komplexe auf K, $Z^\rho(K)$ der Raum der ρ-dim. unteren Zyklen, $H^\rho(K)=\mathfrak{r}L^{\rho+1}(K)$, $B^\rho(K)=Z^\rho(K)/H^\rho(K)$ ist dann die ρ-dim. untere Bettische Gruppe. Entsprechend sei $\overset{*}{Z}{}^\rho(K)$ der Raum ρ-dim. oberer Zyklen, $\overset{*}{H}{}^\rho(K)=\mathfrak{r}^*L^{\rho-1}(K)$, $\overset{*}{B}{}^\rho(K)=\overset{*}{Z}{}^\rho(K)/\overset{*}{H}{}^\rho(K)$ ist dann die ρ-dim. obere Bettische Gruppe. Das Produkt zweier Elemente $\Phi=\Sigma\varphi_t\cdot t$ und $C=\Sigma c_t\cdot t$ aus $L(K)=\Sigma\oplus L^\rho(K)$ wird definiert durch

$$(\Phi, C)=\Sigma\varphi_t\cdot c_t\,. \tag{1.2}$$

(Φ, C) wird wie „inneres Produkt" gerechnet. Offenbar gilt

$$(\Phi, \mathfrak{r}C)=(\mathfrak{r}^*\Phi, C)\,. \tag{1.3}$$

$\mathfrak{r}^*$ ist also „adjungierter Operator" von $\mathfrak{r}$. Bezeichnet man das orthogonale Komplement von $M\leq L^\rho$ in L^ρ mit $L^\rho-M$, so gilt

$$Z^\rho(K)=L^\rho(K)-\overset{*}{H}{}^\rho(K)\,, \tag{1.4}$$

$$\overset{*}{Z}{}^\rho(K)=L^\rho(K)-H^\rho(K)\,. \tag{1.4*}$$

Ferner bezeichnen wir mit N die normale Unterteilung von K; das ist der Komplex mit Eckpunkten t (Simplexen von K) und mit Simplexen $(t_0, t_1, \dots, t_r)$ für $t_0>t_1>\cdots>t_r$ in K. Der Unterteilungsoperator $\mathfrak{u}$ wird durch

$$\mathfrak{u}t^\rho=\Sigma[t^\rho, t^{\rho-1}, \dots, t^0](t^\rho, t^{\rho-1}, \dots, t^0)$$

definiert[1], wobei

$$[t^\rho, t^{\rho-1}, \dots, t^1, t^0]=[t^\rho : t^{\rho-1}][t^{\rho-1} : t^{\rho-2}]\cdots[t^1 : t^0]\,.$$

Bekanntlich gilt $\mathfrak{u}\mathfrak{r}=\mathfrak{r}\mathfrak{u}$. Nummeriert man die Eckpunkte von K auf irgendeine Weise, und bezeichnet man mit $\mathfrak{o}$ diejenige simpliziale Abbildung von N auf K, welche dem Eckpunkt $t^\rho=(a_0, a_1, \dots, a_\rho)$ von N den in der Nummerierung zuletzt vorkommenden Eckpunkt a_j von K zuordnet, so gillt $\mathfrak{o}\mathfrak{u}=1$, $\mathfrak{u}\mathfrak{o}\backsim 1$, und $\mathfrak{u}=\mathfrak{o}^{-1}$ gibt eine Isomorphie von $B^\rho(K)$ auf $B^\rho(N)$. Entsprechend gibt $\mathfrak{o}^*=\mathfrak{u}^{*-1}$ eine Isomorphie von $\overset{*}{B}{}^\rho(K)$ auf $\overset{*}{B}{}^\rho(N)$, wobei $\mathfrak{o}^*, \mathfrak{u}^*$ die adjungierten Operatoren von $\mathfrak{o}, \mathfrak{u}$ bedeuten.

Setzt man $A(a_0, \dots, a_\rho)=(A^\rho, t^\rho)$ für $t^\rho=(a_0, \dots, a_\rho)$, so lässt sich der algebraische Komplex A^ρ als eine Funktion der Eckpunkte $a_0, \dots, a_\rho$ auffassen. Das Alexandersche Produkt $A^\rho\circ B^\sigma$ von A^ρ mit B^σ wird dann definiert durch

$$A^\rho\circ B^\sigma(a_0, \dots, a_\rho, \dots, a_{\rho+\sigma})=A^\rho(a_0, \dots, a_\rho)B^\sigma(a_\rho, \dots, a_{\rho+\sigma})\,, \tag{1.5}$$

wobei in einer ein für allemal bestimmten Nummerierung der Eckpunkte von K a_j früher als a_{j-1} vorkommen soll. Bekanntlich gilt

$$\mathfrak{r}^*(A^\rho\circ B^\sigma)=\mathfrak{r}^*A^\rho\circ B^\sigma+(-1)^\rho A^\rho\circ\mathfrak{r}^*B^\sigma\,, \tag{1.6}$$

wonach das Alexandersche Produkt auch zwischen den Elementen von

1) H. Freudenthal: a. a. O.

$\overset{*}{B}(K) = \underset{\rho}{\Sigma} \oplus \overset{*}{B}{}^{\rho}(K)$ definiert wird. Nummeriert man die Eckpunkte von N nach Folge der Inzidenz, so gilt $\mathfrak{o}^*(A \circ B) = \mathfrak{o}^* A \circ \mathfrak{o}^* B$, woraus wegen $\overset{*}{B}(K) \cong \overset{*}{B}(N)$ folgt, dass die Definition des Alexanderschen Produktes von der Nummerierung der Eckpunkte unabhängig ist.

Nunmehr sei K eine n-dim. geschlossene orientierbare Homologie-Mannigfaltigkeit. Dann besitzt K einen bestimmten n-dim. Grundzyklus: $Z^n = \Sigma[t^n]t^n$. Man definiert dann den Dualzelloperator $\mathfrak{d}$ durch

$$\mathfrak{d}t^\rho = \Sigma[t^n][t^n, t^{n-1}, \ldots, t^\rho](t^n, t^{n-1} \ldots, t^\rho). \tag{1.7}$$

Der absolute Komplex $|\mathfrak{d}t^\rho|$ ist dann stets ein $(n-\rho)$-dim. Homologie-Simplex, und N ist in die Zelle $|\mathfrak{d}t^\rho|$ zerspaltet. Der so erhaltene Zellenkomplex aus $|\mathfrak{d}t^\rho|$ ist Dualzellteilung D von K. Man weist leicht nach

$$\mathfrak{r}\mathfrak{d}t^\rho = (-1)^{n-\rho}\mathfrak{d}\mathfrak{r}^* t^\rho. \tag{1.8}$$

$\overset{*}{B}{}^\rho(K)$ wird also durch $\mathfrak{d}$ auf $B^{n-\rho}(D)$ isomorph abgebildet. Andererseits bildet $\mathfrak{o}$ $B^{n-\rho}(D) \cong B^{n-\rho}(N)$ auf $B^{n-\rho}(K)$ isomorph ab. $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ liefert also die Isomorphie von $\overset{*}{B}{}^\rho(K)$ auf $B^{n-\rho}(K)$. Für t^ρ und $t^\sigma (\sigma \leqq \rho)$ definiert man den Schnitt von t^ρ mit $\mathfrak{d}t^\sigma$ durch

$$\mathfrak{d}t^\sigma \times t^\rho = \Sigma[t^\rho, t^{\rho-1}, \ldots, t^\sigma](t^\rho, t^{\rho-1}, \ldots, t^\sigma). \tag{1.9}$$

Hierfür gelten folgende Relationen:

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{d}\Phi^\sigma \times C^\rho) = \mathfrak{d}\Phi^\sigma \times \mathfrak{r}C^\rho + (-1)^{\rho-\sigma}\mathfrak{d}\mathfrak{r}^*\Phi^\sigma \times C^\rho, \tag{1.10}$$

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{d}\Phi^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{d}\Psi^\rho) = \mathfrak{o}\mathfrak{d}(\Phi^\sigma \circ \Psi^\rho). \tag{1.11}$$

Die letzte Formel zeigt, dass die Schnittbildung $\times$ die duale Operation zur Alexanderschen Produktbildung ist.

§ 2. *Tensorfeld und Tensordichte auf analytischen Mannigfaltigkeiten.* Es sei $\mathfrak{M}$ eine n-dim. geschlossene orientierbare analytische Mannigfaltigkeit, K eine Triangulation von $\mathfrak{M}$. Die Lokalkoordinaten eines Punktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit $x^j = x^j(\mathfrak{p}) (j = 1, 2, \ldots, n)$, das Volumelement $dx^1 dx^2 \ldots dx^n$ mit dG. Für das Symbol $\frac{\partial}{\partial x^j}$ schreiben wir einfachheitshalber ∂_j. *Das auf $\mathfrak{M}$ definierte schief-symmetrische Tensorfeld ρ-ten Ranges $\varphi^\rho = \varphi_{jk\ldots l}$ ist als „Intensitätsgrösse" dem ρ-dim. oberen Komplexe in der kombinatorischen Topologie zu analogisieren. Demgegenüber entspricht dem ρ-dim. unteren Komplexe das Feld der schiefsymmetrische Tensordichte $\mathfrak{c}^\rho = \mathfrak{c}^{jk\ldots l}$ ρ-ten Ranges, der bekannten „Quantitätsgrösse". φ^ρ bzw. $\mathfrak{c}^\rho$ kann also ein oberes bzw. unteres Feld bezeichnet werden.* Die Operationen $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}^*, \mathfrak{d}, \times$, etc. in § 1 haben dann folgende Analoga in $\mathfrak{M}$[1]:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{c})^{jk\ldots l} = -\partial_i \mathfrak{r}^{ijk\ldots l}, \tag{2.1}$$

$$(\mathfrak{r}^*\varphi)_{ijk\ldots lm} = \partial_i \varphi_{jk\ldots lm} - \partial_j \varphi_{ik\ldots lm} + \cdots \pm \partial_m \varphi_{ijk\ldots l}, \tag{2.1*}$$

1) Die entsprechenden Formeln in § 1 und § 2 haben die gleiche Nummer.

(2.2) $$(\varphi^\rho, \mathfrak{c}^\rho) = \frac{1}{\rho\,!}\int_{\mathfrak{M}} \varphi_{jk\ldots l}\mathfrak{c}^{jk\ldots l}dG\,,$$

(2.5) $$(\varphi^\rho \circ \psi^\sigma)_{ij\ldots k\,l\ldots m} = \frac{1}{(\rho+\sigma)!}\,\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} pq\cdots r\; s\ldots t \\ ij\ldots k\, l\ldots m\end{pmatrix}\varphi_{pq\ldots r}\psi_{s\ldots t}\,,$$

(2.7) $$(\mathfrak{d}\varphi^\rho)^{ij\ldots k} = \frac{1}{\rho\,!}\,\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 12\cdots\cdots\cdots n \\ ij\ldots k\, l\ldots m\end{pmatrix}\varphi_{l\ldots m}\,,$$

(2.9) $$(\mathfrak{d}\varphi^\sigma \times \mathfrak{c}^\rho)^{ij\ldots k} = \frac{1}{\sigma\,!}\,\varphi_{l\ldots m}\mathfrak{c}^{ij\ldots k\,l\ldots m}\,.$$

Und hierfür gelten genau dieselben Formeln wie in § 1:

(2.6) $$\mathfrak{r}^*(\varphi^\rho \circ \psi^\sigma) = \mathfrak{r}^*\varphi^\rho \circ \psi^\sigma + (-1)^\rho \varphi^\rho \circ \mathfrak{r}^*\psi^\sigma\,,$$

(2.8) $$\mathfrak{r}\mathfrak{d}\varphi^\rho = (-1)^{n-\rho}\mathfrak{d}\mathfrak{r}^*\varphi^\rho\,,$$

(2.10) $$\mathfrak{r}(\mathfrak{d}\varphi^\sigma \times \mathfrak{c}^\rho) = \mathfrak{d}\varphi^\sigma \times \mathfrak{r}\mathfrak{c}^\rho + (-1)^{\rho-\sigma}\mathfrak{d}\mathfrak{r}^*\varphi^\sigma \times \mathfrak{c}^\rho\,.$$

Ist $C^\rho = \Sigma\gamma_t t$ ein algebraischer Teilkomplex von K, so definieren wir das Integral (φ^ρ, C^ρ) von φ^ρ auf C^ρ mit

$$(\varphi^\rho, C^\rho) = \sum_t \gamma_t \frac{1}{\rho\,!}\int_t \varphi_{jk\ldots l}\frac{\partial(x^j x^k \ldots x^l)}{\partial(u^1 u^2 \ldots u^\rho)}\,du^1 du^2 \ldots du^\rho\,,$$

wobei $u^1, u^2, \ldots, u^\rho$ ein Parametersystem auf t ist. Demgegenüber definieren wir das Integral $\mathfrak{c}^{n-\rho}\times C^\rho$ von $\mathfrak{c}^{n-\rho}$ auf C^ρ mit

$$\mathfrak{c}^{n-\rho}\times C^\rho = (\varphi^\rho, C^\rho)\,,$$

wobei $\mathfrak{d}\varphi^\rho = \mathfrak{c}^{n-\rho}$. Führt man das Flächenelement auf C^ρ mit

$$d\mathfrak{o}_{ij\ldots k} = \frac{1}{\rho\,!\,(n-\rho)!}\,\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 12\cdots\cdots\cdots n \\ ij\ldots k\, l\ldots m\end{pmatrix}\frac{\partial(x^l \ldots x^m)}{\partial(u^1 \ldots u^\rho)}\,du^1 \ldots du^\rho$$

ein, so stellt sich $\mathfrak{c}\times C$ als „Oberflächenintegral“

$$\mathfrak{c}\times C = \int_C \mathfrak{c}^{ij\ldots k}d\mathfrak{o}_{ij\ldots k}$$

dar. Der bekannte „*Green-Stokessche Satz*“ drückt sich so aus:

(2.12) $$(\mathfrak{r}^*\varphi, C) = (\varphi, \mathfrak{r}C)\,,$$

(2.13) $$\mathfrak{r}\mathfrak{c}^{n-\rho}\times C^{\rho+1} = (-1)^{n-\rho}\mathfrak{c}^{n-\rho}\times \mathfrak{r}C^{\rho+1}\,.$$

Diese Analogie zwischen kombinatorischer Topologie und Tensortheorie auf analytischen Mannigfaltigkeiten ist nicht nur eine formale, sondern, wie de Rham gezeigt hat, eine im Wesen der Sache liegende[1]. Darauf gehen wir hier aber nicht näher ein, und führen nur das für das folgende benötigte Resultat an:

Satz 1. *Jedem $C \in L(K)$ kann ein unteres Feld $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(C)$ so linear zugeordnet werden, dass folgendes gilt:*

---

1) G. de Rham: Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions, J. Math. pures et appl. **10** (1931), 115–157.

$$\mathfrak{r}\mathfrak{c}(C)=\mathfrak{c}(\mathfrak{r}C)\,, \tag{2.14}$$

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{d}\Phi^\rho)\times C^\rho=(\Phi^\rho, C^\rho)\,. \tag{2.15}$$

Ist dabei $\mathfrak{r}^*\varphi^\rho=0$, *so gilt für* $Z^\rho \in Z^\rho(K)$

$$\big(\varphi^\rho, \mathfrak{c}(Z^\rho)\big)=(\varphi^\rho, Z^\rho)\,. \tag{2.16}$$

Ist umgekehrt ein unteres Feld $\mathfrak{z}^\rho$ *mit* $\mathfrak{r}\mathfrak{z}^\rho=0$ *gegeben, so definiere man*

$$Z^\rho=\mathfrak{o}\mathfrak{d}\{\sum_t(\mathfrak{z}^\rho\times t^{n-\rho})t^{n-\rho}\}$$

Dann gilt $\mathfrak{r}Z^\rho=0$, *und für* φ^ρ *mit* $\mathfrak{r}^*\varphi^\rho=0$

$$(\varphi^\rho, \mathfrak{z}^\rho)=\big(\varphi^\rho, \mathfrak{c}(Z^\rho)\big)\,. \tag{2.17}$$

§ 3. *Harmonische Tensorfelder auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.* Nun sei $\mathfrak{M}$ eine geschlossene orientierbare analytische Mannigfaltigkeit mit der positiv-definiten Metrik $ds^2=g_{jk}dx^jdx^k$, also eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Aus jedem Tensorfeld $c_{jk\ldots l}$ auf $\mathfrak{M}$ entsteht dann ein Feld der Tensordichte $\mathfrak{c}^{jk\ldots l}$, wenn man setzt

$$\mathfrak{c}^{jk\ldots l}=\sqrt{g}\;c^{jk\ldots l}\,, \qquad c^{jk\ldots l}=g^{jp}g^{kq}\ldots g^{lr}c_{pq\ldots r}\,,$$

und so entsteht auch jedes Feld der Tensordiehte. Damit fällt also der Unterschied zwischen den Begriffen Tensor und Tensordichte sozusagen aus, und *man kann jetzt schlechtweg von einem „Feld" φ, von seinem „unteren bzw. oberen Rand" $\mathfrak{r}\varphi$ bzw. $\mathfrak{r}^*\varphi$ sprechen.* Die Definition der Operatoren $\mathfrak{r}$, $\times$, etc. lautet dann[1]

$$(\mathfrak{r}\varphi)^{jk\ldots l}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i\sqrt{g}\;\varphi^{ijk\ldots l}\,, \tag{3.1}$$

$$(\varphi^\rho, c^\rho)=\frac{1}{\rho\,!}\int_{\mathfrak{M}}\varphi_{jk\ldots l}c^{jk\ldots l}\sqrt{g}\;dG\,, \tag{3.2}$$

$$(\mathfrak{d}\varphi^\rho)^{ij\ldots k}=\frac{1}{\rho\,!\sqrt{g}}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}12\ldots\ldots\ldots n\\ ij\cdots k\,l\ldots m\end{pmatrix}\varphi_{l\ldots m}\,, \tag{3.7}$$

$$(\mathfrak{d}\varphi^\sigma\times c^\rho)^{ij\ldots k}=\frac{1}{\sigma\,!}\,\varphi_{l\ldots m}c^{ij\ldots k\;l\ldots m} \tag{3.9}$$

Dann gilt offenbar

$$(\varphi, \mathfrak{r}c)=(\mathfrak{r}^*\varphi, c)\,, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{d}\mathfrak{d}\varphi^\rho=(-1)^{\rho(n-\rho)}\varphi^\rho \tag{3.18}$$

Nunmehr lassen wir als $\varphi_{jk\ldots l}$ nicht nur jede stetige, sondern auch jede nach Lebesgue messbare Funktion zu. Fürht man dann die Norm $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ ein, so bildet die Gesamtheit aller φ^ρ mit $\|\varphi^\rho\|<+\infty$ einen reellen Hilbertschen Raum $\mathfrak{L}^\rho$. Mit $\mathfrak{L}^\rho_\nu$ bezeichnen wir den Teilraum von $\mathfrak{L}^\rho$ der ν-mal stetig differenzierbaren φ^ρ, und setzen

---

1) Die entsprechenden Formeln in § 1, § 2 und § 3 haben die gleiche Nummer.

$(h)_1$ $\qquad \mathfrak{H}^p = [\mathfrak{r}\mathfrak{L}_2^{p+1}]\,,$

$(h)_1^*$ $\qquad \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p = [\mathfrak{r}^*\mathfrak{L}_2^{p-1}]\,,$

(3.4) $\qquad \mathfrak{Z}^p = \mathfrak{L}^p - \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p\,,$

(3.4)* $\qquad \overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^p = \mathfrak{L}^p - \mathfrak{H}^p\,,$

wobei [* *] die abgeschlossene Hülle von * *, und das Minuszeichen – die Bildung des orthogonalen Komplements bedeuten soll. Setzt man nun

$$\mathfrak{E}^p = \mathfrak{Z}^p \frown \overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^p\,,$$

so folgen aus (3.3) folgende Relationen:

$$(3.19)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}^p = \mathfrak{E}^p \oplus \mathfrak{H}^p \oplus \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p\,, \\ \mathfrak{Z}^p = \mathfrak{E}^p \oplus \mathfrak{H}^p\,, \\ \overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^p = \mathfrak{E}^p \oplus \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p\,. \end{cases}$$

Weiterhin bezeichnen wir die Elemente von $\mathfrak{E}^p, \mathfrak{H}^p, \mathfrak{Z}^p, \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p, \overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^p$ allgemein mit e, h, z, h^*, z^*. Für $e \in \mathfrak{E}^p$ gilt das wichtige

Hauptlemma. *Jedes* $e \in \mathfrak{E}^p$ *ist analytisch in* $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Der Beweis dieses Lemmas soll im nachfolgenden § 4 nachgeholt werden. Hier entwickeln wir einige daraus folgenden Tatsachen.

Aus (3.3) folgt offenbar, dass $\varphi \in \mathfrak{L}_1^p$ dann und nur dann dem $\mathfrak{Z}^p$ bzw. $\overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^p$ gehört, wenn $\mathfrak{r}\varphi = 0$ bzw. $\mathfrak{r}^*\varphi = 0$ gilt. *Jedes e aus $\mathfrak{E}^p$ genügt also wegen des Hauptlemmas* $\mathfrak{r}^*e = \mathfrak{r}e = 0$. *Umgekehrt gehört jedes stetig differenzierbare e mit $\mathfrak{r}^*e = \mathfrak{r}e = 0$ zu $\mathfrak{E}^p$, und ist also analytisch. Wir nennen harmonisch jedes Feld e mit $\mathfrak{r}^*e = \mathfrak{r}e = 0$.* $\mathfrak{E}^p$ ist also der Raum aller harmonischen Tensorfelder.

Jedes z schreibt sich nun im Sinne von $\| \;\; \|$ $z = e + \lim \mathfrak{r}\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{L}_2^{p+1}$. Also gilt $\mathfrak{Z}^p \perp \mathfrak{r}^*\mathfrak{L}_1^{p-1}$, da jedes e und jedes $\mathfrak{r}\varphi$ zu $\mathfrak{r}^*\mathfrak{L}_1^{p-1}$ orthogonal ist. Somit erhält man

(h) $\qquad \mathfrak{H}^p = [\mathfrak{r}\mathfrak{L}_1^{p+1}]\,,$

$(h)^*$ $\qquad \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p = [\mathfrak{r}^*\mathfrak{L}_1^{p-1}]\,.$

Sind also φ, ψ stetig differenzierbar, so gilt stets $(\mathfrak{r}^*\varphi, \mathfrak{r}\psi) = 0$[1].

Für $\varphi \in \mathfrak{L}^p$ bezeichnen wir mit $\varphi_{\mathfrak{E}}$ die $\mathfrak{E}$-Komponente von φ. Ist z^* stetig, so gilt für jedes $Z \in Z^p(K)$

$$(3.20)\qquad (z^*, Z) = (z^*_{\mathfrak{E}}, Z).$$

Denn, setzt man $\sqrt{g}\; z = \mathfrak{c}(Z)$, so gilt $(z^* - z^*_{\mathfrak{E}}, Z) = (z^* - z^*_{\mathfrak{E}}, z) = 0$ wegen $z^* - z^*_{\mathfrak{E}} \perp \mathfrak{Z}^p$. Definiert man $e(Z), e(\Phi)$ durch

1) H. Weyl: a. a. O.

$$(3.21)\qquad \begin{cases} e(Z)=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\mathfrak{c}(Z)\right\}_{\mathfrak{E}}, \\ e(\Phi)=\varphi_{\mathfrak{E}}, \qquad \sqrt{g}\;\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{c}(\mathfrak{d}\Phi) \end{cases}$$

für $Z \in \boldsymbol{Z}^\rho(K)$, $\Phi \in \overset{*}{\boldsymbol{Z}}{}^\rho(K)$, so gilt nach (2.15)

$$\big(e(\Phi), e(Z)\big)=\big(\varphi, \mathfrak{c}(Z)\big)=(\varphi, Z)=\mathfrak{c}(\mathfrak{d}\Phi)\times Z=(\Phi, Z)\,,$$

woraus folgt wegen (3.20)

$$(3.22)\qquad \big(e(\Phi), e(Z)\big)=\big(e(\Phi), Z\big)=(\Phi, Z)\,.$$

Die Abbildungen $\Phi \to e(\Phi)$, $Z \to e(Z)$ sind also Isomorphismen von $\overset{*}{\boldsymbol{B}}{}^\rho(K)$, $\boldsymbol{B}^\rho(K)$ in $\mathfrak{E}^\rho$. Nach (2.17) existiert aber für jedes differenzierbare z ein Z mit $(e, z)=(e, Z)$. Gilt also $(e, Z)=0$ für jedes Z, so folgt $e=0$. e bestimmt sich mithin mit seinen Perioden (e, Z) auf Z. Jedes e muss also einem $e(\Phi)$ gleich sein. Somit haben wir den

Satz 2. *Definiert man* $e(Z)$, $e(\Phi)$ *mit* (3.21), *so gilt*

$$(3.22)\qquad \big(e(\Phi), e(Z)\big)=\big(e(\Phi), Z\big)=(\Phi, Z)$$

und die Abbildung $\Phi \to e(\Phi)$ *bzw.* $Z \to e(Z)$ *ist Isomorphismus von* $\overset{*}{\boldsymbol{B}}{}^\rho(K)$ *bzw.* $\boldsymbol{B}^\rho(K)$ *auf* $\mathfrak{E}^\rho$.

Bemerkung 1. Die Formel (3.18) zeigt, dass die Operation $\mathfrak{d}$ die „obere" und „untere" Begriffe direkt vertauscht. Insbesondere ist für harmonisches e auch $\mathfrak{d}e$ harmonisch.

Bemerkung 2. Jedes stetig differenzierbare $h^* \in \overset{*}{\mathfrak{H}}$ lässt sich nach de Rham in der Form $h^*=\mathfrak{r}\varphi$ schreiben. Wir benutzen diese Tatsache im Teil II.

Bemerkung 3. Obige Theorie gilt auch für nicht analytische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, wenn man für $\mathfrak{M}$ die stetige Differenzierbarkeit bis zur genübend hohen Ordnung voraussetzt.

§ 4. *Beweis des Hauptlemmas.* Die ursprüngliche Weylsche Methode zum Beweis des Hauptlemmas stützt sich auf die Bildung der Greenschen Funktion, was im Fall des allgemeinen Riemannschen Raumes erhebliche Schwierigkeit bietet. Wir benutzen also anstatt der Greenschen Funktion die Hadamardsche „Grundlösung" der „Laplaceschen Gleichung" $\Delta\varphi=0$, wodurch die Weylsche Methode auf noch weiteres Feld anwendbar wird.

Beginnen wir mit der „*Greenschen Formel*". Es sei G ein Gebiet (offene Menge) in $\mathfrak{M}$. Wir setzen

$$(\varphi^\rho, c^\rho)_G=\frac{1}{\rho\,!}\int_G \varphi_{jk\ldots l}c^{jk\ldots l}\sqrt{g}\;dG$$

in Verallgemeinerung von $(\varphi, c)=(\varphi, c)_{\mathfrak{M}}$. Schreibt man

$$\varphi^\sigma c^\rho=\mathfrak{d}\varphi^\sigma \times c^\rho=\frac{1}{\sigma\,!}\,\varphi_{l\ldots m}c^{ij\ldots k\;l\ldots m}\,,$$

so gilt

$$(\varphi, c)_G = \int_G \varphi c \sqrt{g}\, dG .$$

Da nach (2.10) $\mathfrak{r}(\varphi^\rho c^{\rho+1}) = \varphi^\rho \cdot \mathfrak{r}c^{\rho+1} - \mathfrak{r}^*\varphi^\rho \cdot c^{\rho+1}$ ist, gilt nach dem Green-Stokesschen Satz

$$(4.1) \qquad (\mathfrak{r}^*\varphi, c)_G - (\varphi, \mathfrak{r}c)_G = \int_\Gamma (\varphi c)^j \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j ,$$

wobei Γ der Rand von G ist, und als genuügend regulär vorausgesetzt ist. Der Laplacesche Operator Δ wird durch

$$-\Delta = \mathfrak{r}\mathfrak{r}^* + \mathfrak{r}^*\mathfrak{r}$$

definiert, und es wird einfachheitshalber gesetzt:

$$\mathfrak{R}(\varphi, \psi) = (\varphi \cdot \mathfrak{r}^*\psi - \mathfrak{r}\psi \cdot \varphi) - (\psi \cdot \mathfrak{r}^*\varphi - \mathfrak{r}\varphi \cdot \psi) .$$

Aus (4.1) folgt dann die „*Greensche Formel*“

$$(4.2) \qquad (\varphi, \Delta\psi)_G - (\Delta\varphi, \psi)_G = \int_\Gamma \mathfrak{R}(\varphi, \psi)^j \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j .$$

$(\Delta\varphi)_{jk\ldots l}$ hat nun folgende Gestalt:

$$(\Delta\varphi)_{jk\ldots l} = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\varphi_{jk\ldots l} + a^{\alpha}{}^{pq\ldots r}_{jk\ldots l}\,\partial_\alpha\varphi_{pq\ldots r} + b^{pq\ldots r}_{jk\ldots l}\,\varphi_{pq\ldots r}$$

wobei a^α und b aus g_{jk} und ihren Ableitungen gebildet werden. Man kann φ als einen Vektor mit Komponenten $\varphi_{jk\ldots l}(j < k < \cdots < l)$ und Δ als einen Operator

$$\Delta = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta + A^\alpha\partial_\alpha + B$$

auf φ auffassen, wobei A^α bzw. B Matrix mit Elementen $a^{\alpha}{}^{pq\ldots r}_{jk\ldots l}$ bzw. $b^{pq\ldots r}_{jk\ldots l}$ ist. Die lokale Grundlösung der Gleichung $\Delta u = 0$ lässt sich dann nach der Hadamardschen Methode konstruieren[1]. Wir zeigen das im einfacheren Fall der ungeraden Dimension n, und verweisen auf das Buch von Hadamard für den anderen Fall: n gerade, sowie für die Konvergenzfrage. Folgende Betrachtungen sind natürlich immer lokal zu führen.

Es sei ξ ein bestimmter Punkt in $\mathfrak{M}$; den geodätischen Abstand zwischen x und ξ bezeichnen wir mit $r(x, \xi)$, und setzen

$$P(x, \xi) = \{r(x, \xi)\}^2 .$$

Schreibt man ferner P_j für $\partial_j P$, so gilt $P^j\partial_j = 2r\dfrac{\partial}{\partial r}$, und $P^jP_j = 4P$.

Setzt man nun

$$u = P^p \sum_{\nu=0}^{\infty} P^\nu u_\nu , \qquad p = -\frac{n-2}{2} ,$$

so gilt

1) Hadamard: Lectures on Cauchy's Problem, Book II, Chap. III.

$$\Delta u = pP^{p-1}\Big(N+4r\frac{\partial}{\partial r}\Big)u_0$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}(p+\nu)P^{p-1+\nu}\Big\{\Big(N+4\nu+4r\frac{\partial}{\partial r}\Big)u_\nu+\frac{1}{p+\nu}\Delta u_{\nu-1}\Big\},$$

wobei N die Matrix $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta P-2n+A^\alpha\partial_\alpha P$ bedeutet. Jetzt kann man u_ν so bestimmen, dass die Koeffizienten von P^λ in oberer Formel alle verschwinden. Dazu setze man nämlich:

$$M=1-\int_0^r\frac{N}{4r}dr+\int_0^r\frac{N}{4r}dr\int_0^r\frac{N}{4r}dr-\cdots$$

und

$$\begin{cases} u_0=M\cdot\sigma\,, \\ u_\nu=-\dfrac{1}{4(p+\nu)}\dfrac{1}{r^\nu}M\displaystyle\int_0^r r^{\nu-1}M^{-1}\Delta u_{\nu-1}dr\,, \qquad (\nu\geqq 1)\,, \end{cases}$$

wobei σ eine willkürliche „Integrationskonstante" ist. Die Funktion $u=P^p\Sigma P^\nu u_\nu$ mit diesem u_ν ist dann die Grundlösung mit der Singularität $r^{2-n}\sigma$. Auf diese Weise beweist man den

Satz 3. *Für jede reguläre analytische Funktion $\sigma_{jk\ldots l}=\sigma_{jk\ldots l}(\xi)$ von ξ hat die Gleichung $\Delta u=0$ eine „Grundlösung" der Gestalt*

$$u_{jk\ldots l}(x,\xi)=r^{2-n}\{\sigma_{jk\ldots l}+\cdots\}+\log r\{\tau_{jk\ldots l}+\cdots\}\,,$$

wobei $\{\sigma_{jk\ldots l}+\cdots\}$ bzw. $\{\tau_{jk\ldots l}+\cdots\}$ eine mit $\sigma_{jk\ldots l}$ bzw. $\tau_{jk\ldots l}$ beginnende Potenzreihe in $x-\xi$ bedeutet, die reguläre analytische Funktionen von ξ als Koeffizienten hat. Für ungerades n tritt das Glied mit $\log r$ *nicht auf*[1].

Wir setzen nun

$$U=\sigma_{jk\ldots l}+\cdots\,,\qquad V=\frac{1}{2}\{\tau_{jk\ldots l}+\cdots\}\,,$$

sodass

$$u=P^pU+(\log P)V\,,\qquad p=-\frac{n-2}{2}\,.$$

Es sei ξ ein Punkt im Gebiet G mit dem Rand Γ, und δ eine kleine positive Grösse. Die geodätische Kugel um ξ mit dem Radius δ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(\delta)$, die Oberfläche von $\mathfrak{K}(\delta)$ mit $S(\delta)$, und das Gebiet $G-\mathfrak{K}(\delta)$ mit $G(\delta)$. Wir wenden dann die Greensche Formel (4.2) auf u,φ in bezug auf dieses $G(\delta)$ an. Um das Resultat zu vereinfachen, berechnen wir zuerst allgemein $\mathfrak{N}(\varphi,u)^j d\mathfrak{o}_j$ auf $S(\delta)$ für die Funktion der Gestalt $w=l(P)W$. Es kommt

$$\mathfrak{N}(\varphi,w)^j d\mathfrak{o}_j=l'(P)(\varphi W)\sqrt{4P}\,d\mathfrak{o}+l(P)\mathfrak{N}(\varphi,W)^j d\mathfrak{o}_j\,,$$

indem man auf $P_j d\mathfrak{o}_k=P_k d\mathfrak{o}_j$ und $P^j d\mathfrak{o}_j=\sqrt{4P}\,d\mathfrak{o}$ beachtet. Näturlich ist hierbei $d\mathfrak{o}=\sqrt{g^{jk}d\mathfrak{o}_j d\mathfrak{o}_k}$. Hieraus folgt

1) Im speziellen Fall: $n=2$, hat ausnahmsweise die Grundlösung die Gestalt: $u(x,\xi)=\log r\cdot\{\sigma+\cdots\}+\{\tau+\cdots\}$.

$$(4.3)\qquad \int_{S(\delta)} \Re(\varphi, w)^j \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j = l'(\delta^2)2\delta \int_{S(\delta)} \varphi W \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}$$

$$+ l(\delta^2) \int_{S(\delta)} \Re(\varphi, W)^j \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j .$$

Wendet man also die Greensche Formel auf $u = P^p U + (\log P) V$ und φ in bezug auf $G(\delta)$ an, schreibt man das Resultat nach (4.3) um, und lässt danach δ nach 0 rücken, so erhält man den

Satz 4. *Bezeichnet man mit* ω *den Oberflächeninhalt der n-dim. Einheitskugel, so gilt*

$$(4.4)\qquad -(n-2)\omega\varphi(\xi)\sigma(\xi) = (\Delta\varphi, u)_G + \int_\Gamma \Re(\varphi, u)^j \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j ,$$

wobei φ *in* $G+\Gamma$ *überall zweimal stetig differenzierbar sein soll. Ist insbesondere* $\Delta\varphi = 0$, *so besteht*

$$(4.5)\qquad \varphi(\xi)\sigma(\xi) = -\frac{1}{(n-2)\omega} \int_\Gamma \Re(\varphi, u)^j \sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j .$$

Die rechte Seite von (4.5) ist aber offenbar eine in G reguläre analytische Funktion von ξ. *Jedes 2-mal stetig differenzierbare* φ *mit* $\Delta\varphi = 0$ *muss also notwendig regulär analytisch sein.*

Ein Feld $e \in \mathfrak{E}^p$ war definitionsgemäss ein solches e, wofür $(e, \mathfrak{r}\varphi) = (e, \mathfrak{r}^*\psi) = 0$ für alle 2-mal stetig differenzierbaren φ, ψ gilt. Es gilt also $(e, \Delta\eta) = 0$ für jedes 3-mal setig differenzierbare η. Der Beweis des Hauptlemmas ist daher in dem des folgenden Satzes enthalten:

Satz 5. *Es sei* ν *eine natürliche Zahl* $\gtreqless 3$. *Genügt* $\varphi \in \mathfrak{L}^p$ *der Gleichung* $(\varphi, \Delta\eta) = 0$ *für jedes* ν*-mal setig differenzierbare* η, *so ist* φ *regulär analytisch und es gilt* $\Delta\varphi = 0$.

Beweis. Ist φ mindestens 2-mal stetig differenzierbar, so gilt

$$(\Delta\varphi, \eta) = (\varphi, \Delta\eta) = 0$$

also $\Delta\varphi = 0$, und mithin muss φ nach dem oben Gesagten regulär analytisch sein. Es genügt daher zu zeigen, dass φ ν-mal stetig differenzierbar ist. Die Frage ist offenbar eine lokale; wir haben nur ein kleines Gebiet G zu betrachten. Es sei

$$u(x, \xi) = P^p U + (\log P) V$$

eine „Grundlösung" um $\xi \in G$. Wir wählen dann eine genügend kleine positive Konstante a, bilden $(\nu+2)$-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\Pi(P)$, $L(P)$ mit

$$\Pi(P) = \begin{cases} P^p & \text{für} \quad r \leqq a \\ 0 & \text{für} \quad r \geqq 2a , \end{cases}$$

$$L(P) = \begin{cases} \log P & \text{für} \quad r \leqq a \\ 0 & \text{für} \quad r \geqq 2a , \end{cases}$$

und setzen

$$\zeta = \Pi(P) U + L(P) V .$$

Ferner wählen wir eine positive Konstante $\beta < \alpha$ und setzen

$$\Pi_\beta(P)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\beta^n}\{n\beta^2-(n-2)P\} & \text{für} \quad r\leqq\beta \\ \Pi(P) & \text{für} \quad r>\beta\,, \end{cases}$$

$$L_\beta(P)=\begin{cases} 2\log\beta-1+\dfrac{P}{\beta^2} & \text{für} \quad r\leqq\beta \\ L(P) & \text{für} \quad r>\beta\,, \end{cases}$$

$$\eta_\beta=\Pi_\beta(P)U+L_\beta(P)V\,.$$

Die so gebildeten Funktionen ζ, η_β ist im ganzen $\mathfrak{M}$ sinnvoll (während $r(x, \xi)$ unr lokal definiert ist); ausserdem ist η_β überall stetig differenzierbar. η_β ist zwar nicht ν-mal stetig differenzierbar; für jede Funktion der Form $w=l(P)W$ gilt aber

$$(4.6) \qquad \Delta w=4l''(P)PW+l'(P)\left\{2n+N+4r\frac{\partial}{\partial r}\right\}W+l(P)\Delta W\,,$$

sodass aus $l(P)\rightarrow l_0(P)$ (Konverganz in geeignetem Sinne!) $\|\Delta w-\Delta w_0\|\rightarrow 0$ folgt; η_β lässt sich also durch ν-mal stetig differenzierbares η so approximieren, dass $\|\Delta\eta-\Delta\eta_\beta\|\rightarrow 0$ wird; man hat nämlich nur Π_β, L_β in η_β durch ν-mal stetig differenzierbare Funktionen zu ersetzen, um die approximierende η zu bilden. Aus $(\varphi, \Delta\eta)=0$ folgt also $(\varphi, \Delta\eta_\beta)=0$. Es gilt aber laut Definition von η_β

$$\Delta\eta_\beta=\Delta\zeta\,, \qquad \text{für} \qquad r\geqq\beta\,,$$

und für $r<\beta$

$$(4.7) \qquad \lim_{\beta\to 0}\beta^n\Delta\eta_\beta=-n(n-2)\sigma \qquad \text{(gleichmässig in } r<\beta)\,,$$

wie man nach (4.6) leicht nachrechnet, indem man auf $N\rightarrow 0$ für $r\rightarrow 0$ achtet. Setzt man nun

$$D(\beta\,;\,x, \xi)=\begin{cases} -\Delta\eta_\beta & \text{für} \quad r(x, \xi)<\beta\,, \\ 0 & \text{für} \quad r(x, \xi)\geqq\beta\,, \end{cases}$$

so schreibt sich $(\varphi, \Delta\eta_\beta)=0$ auch in der Gestalt:

$$(\varphi, D)=(\varphi, \Delta\zeta)\,.$$

Setzt man ferner, um die Sache zu „lokalisieren"

$$\psi(\xi)=\begin{cases} \varphi(\xi) & \text{für} \quad \xi\in G\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt für genügend kleines β

$$(\varphi, D)=(\psi, D)\,,$$

falls $\xi\in G$ ist. Fassen wir nun wieder ψ als Vektor mit $\binom{n}{\rho}$ Komponenten $\psi_{jk\ldots l}(j<k<\cdots<l)$ auf, und entsprechend auch D, σ, usw.

als Vektoren mit Komponenten $D^{jk\dots l}$, $\sigma^{jk\dots l}$, usw., bezeichnen mit $|\psi|$, $|D|$, usw. die „Länge“ $\sqrt{\Sigma|\psi_{jk\dots l}|^2}$, $\sqrt{\Sigma|D^{jk\dots l}|^2}$, usw., und schreiben

$$\sigma(\beta,\xi)=\int D(\beta\,;\,x,\xi)\sqrt{g}\,dG\,,$$

$$(\psi,D)(\xi)=\big(\psi,D(\ ,\xi)\big)\,,$$

so gilt

$$|(\psi,D)(\xi)-\sigma(\beta,\xi)\psi(\xi)|^2\leqq\left\{\int|\psi(x)-\psi(\xi)|\,|D(x,\xi)|\sqrt{g}\,dG\right\}^2$$

$$\leqq\int|\psi(x)-\psi(\xi)|^2\,|D(x,\xi)|\sqrt{g}\,dG\int|D(x,\xi)|\sqrt{g}\,dG\,.$$

Es sei G als genügend klein vorausgesetzt, sodass $r(x,\xi)\leqq 2|x-\xi|$ gilt. Da nach (4.7)

$$\lim_{\beta\to 0}\beta^n D(\beta\,;\,x,\xi)=n(n-2)\sigma \quad \text{(gleichmässig in } r<\beta) \tag{4.8}$$

ist, folgt

$$|(\psi,D)(\xi)-\sigma(\beta,\xi)\psi(\xi)|^2\leqq n^3\omega\beta^{-n}\sigma^2\sqrt{g}\int_{|y|\leqq 2\beta}|\psi(y+\xi)-\psi(\xi)|^2dG_y$$

für genügend kleines β, wenn man die Integrationsvariable x in $y=x-\xi$ transformiert. Daraus folgt weiter

$$\int|(\psi,D)(\xi)-\sigma(\beta,\xi)\psi(\xi)|^2dG_\xi\leqq C\omega\beta^{-n}\int_{|y|\leqq 2\beta}dG_y\int|\psi(y+\xi)-\psi(\xi)|^2dG_\xi\,,$$

wobei C eine Konstante $>\sigma^2n^3\sqrt{g}$ ist. Der Translationsop $T_y\psi(\xi)=\psi(y+\xi)$ auf L^2 hängt aber von y stark-stetig a ; für jedes $\varepsilon>0$ lässt sich also ein β so wählen, dass

$$\int|(\psi,D)(\xi)-\sigma(\beta,\xi)\psi(\xi)|^2dG_\xi<\varepsilon\,.$$

Für $\xi\in G$ gilt aber $(\psi,D)(\xi)=(\varphi,D)(\xi)=(\varphi,\Delta\zeta)(\xi)$ und nach (4.8)

$$\lim_{\beta\to 0}\sigma(\beta,\xi)=(n-2)\omega\sigma(\xi)\,,$$

woraus folgt

$$\int_G|(\varphi,\Delta\zeta)(\xi)-(n-2)\omega\sigma(\xi)\varphi(\xi)|^2dG_\xi=0$$

und mithin

$$\sigma(\xi)\varphi(\xi)=\frac{1}{(n-2)\omega}(\varphi,\Delta\zeta)(\xi)$$

ζ war aber, solange $x\neq\xi$, $(\nu+2)$-mal stetig differenzierbar. $(\varphi,\Delta\zeta)(\xi)$ ist also eine ν-mal stetig differenzierbare Funktion von ξ. $\sigma(\xi)$ war andereseits beliebige reguläre analytische Funktion. ψ muss also ν-mal stetig differenzierbar sein. Somit ist unser Satz, also auch das Hauptlemma vollständig bewiesen.

---

1) K. Kodaira: Über die Gruppe der messbaren Abbildungen, Proc. **17** (1941), 18-23.

Aus diesem Beweis kann man ferner folgende lokale Aussage entnehmen: Sagen wir, *eine Funktion η liege in G*, wenn der abgeschlossene Hülle der Menge $\{x;\ \eta(x)\neq 0\}$ in G enthalten ist, so gilt der

Satz 6. *Ist φ ein in G definiertes nach Lebesgue messbares Feld mit $(\varphi, \varphi)_G < +\infty$, wofür $(\varphi, \Delta\eta)=0$ für alle in G liegende ν-mal stetig differenzierbare η gilt, so ist φ in G reyulär analytisch, und es gilt $\Delta\varphi=0$.*

Aus dem Satz 5 folgt, dass ein $\varphi \in \mathfrak{L}^\rho$ mit $(\varphi, \mathfrak{r}^*\psi)=(\varphi, \mathfrak{r}\chi)=0$ für alle ν-mal stetig differenzierbaren ψ, χ stets harmonich ist. Es gilt also

$$\mathfrak{H}^\rho=[\mathfrak{r}\mathfrak{L}_\nu^{\rho+1}], \qquad \nu=1, 2, 3, \dots,$$

$$\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^\rho=[\mathfrak{r}^*\mathfrak{L}_\nu^{\rho-1}], \qquad \nu=1, 2, 3, \dots .$$

Da andererseits nach dem Green-Stokesschen Satz

$$(\mathfrak{r}^*\varphi, \mathfrak{r}^*\varphi)+(\mathfrak{r}\varphi, \mathfrak{r}\varphi)=-(\Delta\varphi, \varphi)$$

ist, haben wir den

Satz 7. *Genügt φ der Gleichung $\Delta\varphi=0$ im ganzen Raum $\mathfrak{M}$, so gilt $\varphi \in \mathfrak{E}^\rho$, d. h. φ ist ein harmonisches Feld im Sinne von § 3.*

Aus $\Delta\varphi=0$ in einem Teilgebiet G von $\mathfrak{M}$ folgt natürlich nicht, dass $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}^*\varphi=0$ ist. Ein φ mit $\Delta\varphi=0$ nennen wir, um mit „harmonischem Feld" zu unterscheiden, *harmonisches Potential.*

Bemerkung 1. Das u im Satz 3 hängt von σ linear ab:

$$u_{jk\dots l}(x, \xi)=\Xi^{pq\dots r}_{jk\dots l}(x, \xi)\sigma_{pq\dots r}(\xi),$$

sodass (4.5) in Form einer Integralgleichung in φ

$$(4.5)' \qquad \varphi^{pq\dots r}(\xi)=-\frac{\rho}{(n-2)\omega}\int_\Gamma \mathfrak{R}\left(\varphi, \Xi^{pq\dots r}(\ ,\xi)\right)^j\sqrt{g}\ d\mathfrak{o}_j$$

geschrieben wird.

Bemerkung 2. Falls $\mathfrak{M}$ nicht analytisch ist, kann die Reihe für u nicht ad inf. fortgesetzt werden. Wird jedoch $\mathfrak{M}$ als bis zur genügend hohen Ordnung stetig differenzierbar vorausgesetzt, kann man ein u mit 3-mal stetig differenzierbarem Δu bilden. Das genügt aus $(\varphi, \Delta\eta)=0$ die Gleichung $\Delta\varphi=0$ zu folgern.