# 55. Über die Rand- und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von Kunihiko KODAIRA.

Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1944.)

§ 1. *Vorbereitung*[1]. In vorliegender Note betrachten wir lineare elliptische Differentialausdrücke $L(u)$ für die Funktion $u(x^1, x^2, \dots, x^n)$, welche als Eulersche Variationsausdrücke aus einem quadratischen Integral:

$$E(u)=\int\Big(\sum a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^k}+2u\sum b_j\frac{\partial u}{\partial x^j}+cu^2\Big)dx^1dx^2\dots dx^n$$

entstehen, und behandeln die Rand- und Eigenwertprobleme der Differentialausdrücke $L(u)$ für ein beschränktes offenes Gebiet $\mathfrak{M}$ des $(x^1, x^2, \dots, x^n)$-Raumes nach der Weylschen „Methode der orthogonalen Projektion"[2]. Dabei sind $a_{jk}$, $b_j$, $c$ als genügend reguläre, beschränkte Funktionen in $\mathfrak{M}$ vorausgesetzt[3], und es soll eine positive Konstante $k$ geben, sodass in jeder Stelle von $\mathfrak{M}$ für beliebige Parameter $u, u_1, u_2, \dots, u_n$ die Ungleichung:

$$\sum a_{jk}u_ju_k+2u\sum b_ju_j+cu^2\geqq k\sum u_j^2 \tag{1.1}$$

gilt. Es ist zweckmässig, $\mathfrak{M}$ als eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik: $ds^2=g_{jk}dx^jdx^k$ aufzufassen, welche mit $a_{jk}$ mittels der Relation: $\sqrt{g}\,g^{jk}=a_{jk}$ verknüpft wird. Dementsprechend setzen wir $b_j=\sqrt{g}\,p^j$, $c=\sqrt{g}\,q$; es wird also

$$E(u)=\int(g^{jk}\partial_ju\partial_ku+2up^j\partial_ju+qu^2)\sqrt{g}\,dG,$$

wobei $\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ und $dG=dx^1dx^2\dots dx^n$ gesetzt wird. Nun führen wir als Hilfsmittel „*Skalar-Vektoren*" $\Phi, \Psi, \dots$ mit $n+1$ Komponenten:

$$\Phi=(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

ein, und setzen für beliebiges Teilgebiet $G$ aus $\mathfrak{M}$

$$(u, v)_G=\int_G uv\sqrt{g}\,dG,$$

$$(\Phi, \Psi)_G=\int_G(g^{jk}\varphi_j\psi_k+\varphi p^j\psi_j+\psi p^j\varphi_j+q\varphi\psi)\sqrt{g}\,dG.$$

---

1) Vgl. R. Courant und D. Hilbert: Meth. d. Math. Physik II, Kap. VII.

2) H. Weyl: Method of orthogonal projections in potential theory, Duke Math. Journ. Vol. 7 (1940), 411–444.

3) Eine Funktion heisst regulär, wenn sie bis zur genügend hohen Ordnung stetig differenzierbar ist. Vgl. J. Hadamard: Lectures on Cauchy's problem, pp. 11–12.

Für $(u, v)_{\mathfrak{M}}$ bzw. $(\Phi, \Psi)_{\mathfrak{M}}$ schreiben wir $(u, v)$ bzw. $(\Phi, \Psi)$, und setzen $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}$. Ferner definieren wir den Operator $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}^*$ durch

$$\mathfrak{a}u = (u, \partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_n u)\,,$$

bzw.

$$\mathfrak{a}^*\Phi = -\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_j(\sqrt{g}\;\varphi^j) + p^j(\varphi_j - \partial_j\varphi) + q^*\varphi\,,$$

wobei

$$q^* = q - \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_j(\sqrt{g}\;p^j)$$

ist. In dieser Schreibweise ist also $E(u) = (\mathfrak{a}u, \mathfrak{a}u)$. Der Differentialoperator $L$ lässt sich dann schreiben:

$$L = \mathfrak{a}^*\mathfrak{a} = -\Delta + q^*\,, \qquad \Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_j\sqrt{g}\;g^{jk}\partial_k\,, \tag{1.2}$$

und es gelten die „Greenschen Formeln":

$$(\Phi, \mathfrak{a}u)_G = (\mathfrak{a}^*\Phi, u)_G + \int_\Gamma (\varphi^j + p^j\varphi)u\sqrt{g}\;do_j\,, \tag{1.3}$$

$$\big(v, L(u)\big)_G = \big(L(v), u\big)_G + \int_\Gamma (v\partial_j u - u\partial_j v)\sqrt{g}\;do^j\,, \tag{1.4}$$

wobei $\Gamma$ die Oberfläche vom Gebiet $G$ ist und $do_j$ die Flächenemente: $(-1)^{j-1}dx^1dx^2 \ldots dx^{j-1}dx^{j+1} \ldots dx^n$ bedeutet.

Im Vorhergehenden ist für $u, v, \Phi, \ldots$ natürlich geeignete Regularität vorausgesetzt. Nunmehr lassen wir diese Voraussetzung weg, und betrachten alle nach Lebesgue messbaren Funktionen. Es sei $D(u)$ ein selbst adjungierter Differentialausdruck der Form: $-\Delta u + hu$, wobei $h$ eine in $\mathfrak{M}$ genügend reguläre Funktion sein soll. Dann gilt das

Hauptlemma. *Es sei $e$ eine in $\mathfrak{M}$ nach Lebesgue messbare Funktion mit $(e, e) < +\infty$ und es gelte $\big(e, D(\eta)\big) = 0$ für alle in einem Randstreifen*[1] *von $\mathfrak{M}$ verschwindenden 3-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\eta$. Dann ist $e$ in $\mathfrak{M}$ regulär und genügt der Gleichung $D(e) = 0$. Sind ausserdem $g_{jk}$ und $h$ regulär analytisch, so ist auch $e$ regulär analytisch.*

Der Beweis dieses Hauptlemmas soll in § 3 gegeben werden— Nun führen wir die Funktionenräume:

$$\mathfrak{l} = \{u\,;\ \|u\| < +\infty\}$$

und

$$\mathfrak{L} = \{\Phi\,;\ \|\Phi\| < +\infty\,,\quad \|\varphi\| < +\infty\}$$

ein. ($\{*\,;\,E\}$ bezeichnet im allgemeinen die Menge aller $*$ mit der Eigenschaft $E$.) $\mathfrak{l}$ bildet offenbar einen vollständigen Hilbertschen Raum mit der Metrik $\|\ \|$; $\mathfrak{L}$ ist aber in der Metrik $\|\ \|$ nicht mmer vollständig. Wir setzen

1) Vgl. Courant u. Hilbert: Meth. d. Math. Physik, S. 481.

$$Q(\Phi, \Psi)=(\Phi, \Psi)+(\varphi, \psi);$$

in dieser Metrik $Q$ wird dann $\mathfrak{L}$ auch vollständig. Ferner bezeichnen wir den Funktionenraum aller in einem Randstreifen verschwindenden 3-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit $\mathfrak{n}$. Die Räume $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{D}$, die in unserer Theorie zentrale Rolle spielen, definieren wir dann folgendermassen

Definition I. $\mathfrak{Y}$ ist die in $\mathfrak{L}$ gebildete $Q$-abgeschlossene Hülle vom Raum aller $Y=\mathfrak{a}\eta$, $\eta \in \mathfrak{n}$: $\mathfrak{Y}=Q$-abg. Hülle von $\{\mathfrak{a}\eta;\ \eta \in \mathfrak{n}\}$.

Definition II. $\mathfrak{D}$ ist der Raum aller ersten Komponenten $y$ von $Y \in \mathfrak{Y}$.

Es gilt für jedes $\eta \in \mathfrak{n}$ die bekannte Ungleichung[1)]

$$\|\eta\| \leqq C\|\mathfrak{a}\eta\|,$$

wobei $C$ eine von $\eta$ unabhängige Konstante ist. Jedes $Y \in \mathfrak{Y}$ genügt also

$$\|y\| \leqq C\|Y\|, \tag{1.5}$$

woraus folgt

$$\|Y\|^2 \leqq Q(Y, Y) \leqq (1+C^2)\|Y\|^2.$$

In $\mathfrak{Y}$ ist also die Metrik $\| \ \|$ mit der Metrik $Q$ äquivalent. *$\mathfrak{Y}$ ist also im Sinne der Metrik $\| \ \|$ auch ein vollständiger Hilbertscher Raum.* Andererseits gilt es wegen (1.3) für beliebiges $\eta \in \mathfrak{n}$ die Gleichung: $(\eta, \mathfrak{a}^*\Psi)=(\mathfrak{a}\eta, \Psi)$. Jedes $Y \in \mathfrak{Y}$ genügt also für beliebiges stetig **differenzierbares** $\Psi \in \mathfrak{L}$

$$(y, \mathfrak{a}^*\Psi)=(Y, \Psi). \tag{1.6}$$

Hieraus folgt, dass jedes $Y \in \mathfrak{Y}$ durch seine erste Komponente $y$ eindeutig bestimmt wird. Man kann also für jedes $Y \in \mathfrak{Y}$

$$Y=Ay \tag{1.7}$$

schreiben. Der so definierte Operator $A$ ist offenbar ein abgeschlossener linearer Operator, der den überall dichten Teilbereich $\mathfrak{D}$ aus dem Hilbertschen Raum $\mathfrak{l}$ auf dem Hilbertschen Raum $\mathfrak{Y}$ (mit der Metrik $\| \ \|$) abbildet. $A$ ist nichts anderes als die Abschliessung von $\mathfrak{a}$, wenn man $\mathfrak{a}$ als nur in $\mathfrak{n}$ definierten Operator betrachtet. Es gilt wegen (1.5), (1.6)

$$\|y\| \leqq C\|Ay\|, \tag{1.8}$$

$$(y, \mathfrak{a}^*\Psi)=(Ay, \Psi). \tag{1.9}$$

Die letzte Gleichung (1.9) zeigt, dass der adjungierte Operator $A^*$ von $A$ eine Erweiterung von $\mathfrak{a}^*$ ist.

Definition III. Man setzt $H=A^*A$.

Es gilt dann wegen (1.8)

$$\|y\| \leqq C\|Ay\| \leqq C^2\|Hy\|. \tag{1.10}$$

1) Courant u. Hilbert, S. 484

$H$ ist offenbar ein positiv-definiter selbst adjungierter Operator mit dem in $\mathfrak{l}$ überall dichten Definitionsbereich, und eine Erweiterung vom in $\mathfrak{n}$ definierten Operator $L=\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}$. Ferner ist die Abbildung $Ay\to y$ vom $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{l}$, wie nach Rellich gezeigt wird[1], vollstetig. Die Abbildung $Hy\to y$ muss also wegen (1.10) um so mehr vollstetig sein. Damit ist bewiesen der folgende:

Satz 1. *Der Differentialoperator $L$, der als nur in $\mathfrak{n}$ definierter Operator betrachtet werden soll, besitzt eine positiv-definite selbst adjungierte Erweiterung $H$. Die Umkehrung $Hy\to y$ von $H$ ist vollstetig*[2].

§ 2. *Rand- und Eigenwertprobleme.* Das Eigenwertproblem ist schon durch den Satz 1 beinahe gelöst. Es gibt nämlich für $H$ wegen der Vollstetigkeit von $Hy\to y$ ein System der Eigenwerte $\lambda_j$ mit $\lambda_j\to+\infty(j\to\infty)$ und zugehörige Eigenfunktionen $e_j$, die zu $\mathfrak{D}$ gehören und einen vollständigen normierten orthogonalen System aus $\mathfrak{l}$ bilden. Für beliebiges $\eta\in\mathfrak{n}$ gilt dabei

$$\lambda_j(e_j,\eta)=(He_j,\eta)=(e_j\,H\eta)=\big(e_j,L(\eta)\big)\,.$$

Setzt man $D=L-\lambda_j=-\varDelta+q^*-\lambda_j$, dann gilt also $\big(e_j,D(\eta)\big)=0$. Nach dem Hauptlemma muss also $e_j$ in $\mathfrak{M}$ regulär sein, und $L(e_j)-\lambda_je_j=D(e_j)=0$ genügen. Damit ist bewiesen der

Satz 2. *Es gibt für $L$ ein vollständiges normiertes orthogonales System von Eigenfunktionen $e_j$, welche in $\mathfrak{M}$ regulär sind und zu $\mathfrak{D}$ gehören. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_j$ sind alle positiv, und es gilt:* $\lim\limits_{j\to\infty}\lambda_j=+\infty$.

Das Randwertproblem kann nun folgendermassen formuliert werden:[3]

Randwertproblem. *Es sei eine in $\mathfrak{M}$ beschränkte, stetig differenzierbare Funktion $f$ mit $\|\mathfrak{a}f\|<+\infty$ gegeben. Gesucht ist dann eine in $\mathfrak{M}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi$, welche in $\mathfrak{M}$ die Gleichung $L(\varphi)=0$ genügt, und für welche $\varphi-f$ zu $\mathfrak{D}$ gehört.*

Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{Y}$ in Metrik $\|\ \|$, kann man $\mathfrak{a}f$ aus $\mathfrak{L}$ in zweien Teilen zerspalten: $\mathfrak{a}f=\varPhi+Z$, wobei $Z\in\mathfrak{Y}$ und $(\varPhi,Y)=0$ für jedes $Y\in\mathfrak{Y}$ sein soll. Dann ist die erste Komponente $\varphi$ von $\varPhi$ gerade die gesuchte Funktion. Denn: Erstens ist es klar, dass $\varphi-f=-z\in\mathfrak{D}$ ist. Zweitens gilt wegen (1.6) für jedes $\eta\in\mathfrak{n}$

$$\big(\varphi,L(\eta)\big)=(f,\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}\eta)-(z,\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}\eta)=(\mathfrak{a}f,\mathfrak{a}\eta)-(Z,\mathfrak{a}\eta)=(\varPhi,\mathfrak{a}\eta)=0\,.$$

$\varphi$ ist also nach dem Hauptlemma in $\mathfrak{M}$ regulär und genügt $L(\varphi)=0$. Um die Eindeutigkeit von $\varphi$ zu zeigen, sei $\varphi_1$ eine weitere Lösung vom Randwertproblem; man setze $\varphi-\varphi_1=\psi$. Dann gilt wegen $\psi\in\mathfrak{D}$ $\mathfrak{a}\psi\in\mathfrak{Y}$, also $(\mathfrak{a}\psi,\mathfrak{a}\eta)=\big(L(\psi),\eta\big)=0$ für jedes $\eta\in\mathfrak{n}$. Mithin muss $\psi=0$

1) Courant u. Hilbert, S. 489; vgl. auch Rellich: Cött. Nachr. 1930.

2) K. Friedrichs: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren, I. Math. Ann. Bd. 109 (1934), S. 486.

3) Courant u. Hilbert, S. 483.

sein. Es gilt also der

Satz 3. *Randwertprobleme besitzen eine und nur eine Lösung. Für analytische Differentialgleichung ist die Lösung auch regulär analytisch.*

§ 3. *Beweis des Hauptlemmas.* Für den Fall des analytischen Differentialausdrucks der Form $\Delta$, haben wir dieses Hauptlemma in einer vorangehenden Note[1] bewiesen. Die dabei benutzte Methode wird durch eine kleine Modifikation auch für allgemeinen nicht analytischen Differentialausdruck anwendbar.

Es sei $e$ ein Element aus $\mathfrak{l}$ und es gelte für alle $\eta \in \mathfrak{n}$ die Gleichung $\big(e, D(\eta)\big)=0$. Man hat dann zu zeigen, dass $e$ regulär ist und $D(e)=0$ gilt. $D(e)=0$ folgt aber unmittlbar aus $\big(e, D(\eta)\big)=0$, falls $e$ regulär (mindestens zweimal stetig differenzierbar!) ist. Man hat also nur die Regularität von $e$ zu beweisen—. Es sei $r(x, \xi)$ der geodätische Abstand von $x$ bis $\xi$ im Sinne der Metrik: $ds^2=g_{jk}dx^j dx^k$, und $P(x, \xi)=\{r(x, \xi)\}^2$. Man kann dann nach Hadamard[2] eine Funktion der Form:

$$u(x, \xi)=P^p U(x, \xi)+(\log P)V(x, \xi), \quad p=-\frac{n-2}{2},$$

mit regulären $U, V$ mit $U(\xi, \xi)=1$ so konstruieren, dass $D(u)$ in $x$ und $\xi$ auch regulär ist. Wir wählen dann eine genügend kleine positive Konstante $\alpha$, bilden mindestens 4-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\Pi(P)$, $L(P)$ mit

$$\Pi(P)=\begin{cases} P^p & \text{für} \quad r\leqq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad r\geqq 2\alpha, \end{cases}$$

$$L(P)=\begin{cases} \log P & \text{für} \quad r\leqq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad r\geqq 2\alpha, \end{cases}$$

und setzen

$$\zeta(x, \xi)=\Pi(P)U+L(P)V.$$

Ferner wählen wir eine positive Konstante $\beta<\alpha$ und setzen

$$\Pi_\beta(P)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\beta^n}\{n\beta^2-(n-2)P\} & \text{für} \quad r\leqq \beta, \\ \Pi(P) & \text{für} \quad r>\beta, \end{cases}$$

$$L_\beta(P)=\begin{cases} 2\log\beta-1+\dfrac{P}{\beta^2} & \text{für} \quad r\leqq \beta, \\ L(P) & \text{für} \quad r>\beta, \end{cases}$$

$$\eta_\beta(x, \xi)=\Pi_\beta(P)U+L_\beta(P)V.$$

$\eta_\beta(x)=\eta_\beta(x, \xi)$ lässt sich aber durch $\eta \in \mathfrak{n}$ so approximieren, dass

1) K. Kodaira: Über die harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, in dieser Proc., § 4.

2) J. Hadamard: Lectures on Cauchy's Problem, Book II, Chap. III.

$\| D(\eta)-D(\eta_\beta)\| \to 0$ wird[1]. Aus $\big(e, D(\eta)\big)=0$ folgt also $\big(e, D(\eta_\beta)\big)=0$. Setzt man nun

$$\delta(\beta\,;\ x, \xi)=D(\eta_\beta)-D(\zeta)\,,$$

so schreibt sich $\big(e, D(\eta_\beta)\big)=0$ auch in der Gestalt

$$\big(e, \delta(\beta)\big)=-\big(e, D(\zeta)\big)\,.$$

Für $r(x, \xi)>\beta$ ist aber $\delta(\beta\,;\ x, \xi)=0$ und für $r(x, \xi)<\beta$ gilt

$$\lim_{\beta\to 0} \beta^n \delta(\beta\,;\ x, \xi)=n(n-2) \qquad \big(\text{gleichmässig in } r(x, \xi)<\beta\big)\,.$$

Hieraus folgt[2]

$$\text{(3.1)} \qquad \lim_{\beta\to 0} \int \Big| \big(e, \delta(\beta\,;\ \ , \xi)\big)-(n-2)\,\omega e(\xi) \Big|^2 \sqrt{g}\, dG_\xi=0\,,$$

wobei $\omega$ den Oberflächeninhalt der $n$-dim. Einheitskugel bedeutet. Es ist also

$$e(\xi)=-\frac{1}{(n-2)\omega}\,\Big(e, D\big(\zeta(\ \ , \xi)\big)\Big)\,.$$

$D(\zeta)$ ist aber in $x$ und $\xi$ regulär. $e$ muss also auch regulär sein. Im analytischen Fall kann man als $u$ eine Grundlösung von $D(u)=0$ wählen. Für beliebiges Teilgebiet $G$ aus $\mathfrak{M}$ mit dem Rand $\Gamma$ gilt dann

$$e(\xi)=-\frac{1}{(n-2)\omega} \int_\Gamma \{e\partial_j u(\ \ , \xi)-u(\ \ , \xi)\partial_j e\}\sqrt{g}\, do^j\,,$$

falls $\xi \in G$ ist. $e$ ist also regulär analytisch. —Damit ist unser Hauptlemma vollständig bewiesen.

Das Hauptlemma lässt sich auf die folgende Form verallgemeinern:

Satz 4. *Es sei* $D=-\Delta+h$ *und* $t$ *eine in* $\mathfrak{M}$ *reguläre Funktion. Genügt dann* $e \in \mathfrak{l}$ *für jedes* $\eta \in \mathfrak{n}$ *der Gleichung* $\big(e, D(\eta)\big)=(t, \eta)$, *so ist auch* $e$ *in* $\mathfrak{M}$ *regulär und es gilt* $D(e)=t$.

Beweis. Man definiere $\eta_\beta$ und $\zeta$ wie oben. So gilt

$$\big(e, \delta(\beta)\big)=(t, \eta_\beta)-\big(e, D(\zeta)\big)\,,$$

also folgt wegen (3.1)

$$(n-2)\omega e(\xi)+\Big(e, D\big(\zeta(\ \ , \xi)\big)\Big)=\big(t, \zeta(\ \ , \xi)\big)\,.$$

$(t, \zeta)$ lässt sich aber mit regulären Funktionen $F, H$ in der Form

$$\big(t, \zeta(\ \ , \xi)\big)=\int \{\Pi(P)F(\pi, \xi)+L(P)H(\pi, \xi)\}\,d\pi^1 d\pi^2 \dots d\pi^n$$

schreiben, wobei $P=g_{jk}(\xi)\pi^j\pi^k$ ist, wenn man mit $\pi^j$ die normalen

1) Vgl. K. Kodaira: a. a. O.

2) Vgl. K. Kodaira: a. a. O.

Koordinaten um $\xi$ bezeichnet. $(t, \zeta)$ ist also in $\xi$ regulär, $e$ muss also auch regulär sein.

Bemerkung. Mit Hilfe dieses letzten Satzes kann man auch die Randwertaufgabe für die nicht homogene Gleichung $L(\varphi)=t$ lösen: Es sei wieder eine in $\mathfrak{M}$ beschränkte stetig differenzierbare Funktion $f$ mit $\|\mathfrak{a}f\|<+\infty$ gegeben. Man hat dann zu beweisen, dass es eine in $\mathfrak{M}$ reguläre Funktion $\varphi$ mit $L(\varphi)=t$, $\varphi-f\in\mathfrak{D}$ gibt. Es gilt wegen (1.8)

$$|(\mathfrak{a}f, Y)-(t, y)| \leqq (\|\mathfrak{a}f\|+C\|t\|)\|Y\|,$$

also ist $(\mathfrak{a}f, Y)-(t, y)$ eine beschränkte lineare Funktion von $Y$ aus $\mathfrak{Y}$. Es gibt mithin nach dem Riesschen Satz ein $Z\in\mathfrak{Y}$ mit

$$(\mathfrak{a}f, Y)-(t, y)=(Z, Y) \quad \text{für alle} \quad Y\in\mathfrak{Y}\text{[1]}. \tag{3.2}$$

Setzt man nun $\Phi=\mathfrak{a}f-Z$, so ist $\varphi$ gerade die gesuchte Funktion. Denn: Erstens ist es klar, dass $\varphi-f\in\mathfrak{D}$ ist. Zweitens gilt für jedes $\eta\in\mathfrak{n}$ wegen (3.2)

$$\big(\varphi, L(\eta)\big)=(f-z, \mathfrak{a}^*\mathfrak{a}\eta)=(\mathfrak{a}f-Z, \mathfrak{a}\eta)=(t, \eta),$$

also muss $\varphi$ wegen des obigen Satzes regulär sein und der Gleichung $L(\varphi)=t$ genügen.

---

1) Dies bedeutet eine Verallgemeinerung der „Methode der orthogonalen Projektion". Für $t=0$ ist nämlich $Z$ die Projektion von $\mathfrak{a}f$ auf $\mathfrak{Y}$.