75. Über die harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, (*III*).

Von Kunihiko KODAIRA.
Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1944.)

III. Kanonische Basis.

Im Raum der Tensorfelder $\mathfrak{L}^{\rho}$ lassen sich spezielle orthonormale Basis e_k^{ρ}, h_j^{ρ}, $\overset{*}{h}_j^{\rho}$ von folgender Art einführen:

$$\begin{cases} \mathfrak{r}^* e_k^{\rho} = \mathfrak{r} e_k^{\rho} = 0\,, & \\ \mathfrak{r}^* h_j^{\rho} = \varkappa_j^{\rho} \overset{*}{h}_j^{\rho+1}\,, & \mathfrak{r} h_j^{\rho} = 0\,, \\ \mathfrak{r} \overset{*}{h}_j^{\rho+1} = \varkappa_j^{\rho} h_j^{\rho}\,, & \mathfrak{r}^* \overset{*}{h}_j^{\rho+1} = 0\,, \end{cases}$$

mit

$$0 < \varkappa_1^{\rho} \leqq \varkappa_2^{\rho} \leqq \cdots, \qquad \lim_{j\to\infty} \varkappa_j^{\rho} = +\infty\,.$$

In diesem Teil III beweisen wir die Existenz solcher Basis, die wir in Analogie mit kombinatorischen Topologie *kanonische Basis* nennen wollen.

§ 7. *Abschliessungen von Randoperatoren.* Es sei $\mathfrak{M}$ wieder eine geschlossene orientierbare analytische Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wie vorhin bemerkt wurde, hängt die Grundlösung:

$$u(x, \xi) = P^p U + (\log P) V = P^p\{\sigma + \cdots\} + \log r \cdot \{\tau + \cdots\}$$

von $\Delta u = 0$ um ξ von σ linear ab. Also kann man

$$U_{jk\ldots l} = \frac{1}{\rho\,!}\; U_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x, \xi)\sigma_{\lambda\mu\ldots\nu}(\xi)\,,$$

$$V_{jk\ldots l} = \frac{1}{\rho\,!}\; V_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x, \xi)\sigma_{\lambda\mu\ldots\nu}(\xi)$$

schreiben, wobei ρ den Rang von u bedeutet, und $U_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}$, $V_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}$ in $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ schiefsymmetrisch sind. u lässt sich dann so darstellen[1]:

$$u_{jk\ldots l}(x, \xi) = \frac{1}{\rho\,!}\; \Xi_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x, \xi)\sigma_{\lambda\mu\ldots\nu}(\xi)$$

mit

$$\Xi_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x, \xi) = P^p U_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x, \xi) + (\log P) V_{jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x, \xi)\,.$$

Wir definieren nun $\Pi(P)$, $L(P)$, $\Pi_\beta(P)$, $L_\beta(P)$ wie im § 4, und setzen

---

1) Vgl. § 4, Bemerkung 1. Ξ in diesem § ist ρ !-mal so gross als Ξ in § 4.

$$Z^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)=\Pi(P)U^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)+L(P)V^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)\,,$$
$$Y_{\beta jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x,\xi)=\Pi_\beta(P)U^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)+L_\beta(P)V^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)\,,$$
$$D_{\beta jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x,\xi)=\Delta Z^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)-\Delta Y_{\beta jk\ldots l}^{\lambda\mu\ldots\nu}(x,\xi)\,.$$

Ξ, Z, Y_β, etc. werden bei Koordinatentransformationen von ξ wie Tensoren mit Indizen $\lambda,\mu,\ldots,\nu$ transformiert. Bezeichnet man im allgemeinen solche Grösse mit $\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)$, so ist das innere Produkt

$$\big(\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu}(\ ,\xi),\varphi\big)=\frac{1}{\rho\,!}\int\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)\varphi^{jk\ldots l}(x)\sqrt{g}\;dG_x$$

ein Tensorfeld mit Indizen $\lambda,\mu,\ldots,\nu$. Wir bezeichnen dieses Feld: $\big(\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu}(\ ,\xi),\varphi\big)$ mit $\Lambda(\varphi)$, und die „Integraltransformation" $\varphi\to\Lambda(\varphi)$ kurz mit Λ. Nun setzen wir

$$|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)=\frac{1}{\rho\,!}\sqrt{\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}\Lambda^{jk\ldots l}_{\lambda\mu\ldots\nu}}\,,$$

wobei natürlich

$$\Lambda^{jk\ldots l}_{\lambda\mu\ldots\nu}(x,\xi)=g^{jp}(x)\ldots g^{lq}(x)g_{\lambda\alpha}(\xi)\ldots g_{\nu\beta}(\xi)\Lambda^{\alpha\ldots\beta}_{p\ldots q}(x,\xi)$$

bedeuten soll. Dann gilt das

Lemma 1. *Die Norm* $|||\,\Lambda\,|||$ *vom Operator* Λ *genügt der Ungleichung*

$$(7.1)\quad |||\,\Lambda\,|||^2\leqq\binom{n}{\rho}\sup_\xi\int|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\sqrt{g}\,(x)dG_x\cdot\sup_x\int|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\sqrt{g}\,(\xi)dG_\xi\,.$$

Λ ist also beschränkt, wenn $\int|\,\Lambda\,|\sqrt{g}\;dG_x$ und $\int|\,\Lambda\,|\sqrt{g}\;dG_\xi$ beschränkt sind. Ist insbesondere $\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu}_{jk\ldots l}(x,\xi)$ in x und ξ überall stetig, so ist Λ wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{M}$ vollstetig.

Beweis des Lemmas 1. Einfachheitshalber setzen wir wie im § 4 $\varphi^2=\frac{1}{\rho\,!}\,\varphi_{jk\ldots l}\varphi^{jk\ldots l}$ Dann gilt

$$|\,\Lambda(\varphi)^{\lambda\mu\ldots\nu}(\xi)\,|^2\leqq\int\varphi^2\sqrt{g}(\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu})^2\;dG_x\cdot\int\sqrt{g(\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu})^2}\;dG_x\,.$$

Wählt man die Koordinaten in der Umgebung von ξ so, dass $g_{\lambda\nu}(\xi)=\delta_{\lambda\nu}$ wird, gilt also wegen der Ungleichung: $(\Lambda^{\lambda\mu\ldots\nu})^2\leqq\{|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\}^2$

$$\{\Lambda(\varphi)(\xi)\}^2=\frac{1}{\rho\,!}\sum|\,\Lambda(\varphi)^{\lambda\mu\ldots\nu}(\xi)\,|^2\leqq\binom{n}{\rho}k\int\varphi^2\,|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\sqrt{g}\;dG_x\,,$$

wobei $k=\sup\limits_\xi\int|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\sqrt{g}\;dG_x$ gesetzt wird. Es ist also

$$\|\,\Lambda(\varphi)\,\|^2=\int\{\Lambda(\varphi)(\xi)\}^2\sqrt{g}\;dG_\xi\leqq\binom{n}{\rho}k\int\varphi^2(x)\sqrt{g}\;dG_x\int|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\sqrt{g}\,dG_\xi$$
$$\leqq\binom{n}{\rho}k\,\sup_x\int|\,\Lambda\,|\,(x,\xi)\sqrt{g}\;dG_\xi\cdot\int\varphi^2(x)\sqrt{g}\;dG_x\,,$$

woraus die Ungleichung (7.1) folgt.

Nun betrachten wir die Operatoren D_β, $\mathfrak{r}^*Z$, $\mathfrak{r}Y_\beta$, etc. $D_{\beta jk\dots l}^{\lambda\mu\dots\nu}(x,\xi)$ ist beschränkt; $(\mathfrak{r}^*Y_\beta{}^{\lambda\mu\dots\nu})_{jk\dots lm}(x,\xi)$ und $(\mathfrak{r}Y_\beta{}^{\lambda\mu\dots\nu})_{k\dots l}(x,\xi)$ sind überall stetig. D_β, $\mathfrak{r}^*Y_\beta$ und $\mathfrak{r}Y_\beta$ sind also beschränkte Operatoren; $\mathfrak{r}^*Y_\beta$ und $\mathfrak{r}Y_\beta$ sind sogar vollstetig. Es gilt aber

$$|\,\mathfrak{r}Z-\mathfrak{r}Y_\beta\,|(x,\xi)\begin{cases} =0 & \text{für} \quad r(x,\xi)>\beta\,, \\ \leqq Cr^{1-n} & \text{für} \quad r(x,\xi)\leqq\beta\,, \end{cases}$$

wobei C eine von β unabhängige Konstante ist. Also ist wegen des Lemmas 1

$$\lim_{\beta\to0}|||\,\mathfrak{r}Z-\mathfrak{r}Y_\beta\,|||=0\,. \tag{7.2}$$

Ebenso gilt

$$\lim_{\beta\to0}|||\,\mathfrak{r}^*Z-\mathfrak{r}^*Y_\beta\,|||=0\,. \tag{7.2*}$$

$\mathfrak{r}Z$ und $\mathfrak{r}^*Z$ sind mithin auch beschränkt. Im allgemeinen ist aber, wie man leicht einsieht, ein beschränkter Operator vollstetig, wenn er durch einen vollstetigen nach der Norm $|||\ \ |||$ beliebig gut approximiert werden kann. Also gilt das

Lemma 2. *Die Transformation $\mathfrak{r}Z$ bzw. $\mathfrak{r}^*Z$ ist vollstetig.*

Es gilt andererseits, wie wir im § 4 bewiesen haben, für jedes genügend kleine Gebiet G

$$\lim_{\beta\to0}\int_G\Big|\big(D_\beta{}^{\lambda\mu\dots\nu}(\ ,\xi),\varphi\big)-(n-2)\omega\varphi^{\lambda\mu\dots\nu}(\xi)\Big|^2dG_\xi=0\,.$$

Da $\mathfrak{M}$ durch endlich viele solche G überdeckt wird, gilt

$$\lim_{\beta\to0}\|\,D_\beta(\varphi)-(n-2)\omega\varphi\,\|=0\,. \tag{7.3}$$

Es ist also $\lim D_\beta=(n-2)\omega$ *im Sinne der starken Topologie.*

Lemma 3. *Für jedes ν-mal stetig differenzierbare φ sind* $(\mathfrak{r}Z)(\varphi)$ *und* $(\mathfrak{r}^*Z)(\varphi)$ *auch ν-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Wir führen „orthonormale" Koordinaten $y_1, y_2, \cdots, y_n$ um ξ ein, sodass x^j als eine analytische Funktion $x^j(y,\xi)$ von y und ξ dargestellt wird, und $P(x,\xi)=\sum_{k=1}^n y_k^2$ wird. Dann ist

$$Z_{jk\dots l}^{\lambda\mu\dots\nu}=H(\Sigma y_k^2)U_{jk\dots l}^{\lambda\mu\dots\nu}\big(x(y,\xi),\xi\big)+L(\Sigma y_k^2)V_{jk\dots l}^{\lambda\mu\dots\nu}\big(x(y,\xi),\xi\big)\,.$$

Jedes $\sqrt{g}\,(\mathfrak{r}^*Z^{\lambda\mu\dots\nu})_{jk\dots lm}$ bzw. $\sqrt{g}\,(\mathfrak{r}Z^{\lambda\mu\dots\nu})_{k\dots l}$ lässt sich also im Koordinatensystem $\{y_k\}$ als eine Summe von endlich vielen Funktionen der Form $F(y)H(y,\xi)$ darstellen, wobei $H(y,\xi)$ in y und ξ regulär analytisch ist, $F(y)=O(r^{1-n})$, und für $r\geqq 2a$ $F(y)=0$ ist. (Man beachte, dass für $r\geqq 2a$ $H(P)=L(P)=0$ ist.) $(\mathfrak{r}Z)(\varphi)$ bzw. $(\mathfrak{r}^*Z)(\varphi)$ hat also die Form

$$\sum\int F(y)H(y,\xi)\varphi\big(x(y,\xi)\big)dG_y\,;$$

hieraus folgert man leicht unsere Behauptung, indem man auf $\int|F|\,dG_y<+\infty$ achtet.

Für jedes $\varphi \in \mathfrak{L}^\rho$ bezeichnen wir wie im § 3 seine $\mathfrak{E}^\rho$-, $\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^\rho$- bzw. $\mathfrak{H}^\rho$-Komponente mit $\varphi_{\mathfrak{E}}$, $\varphi_{\mathfrak{H}}^*$ bzw. $\varphi_{\mathfrak{H}}$. $\varphi_{\mathfrak{E}}$ ist dann immer überall regulär analytisch, wie wir im § 3 bewiesen haben. Es gilt nun der

Satz 12. *Ist φ $(\nu+1)$-mal stetig differenzierbar, so sind $\varphi_{\mathfrak{H}}^*$ und $\varphi_{\mathfrak{H}}$ ν-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Der Green-Stokessche Satz $(\mathfrak{r}^*\varphi, \psi)=(\varphi, \mathfrak{r}\psi)$ gilt auch für stückweise glatte φ, ψ. Es gilt mithin

$$-(\Delta Y_\beta, \varphi_{\mathfrak{H}})=(\mathfrak{r}\mathfrak{r}^* Y_\beta, \varphi_{\mathfrak{H}})=(\mathfrak{r}\mathfrak{r}^* Y_\beta, \varphi)=(\mathfrak{r}^* Y_\beta, \mathfrak{r}^*\varphi)\,;$$

also ist

$$D_\beta(\varphi_{\mathfrak{H}})=(\Delta Z)(\varphi_{\mathfrak{H}})-(\Delta Y_\beta)(\varphi_{\mathfrak{H}})=(\Delta Z)(\varphi_{\mathfrak{H}})-(\mathfrak{r}^* Y_\beta)(\mathfrak{r}^*\varphi)\,.$$

Hieraus folgt wegen (7.2)*, (7.3)

$$(n-2)\omega\varphi_{\mathfrak{H}}=(\Delta Z)(\varphi_{\mathfrak{H}})-(\mathfrak{r}^*Z)(\mathfrak{r}^*\varphi)\,.$$

Man kann aber Z von vornherein so wählen, dass $\Delta Z(x, \xi)$ in x und ξ überall ν-mal stetig differenzierbar ist. $\varphi_{\mathfrak{H}}$ muss also auch wegen des Lemmas 3 ν-mal stetig differenzierbar sein.

Für beliebigen Funktionenraum $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir nun im allgemeinen mit $\mathfrak{F}_\nu$ den Teilraum aller ν-mal stetig differenzierbaren Funktionen aus $\mathfrak{F}$. Dann gilt wegen des obigen Satzes

$$[\mathfrak{r}\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^{\rho+1}_\nu]\subseteq[\mathfrak{r}\mathfrak{L}^{\rho+1}_\nu]=\mathfrak{H}^\rho=[\mathfrak{r}\mathfrak{L}^{\rho+1}_{\nu+1}]\subseteq[\mathfrak{r}\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^{\rho+1}_\nu]\,.$$

Es ist nämlich

$$\mathfrak{H}^\rho=[\mathfrak{r}\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^{\rho+1}_\nu]\,, \qquad \nu=1,2,3\dots\,, \tag{7.4}$$

ebenso gilt

$$\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^\rho=[\mathfrak{r}^*\mathfrak{H}^{\rho-1}_\nu]\,, \qquad \nu=1,2,3\dots\,. \tag{7.4*}$$

Nunmehr betrachten wir fest gewählte $\mathfrak{H}^\rho$, $\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^{\rho+1}$, und setzen einfachheitshalber $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^\rho$, $\mathfrak{H}^*=\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^{\rho+1}$. Die Elemente von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}^*$ seien im allgemeinen mit h bzw. h^* bezeichnet. Es sei R die Abschliessung $[\mathfrak{r}]$ des Operators $\mathfrak{r}$, der $\mathfrak{H}_1^*$ aus $\mathfrak{H}^*$ in $\mathfrak{H}$ abbildet. Ebenso sei $R^*=[\mathfrak{r}^*]$. Dann gelten

$$(Rh^*, \varphi)=(h^*, \mathfrak{r}^*\varphi)\,, \tag{7.5}$$

$$(R^*h, \psi)=(h, \mathfrak{r}\psi) \tag{7.5*}$$

für alle stückweise glatte φ, ψ, und

$$(Rh^*, h)=(h^*, R^*h)\,. \tag{7.6}$$

Aus (7.5) bzw. (7.5)* folgt, dass die Umkehrung $Rh^*\to h^*$ bzw. $R^*h\to h$ eindeutig ist. *Die Abbildung $Rh^*\to h^*$ bzw. $R^*h\to h$ ist sogar vollstetig.* Denn: Aus (7.5) folgt $(\Delta Y_\beta, h^*)=-(\mathfrak{r}^*\mathfrak{r}Y_\beta, h^*)=-(\mathfrak{r}Y_\beta, Rh^*)$; also ist $D_\beta(h^*)=(\Delta Z)(h^*)+(\mathfrak{r}Y_\beta)(Rh^*)$. Es gilt mithin wegen (7.2), (7.3)

$$(n-2)\omega h^*-(\Delta Z)(h^*)=(\mathfrak{r}Z)\,(Rh^*)\,. \tag{7.7}$$

Man hat also nur noch zu zeigen, dass es eine Konstante γ mit

$$\|h^*\| \leqq \gamma \|Rh^*\|$$

gibt, da ΔZ und $\mathfrak{r}Z$ vollstetig sind. Zu diesem Zweck sei $\{h_j^*\}$ eine Folge mit $\|h_j^*\|=1$, $\|Rh_j^*\| \rightarrow 0$ $(j \rightarrow \infty)$. Dann wäre

$$\|(n-2)\omega h_j^* - (\Delta Z)(h_j^*)\| \rightarrow 0 \qquad (j \rightarrow \infty);$$

also liesse sich aus $\{h_j^*\}$ eine konvergente Teilfolge wählen. Ihre Limes h^* genügte dann $\|h^*\|=1$, $\|Rh^*\|=0$, gegen der Eindeutigkeit von $Rh^* \rightarrow h^*$ —. Jedes $h \in \mathfrak{H}$ lässt sich nach (7.4) als $\lim \mathfrak{r}h^*$ darstellen. Wegen der Vollstetigkeit von $Rh^* \rightarrow h^*$ muss h also einem Rh^* gleich sein. *Der Wertbereich von R stimmt mithin mit dem ganzen Raum $\mathfrak{H}$ überein. Der Wertbereich von R^* ist ebenso der ganze Raum $\mathfrak{H}^*$.* Aus (7.6) kann man also leicht zeigen, dass R^* eben der adjungierte Operator von R ist. Damit bewiesen ist der

Satz 13. *Die Abschliessung R^* von $\mathfrak{r}^*$ ist der adjungierte Operator der Abschliessung R von $\mathfrak{r}$. Die Umkehrung: $Rh^* \rightarrow h^*$ bzw. $R^*h \rightarrow h$ ist eindeutig und vollstetig.*

Jetzt kann man das in der Bemerkung 2 im § 3 angeführte de Rhamsche Resultat leicht beweisen. Aus (7.7) folgt, dass für beliebiges ν-mal stetig differenzierbares Rh^* h^* auch ν-mal stetig differenzierbar ist. Es gilt also der de Rhamsche

Satz 14. *Jedes ν-mal stetig differenzierbare $h^* \in \mathfrak{H}^*$ bzw. $h \in \mathfrak{H}$ lässt sich mit einem eindeutig bestimmten ν-mal stetig differenzierbaren $\varphi \in \mathfrak{H}$ bzw. $\varphi^* \in \mathfrak{H}^*$ in der Form $h^*=\mathfrak{r}^*\varphi$ bzw. $h=\mathfrak{r}\varphi^*$ schreiben.*

§ 8. *Kanonische Basis.* Das Hauptlemma in § 3 lässt sich auf die folgende Form verallgemeinern:

Lemma 4. *φ sei ein Element aus $\mathfrak{L}^p$ und genüge der Gleichung $(\varphi, \Delta\eta)+\lambda(\varphi, \eta)=0$ für beliebiges 3-mal stetig differenzierbares η, wobei λ eine feste Konstante bedeutet. Dann ist φ überall regulär analytisch und genügt der Gleichung $\Delta\varphi+\lambda\varphi=0$.*

Der Beweis dieses Lemmas verläuft ganz parallel zu dem im § 4; dabei hat man nur als u die Grundlösung von $(\Delta+\lambda)u=0$ zu nehmen[1].

Nun setzen wir $L=RR^*$. L ist dann ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator auf $\mathfrak{H}$, und die Umkehrung L^{-1} ist vollstetig, wie man nach dem Satz 13 leicht einsehen kann. Es gibt also ein System der Eigenfunktionen h_j von L, die ein vollständiges normiertes orthogonales System von $\mathfrak{H}$ bilden. Die zugehörigen Eigenwerte λ_j sind alle positiv, und es gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j=+\infty$. Für beliebiges 3-mal stetig differenzierbares η gilt dabei wegen (7.5), (7.5)*

$$-(h_j, \Delta\eta)=(h_j, \mathfrak{r}\mathfrak{r}^*\eta)=(Lh_j, \eta)=\lambda_j(h_j, \eta).$$

Nach dem Lemma 4 muss also h_j regulär analytisch sein und der Gleichung $-\Delta h_j=\lambda_j h_j$ genügen. Da aber $\mathfrak{r}h_j=0$ ist, gilt

$$\mathfrak{r}\mathfrak{r}^*h_j=\lambda_j h_j. \tag{8.1}$$

1) Vgl. K. Kodaira: Über die Rand- und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in dieser Proc., § 3.

Wir setzen $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j}$ und definieren h_j^* durch $\varkappa_j h_j^* = \mathfrak{r}^* h_j$. Dann gilt offenbar $\mathfrak{r} h_j^* = \varkappa_j h_j$, und h_j^* bilden ein vollständiges normiertes orthogonales System von $\mathfrak{H}^*$. Damit bewiesen ist der

Satz 15. *Für $\mathfrak{H}^\rho$ bzw. $\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^\rho$ gibt es ein vollständiges normiertes orthogonales System $\{h_j^\rho\}$ bzw. $\{\overset{*}{h}{}_j^\rho\}$:*

$$\mathfrak{H}^\rho = [h_1^\rho, h_2^\rho, h_3^\rho, \ldots],$$

$$\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^\rho = [\overset{*}{h}{}_1^\rho, \overset{*}{h}{}_2^\rho, \overset{*}{h}{}_3^\rho, \ldots].$$

h_j^ρ und $\overset{*}{h}{}_j^\rho$ sind dabei alle regulär analytisch, und es gibt die Konstanten $\varkappa_j^\rho$ mit

$$0 < \varkappa_1^\rho \leqq \varkappa_2^\rho \leqq \varkappa_3^\rho \leqq \cdots, \qquad \varkappa_j^\rho \to +\infty \ (j \to \infty),$$

sodass jedes h_j^ρ mit $\overset{*}{h}{}_j^{\rho+1}$ durch die Gleichungen

$$\text{(8.2)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{r}^* h_j^\rho = \varkappa_j^\rho \overset{*}{h}{}_j^{\rho+1}, \\ \mathfrak{r} \overset{*}{h}{}_j^{\rho+1} = \varkappa_j^\rho h_j^\rho \end{cases}$$

verknüpft wird.

Eine normierte orthogonale Basis für $\mathfrak{E}^\rho$ sei mit $\{e_k^\rho\}$ bezeichnet. e_k^ρ, h_j^ρ und $\overset{*}{h}{}_j^\rho$ bilden dann eine normierte orthogonale Basis für $\mathfrak{L}^\rho$:

$$\text{(8.3)} \qquad \mathfrak{L}^\rho = [e_1^\rho, e_2^\rho, \ldots, e_p^\rho, h_1^\rho, h_2^\rho, \ldots, \overset{*}{h}{}_1^\rho, \overset{*}{h}{}_2^\rho, \ldots].$$

Wir nennen sie *kanonische Basis. Es gelten offenbar folgende Gleichungen, die sämtliche Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen von $\varDelta$ angeben :*

$$\text{(8.4)} \qquad \begin{cases} -\varDelta e_k^\rho = 0, \\ -\varDelta h_j^\rho = (\varkappa_j^\rho)^2 h_j^\rho, \\ -\varDelta \overset{*}{h}{}_j^\rho = (\varkappa_j^{\rho-1})^2 \overset{*}{h}{}_j^\rho. \end{cases}$$