60. Über eine geometrische Deutung der projektiven Transformationen nicht-symmetrischer affiner Übertragungen.

Von Kentaro YANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1944.)

§ 1. Eine symmetrische affine Übertragung Γ^i_{jk} definiert zwar ein System der Bahnen

$$(1.1)\qquad \frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=\rho\frac{dx^i}{dt}$$

als autoparallele Kurven, aber ein System der durch die Differentialgleichungen (1.1) definierten Bahnen bestimmt eine symmetrische affine Übertragung nicht eindeutig. Jede symmetrische affine Übertragung $\bar{\Gamma}^i_{jk}$, welche dasselbe System der Bahnen wie das durch (1.1) gegebene besitzt, steht zu Γ^i_{jk} in denjenigen Beziehungen[1]

$$(1.2)\qquad \bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+p_j\delta^i_k+p_k\delta^i_j$$

mit irgendeinem kovariantem Vektor p_j, welche die projektive Transformation symmetrischer affiner Übertragungen liefern. Die geometrische Deutung dieser projektiven Transformation ist schon von vielen Autoren[2] aufmerksam gemacht, d. h. die Beziehung (1.2) entspricht einer Veränderung der uneigentlichen Hyperebene.

H. Friesecke[3] und J. M. Thomas[4] bestimmen andererseits diejenigen Transformationen nicht-symmetrischer affiner Übertragungen, bei welchen der Parallelismus erhalten bleibt. Wenn jeder kontravariante, bezüglich einer nicht-symmetrischen affinen Übertragung L^i_{jk} längs einer Kurve parallele Vektor immer auch in bezug auf eine andere nicht-symmetrische affine Übertragung $\bar{L}^i_{jk}$ parallel ist, so ergeben sich die Beziehungen

$$(1.3)\qquad \bar{L}^i_{jk}=L^i_{jk}+2\delta^i_j p_k\,,$$

wobei p_k irgendeinen kovarianten Vektor bedeutet. Sie stellen die Veränderung nicht-symmetrischer affiner Übertragungen dar, bei welchen

1) H. Weyl: Zur Infinitesimalgeometrie. Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Gött. Nachr. (1921), 99–112. L. P. Eisenhart: Spaces with corresponding paths. Proc. Nat. Acad. Sci., **8** (1922), 233–238. O. Veblen: Projective and affine geometry of paths. ibidem, 347–350.

2) L. P. Eisenhart: Non Riemannian Geometry. (1927), § 42. K. Yano: Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy. **24** (1938), 395–464, § 3.

3) H. Friesecke: Vektorübertragung, Richtungsübertragung, Metrik. Math. Ann., **94** (1925), 101–118.

4) J. M. Thomas: Asymmetric displacement of a vector. Trans. of the Amer. Math. Soc., **28** (1926), 658–670.

der Parallelismus erhalten bleibt. Bezeichnen wir mit Γ^i_{jk} den symmetrischen Teil $L^i_{(jk)}$ von L^i_{jk}, so ergibt sich eine Transformation der Form (1.2).

Aus der Form der Gleichungen (1.3) können wir einsehen, dass es beide symmetrischen Übertragungen gar nicht gibt, in bezug auf welche eine längs einer Kurve definierte Richtung parallel ist.

Indem wir nunmehr die Transformation (1.3) verallgemeinern, lässt sich aber eine durch die Beziehungen

$$\bar{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + p_j\delta^i_k + q_k\delta^i_j \tag{1.4}$$

definierte Transformation von L^i_{jk} betrachten, wobei sowohl p_i als q_i zwei beliebige kovariante Vektoren sind. Bezeichnen wir wiederum mit Γ^i_{jk} den symmetrischen Teil $L^i_{(jk)}$ von L^i_{jk}, so erhalten wir auch in diesem Falle die Gleichung derselben Form wie (1.2), und also erkennen wir, dass die Systeme der Bahnen für die beiden nicht-symmetrischen affinen Übertragungen $\bar{L}^i_{jk}$ und L^i_{jk} dieselben sind. Daher heisst die Transformation (1.4) von L^i_{jk} sinngemäss projektive Transformation nicht-symmetrischer affiner Übertragungen[1].

H. Hombu und K. Okada[2] haben vor kurzem eine neue Charakterisierung der projektiven Veränderungen (1.4) nicht-symmetrischer affiner Übertragungen geliefert. Gegeben sei nämlich eine beliebige Pseudoparabel bezüglich einer nicht-symmetrischen affinen Übertragung L^i_{jk}. Wenn es eine und nur eine Pseudoparabel bezüglich einer anderen nicht-symmetrischen affinen Übertragung $\bar{L}^i_{jk}$ gibt, welche in einem beliebigen Punkte des Raumes mit der gegebenen Pseudoparabel in Berührung dritter Ordnung steht, dann müssen die Grössen $\bar{L}^i_{jk}$ und L^i_{jk} durch die Gleichungen der Form (1.4) miteinander verbunden sein.

In der vorliegenden Note sollen wir eine andere Charakterisierung der projektiven Transformation (1.4) nicht-symmetrischer affiner Übertragungen mit Zugrundelegung vom Begriff der torsenbildenden Vektoren längs einer Kurve angeben.

§ 2. Ein auf einer Kurve $x^i(t)$ definiertes Vektorfeld heisst torsenbildend längs der Kurve, wenn es den Differentialgleichungen

$$\frac{dx^i}{dt} + \frac{d\alpha v^i}{dt} + L^i_{jk}\alpha v^j \frac{dx^k}{dt} = \beta v^i \tag{2.1}$$

genügt, wobei α und β zwei geeignete Funktionen des Parameters t bedeuten. Diese Gleichungen zeigen tatsächlich, dass die geometrische Variation des Punktes $x^i + \alpha v^i$ längs der Kurve proportional zu v^i ist, und diese Tatsache versichert uns gerade die Terminologie „torsenbildend“.

Nehmen wir nun an, dass ein und derselbe Vektor v^i auch torsen-

1) V. Hlavaty: Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas „A projective theory of affinely connected manifold.“ Math. Zeitschr., **28** (1928), 142–146, J. A. Schouten und St. Golab: Über projektive Übertragungen und Ableitungen. II. Annali di Mat., **8** (1931), 141–157. V. Hlavatý: Connexion projective et déplacement projectif. ibidem, **12** (1934), 217–294.

2) H. Hombu und K. Okada: On the projective theory of asymmetric connections. Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 357–362.

bildend längs dieser Kurve in bezug auf eine andere nicht-symmetrische affine Übertragung $\bar{L}^i_{jk}$ ist, so gelten die Gleichungen

$$\frac{dx^i}{dt}+\frac{d\bar{\alpha}v^i}{dt}+\bar{L}^i_{jk}\bar{\alpha}v^j\frac{dx^k}{dt}=\bar{\beta}v^i, \tag{2.2}$$

wobei mit $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ wiederum zwei andere geeignete Funktionen von t bezeichnet sind.

Wir sollen nun diejenige Relation herleiten, welche zwischen $\bar{L}^i_{jk}$ und L^i_{jk} dazu bestehen muss, damit der den Differentialgleichungen der Form (2.1) genügende Vektor v^i immer auch den Differentialgleichungen der Form (2.2) genügt.

Indem wir die Gleichungen (2.1) durch α, die Gleichung (2.2) durch $\bar{\alpha}$ dividieren und sodann die Differenz bilden, so ergibt sich

$$\lambda\frac{dx^i}{dt}+\mu v^i+A^i_{jk}v^j\frac{dx^k}{dt}=0, \tag{2.3}$$

worin der Kürze halber

$$\lambda=\frac{1}{\bar{\alpha}}-\frac{1}{\alpha}, \qquad \mu=\frac{d}{dt}\log\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}-\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

und

$$A^i_{jk}=\bar{L}^i_{jk}-L^i_{jk} \tag{2.4}$$

gesetzt sind; hierbei ist A^i_{jk} ein gemischter Tensor dritter Ordnung.

Wenn wir einen Punkt im Raume fixieren, so müssen die Gleichungen (2.3) für beliebige Werte von $\dot{x}^i=\dfrac{dx^i}{dt}$ und von v^i gelten bleiben. Elimination von λ und μ aus (2.3) zieht also nach sich

$$\dot{x}^{[p}v^q A^{r]}_{jk}v^j\dot{x}^k=0^{1)}.$$

Da diese Gleichungen für beliebige Werte von $\dot{x}^i$ gelten müssen, so ergeben sich weiter

$$\delta^{[p}_i v^q A^{r]}_{jk}v^j+\delta^{[p}_k v^q A^{r]}_{ji}v^j=0.$$

Wenn wir in diesen Gleichungen $p=i$ setzen und die so gewonnenen für $p=i=1,2,\dots,n$ addieren, dann erhalten wir

$$(n-1)v^{[q}A^{r]}_{jk}v^j+\delta^{[q}_k v^{r]}A_j v^j-\delta^{[q}_k A^{r]}_{ji}v^j v^i=0,$$

wobei $A_j=A^i_{ji}$ ein kovarianter Vektor ist. Da diese Gleichungen wiederum für beliebige Werte von v^i gelten müssen, so folgen daraus

$$(n-1)\delta^{[q}_i A^{r]}_{jk}+(n-1)\delta^{[q}_j A^{r]}_{ik}+\delta^{[q}_k\delta^{r]}_i A_j+\delta^{[q}_k\delta^{r]}_j A_i-\delta^{[q}_k A^{r]}_{ij}-\delta^{[q}_k A^{r]}_{ji}=0.$$

Setzen wir also darin $q=i$ und addieren sie für $q=i=1,2,\dots,n$, dann erhalten wir weiter

$$(n^2-n-1)A^r_{jk}-A^r_{kj}=[(n-1)A_j-B_j]\delta^r_k+[(n-1)B_k-A_k]\delta^r_j,$$

1) Mit $v^{[qr]}$ und $v^{[pqr]}$ bezeichnen wir hierbei zur Abkürzung $\frac{1}{2!}(v^{qr}-v^{rq})$ bzw. $\frac{1}{3!}(v^{pqr}+v^{qrp}+v^{rpq}-v^{qpr}-v^{rqp}-v^{prq})$.

wobei $B_j = A^i_{ij}$ auch ein kovarianter Vektor ist, und woraus wir die Beziehungen

$$A^i_{jk} = p_j \delta^i_k + q_k \delta^i_j \tag{2.5}$$

mit beiden kovarianten Vektoren

$$p_j = \frac{1}{n^2-1}(nA_j - B_j), \qquad q_j = \frac{1}{n^2-1}(nB_j - A_j)$$

schliessen können. Aus (2.4) und (2.5) gelangen wir folglich zu den gesuchten Beziehungen

$$\bar{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + p_j \delta^i_k + q_k \delta^i_j . \tag{2.6}$$

Umgekehrt, wenn $\bar{L}^i_{jk}$ und L^i_{jk} in den Beziehungen der Form (2.6) stehen, dann ist eine bezüglich L^i_{jk} längs einer Kurve torsenbildende Richtung v^i auch torsenbildend bezüglich $\bar{L}^i_{jk}$.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen, welcher eine geometrische Deutung der projektiven Transformation nicht-symmetrischer affiner Übertragungen angibt.

Satz: Betrachten wir beliebige in jedem Punkte einer beliebigen Kurve definierte Richtungen, welche torsenbildend längs der Kurve bezüglich einer nicht-symmetrischen affinen Übertragung L^i_{jk} *sind, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung, damit diese Richtungen immer bezüglich einer anderen affinen Übertragung* $\bar{L}^i_{jk}$ *auch torsenbildend sind, dass* $\bar{L}^i_{jk}$ *und* L^i_{jk} *in den durch die Gleichungen der Form* (2.6) *gegebenen Beziehungen stehen.*