PAPERS COMMUNICATED

85. *Les anneaux des opérateurs et les dimensions.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1944.)

Quand nous envisageons les anneaux des opérateurs d'un espace linéaire normé et complet, nous trouvons les diverses problèmes très importants et un de ceux est d'introduire la notion des dimensions sur les anneaux des opérateurs. L'importance de ce problème est au premier enoncé pour l'espace hilbertien par MM. J. v. Neumann et F. J. Murray[1] et il est résolu complétement par eux pour ce cas. Or, ce problème est encore pour le cas général ouvert et donc nous le discutons dans cette note.

1. Etant donné un espace $\mathfrak{B}$ linéaire, normé et complet, nous désignons par $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires et définis sur $\mathfrak{B}$ tout entier, et nous introduissons sur celui-ci quelques topologies, par exemple, celle uniforme, celle forte, celle faible, etc..... Quand un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ remplit les conditions suivantes:

1) l'opérateur identique I appartient à $\mathcal{M}$,
2) pour deux opérateurs A et B de $\mathcal{M}$, $\alpha A+\beta B$, où α et β désignent les nombres, et AB appartinnent aussi à $\mathcal{M}$,
3) $\mathcal{M}$ est fermé par rapport à quelque topologie,

nous l'appelons un anneau des opérateurs sur $\mathfrak{B}$. En particulier, quand tous les opérateurs de $\mathcal{M}$ sont bornés, nous dirons qu'il est borné et sinon, qu'il est non borné. Nous désignons alors par $\mathscr{R}(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les opérateurs bornés de $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$. Il est évidemment un anneau borné des opérateurs.

2. Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$, nous désignons par $\mathcal{M}'$ (et $\mathcal{M}^0$) l'ensemble de tous les opérateurs A de $\mathscr{R}(\mathfrak{B})$ $\big($et $\mathcal{O}(\mathfrak{B})\big)$ tels qu'on ait $AX=XA$ pour tout X de $\mathcal{M}$, et nous les appelons le commutateur borné (celui non borné) de $\mathcal{M}$.

(2.1) $\mathcal{M}'=\mathcal{M}^0\frown\mathscr{R}(\mathfrak{B})$ et donc $\mathcal{M}'\leqq\mathcal{M}^0$.

(2.2) $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}^0$ sont respectivement l'anneau borné et celui non borné par rapport à la topologie faible.

(2.3) $\mathcal{M}\leqq\mathcal{N}\leqq\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{N}'\leqq\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}^0\leqq\mathcal{M}^0$.

(2.4) Quand nous posons $\mathcal{M}''=(\mathcal{M}')'$, $\mathcal{M}'''=(\mathcal{M}'')'$, ..., $\mathcal{M}^{(n+1)}=(\mathcal{M}^{(n)})'$ ..., et $\mathcal{M}^{00}=(\mathcal{M}^0)^0$, $\mathcal{M}^{000}=(\mathcal{M}^{00})^0$, ..., $\mathcal{M}^{[n+1]}=(\mathcal{M}^{[n]})^0$, nous avons $\mathcal{M}'=\mathcal{M}^{(2n+1)}$, $\mathcal{M}''=\mathcal{M}^{(2n)}$, $\mathcal{M}^0=\mathcal{M}^{[2n+1]}$ et $\mathcal{M}^{00}=\mathcal{M}^{[2n]}$.

---

1) J. v. Neumann et F. J. Murray, On rings of operators, Ann. Math., **37** (1936).

(2.5) $\mathcal{M}_k \leqq \mathcal{O}(\mathfrak{B})$ $(k=1,2,\dots,n)$ entrainent

$$(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n)' = \mathcal{M}_1' \cap \mathcal{M}_2' \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n' \text{ [1]}$$

et de même pour les commutateurs non bornés.

En effet, $\mathcal{M}_k \leqq \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n$ entraine $\mathcal{M}_k' \geqq (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n)'$ et donc $\mathcal{M}_1' \cap \mathcal{M}_2' \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n' \geqq (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n)'$. En autre part, $A \in \mathcal{M}_1' \cap \mathcal{M}_2' \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n'$ entraine $A \in \mathcal{M}_k'$, c'est-à-dire, A est commutatif avec tout élément de $\mathcal{M}_k$. Donc, A est commutatif avec tout élément de $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n$, d'où $A \in (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n)'$ et donc $(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n)' = \mathcal{M}_1' \cap \mathcal{M}_2' \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n'$. Nous avons de même pour les commutateurs non bornés. C. Q. F. D.

(2.6) $\mathcal{M} \leqq \mathcal{O}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'^{0'}$ [2].

En effet, $\mathcal{M}'' \leqq \mathcal{M}'^{0}$ entraine $\mathcal{M}'^{0'} \leqq \mathcal{M}''' = \mathcal{M}'$, c'est-à-dire, $\mathcal{M}'^{0'} \leqq \mathcal{M}'$. En autre part, comme tout élément de $\mathcal{M}'^{0}$ est commutatif avec tout élément de $\mathcal{M}'$, nous avons $\mathcal{M}' \leqq \mathcal{M}'^{0'}$ et donc $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'^{0'}$. C. Q. F. D.

(2.7) $\mathcal{M} \leqq \mathcal{O}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{00'}$.

En effet, $\mathcal{M}' \leqq \mathcal{M}^{0}$ entraine $\mathcal{M}^{00} \leqq \mathcal{M}'^{0}$ et donc $\mathcal{M}^{00'} \geqq \mathcal{M}'^{0'} = \mathcal{M}'$ d'après (2.6), c'est-à-dire, $\mathcal{M}' \leqq \mathcal{M}^{00'}$. En autre part, $\mathcal{M}^{00'} \leqq \mathcal{M}^{000} = \mathcal{M}^{0}$ et tout opérateur de $\mathcal{M}^{00'}$ est borné, d'où $\mathcal{M}^{00'} \leqq \mathcal{M}^{0} \cap \mathscr{R}(\mathfrak{B}) = \mathcal{M}'$, ce qui donne $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{00'}$. C. Q. F. D.

(2.8) $\mathcal{M} \leqq \mathscr{R}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{0''}$.

En effet, comme nous avons $\mathcal{M}^{0'} \leqq \mathcal{M}^{00}$, nous avons d'après (2.7) $\mathcal{M}^{0''} \geqq \mathcal{M}^{00'} = \mathcal{M}'$, c'est-à-dire, $\mathcal{M}' \leqq \mathcal{M}^{0''}$. Or, tout élément de $\mathcal{M}^{0}$ est commutatif avec tout élément de M et donc $\mathcal{M} \leqq \mathcal{M}^{0'}$, ce qui donne $\mathcal{M}^{0''} \leqq \mathcal{M}'$, d'où $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{0''}$. C. Q. F. D.

(2.9) $\mathcal{M} \leqq \mathscr{R}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}^{0'} = \mathcal{M}''$.

En effet, nous avons d'après (2.8) $\mathcal{M}^{0'} = \mathcal{M}^{0'''} = \mathcal{M}''$.

(2.10) $\mathcal{M} \leqq \mathscr{R}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}^{0} = \mathcal{M}^{0'0}$.

En effet, nous avons $\mathcal{M}^{00} \geqq \mathcal{M}^{0'}$ et donc $\mathcal{M}^{0} = \mathcal{M}^{000} \leqq \mathcal{M}^{0'0}$, c'est-à-dire, $\mathcal{M}^{0} \leqq \mathcal{M}^{0'0}$. Or, $\mathcal{M} \leqq \mathscr{R}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M} \leqq \mathcal{M}^{0'}$ et par suite $\mathcal{M}^{0'0} \leqq \mathcal{M}^{0}$, d'où $\mathcal{M}^{0} = \mathcal{M}^{0'0}$. C. Q. F. D.

(2.11) $\mathcal{M} \leqq \mathscr{R}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}'^{0} = \mathcal{M}^{00}$.

En effet, nous avons d'après (2.10) $\mathcal{M}^{00} = \mathcal{M}^{00'0}$ et donc d'après (2.7) $\mathcal{M}^{00'0} = \mathcal{M}'^{0}$, ce qui donne $\mathcal{M}^{00} = \mathcal{M}'^{0}$. C. Q. F. D.

(2.12) $\mathcal{M} \leqq \mathscr{R}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{M}''^{0} = \mathcal{M}^{0}$ et $\mathcal{M}'^{00} = \mathcal{M}^{0}$.

En effet, (2.9) et (2.10) entrainent les égalités demandées.

---

1) Etant donnés deux anneaux $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des opérateurs, nous désignons par $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ respectivement le plus petit anneau faiblement fermé qui contient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, et la partie commune de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$.

2) $\mathcal{M}'^{0'}$ désigne $((\mathcal{M}')^{0})'$ et de même pour $\mathcal{M}^{00'}$, $\mathcal{M}^{0''}$, etc..

3. Soit $\mathscr{M}$ un anneau des opérateurs sur $\mathfrak{B}$. Nous entendrons alors par une projection de $\mathscr{M}$ qui détermine un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ un opérateur P de $\mathscr{M}^{00}$ tel qu'on ait $P^2=P$ et $\mathfrak{M}=P\mathfrak{B}$, et nous désignons par $\mathscr{M}^P$ l'ensemble de tous les projections de $\mathscr{M}$. Pour deux projections P et Q de $\mathscr{M}$, quand nous avons $PQ=QP=O$, nous dirons que P et Q sont orthogonaux l'une l'autre et nous désignons ce fait par $P\perp Q$. Puis, pour deux sous-ensembles linéaires $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{B}$, quand il existe deux projections P et Q de $\mathscr{M}$ orthogonaux l'une l'autre telles qu'on ait $\mathfrak{M}\leqq P\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}\leqq Q\mathfrak{B}$, nous dirons que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont orthogonaux l'un l'autre par rapport à $\mathscr{M}$ et nous désignons ce fait par $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$.

(3.1) $P\in\mathscr{M}^P$ entraine $(I-P)\in\mathscr{M}^P$ et $P\perp(I-P)$.

(3.2) Pour que deux projections P et Q de $\mathscr{M}$ sont orthogonaux l'une l'autre, il faut et il suffit que $P+Q$ soit aussi une projection de $\mathscr{M}$.

En effet, $P\perp Q$ entraine $(P+Q)^2=P^2+PQ+QP+Q^2=P+Q$, ce qui donne $P+Q\in\mathscr{M}^P$. Inversement, quand $P+Q$ est une projection de $\mathscr{M}$, nous avons d'après la définition $PQ+QP=0$, d'où $PQ=QP=0$ et donc $P\perp Q$. C. Q. F. D.

(3.3) (i) $P\perp Q$ entraine $Q\perp P$, (ii) $P\perp Q$ et $(P+Q)\perp R$ entrainent $P\perp R$, $Q\perp R$, $(Q+R)\perp P$ et $(P+R)\perp Q$.

En effet, nous avons évidemment (i) et (ii). Puis, $P\perp Q$ et $(P+Q)\perp R$ entrainent $0=(P+Q)R=PR+QR$ et donc $0=P(PR+QR)=P^2R+PQR=PR$, c'est-à-dire, $PR=0$. De même, nous avons $RP=0$ et donc $P\perp R$. Nous avon alors $(Q+R)P=QP+RP=0$ et de même $P(Q+R)=PQ+PR=0$, d'où $(Q+R)\perp P$, et de même $Q\perp R$ et $(P+R)\perp Q$. C. Q. F. D.

(3.4) Pour que deux sous-emsembles linéaires $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{B}$ sont orthogonaux l'un l'autre par rapport à $\mathscr{M}$, il faut et il suffit qu'il existe une projection P de $\mathscr{M}$ telle qu'on ait $\mathfrak{M}\leqq P\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}\leqq(I-P)\mathfrak{B}$.

(3.5) (i) $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$ entraine $\mathfrak{N}\perp\mathfrak{M}$, (ii) $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{N}\geqq\mathfrak{Q}$ entrainent $\mathfrak{P}\perp\mathfrak{Q}$.

(3.6) Quand deux sous-ensembles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ fermés et linéaires de $\mathfrak{B}$ sont orthogonaux l'un l'autre par rapport à $\mathscr{M}$, $\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$ est fermé.

En effet, soit $\{f_n\}$ $(n=1,2,\dots)$ une suite des éléments de $\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$ qui converge vers f. Il existe alors les éléments g_n et h_n tels qu'on ait $f_n=g_n+h_n$, $g_n\in\mathfrak{M}$ et $h_n\in\mathfrak{N}$. Or, $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$ entraine l'existence d'une projection P de $\mathscr{M}$ telle qu'on ait $\mathfrak{M}\leqq P\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}\leqq(I-P)\mathfrak{B}$. Nous avons donc $g_n=Pf_n$ et $h_n=(I-P)f_n$, d'où $\lim_{n\to\infty}g_n=\lim_{n\to\infty}Pf_n=P(\lim_{n\to\infty}f_n)=Pf$ et de même $\lim_{n\to\infty}h_n=(I-P)f$. Comme $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont fermés, nous avons $Pf\in\mathfrak{M}$ et $(I-P)f\in\mathfrak{N}$, et donc $f=Pf+(I-P)f\in\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$. D'où, $\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$ est fermé. C. Q. F. D.

4. Soit $\mathscr{M}$ un anneau borné des opérateurs sur $\mathfrak{B}$. Quand un opérateur A de $\mathscr{O}(\mathfrak{B})$ remplit l'égalité $AX=XA$ pour tout opérateur X de $\mathscr{M}'$, nous désignons ce fait par $A\eta\mathscr{M}$, et de même quand un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ satisfait à l'inégalité $X\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{M}$ pour tout opérateur X de $\mathscr{M}'$, nous désignons ce fait par $\mathfrak{M}\eta\mathscr{M}$.

(4.1) Pour un opérateur A de $\mathscr{O}(\mathfrak{B})$, $A\eta\mathscr{M}$ et $A\in\mathscr{M}^{00}$ sont équivalents l'un l'autre. De même, pour un opérateur A de $\mathscr{R}(\mathfrak{B})$, $A\eta\mathscr{M}$ et $A\in\mathscr{M}''$ sont equivalents l'un l'autre.

(4.2) Pour un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ remplit $\mathfrak{M}\eta\mathscr{M}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{M}$ soit invariant pour tout opérateur X de $\mathscr{M}'^{R}$ [1], c'est-à-dire, $X\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-ensemble linéaire de $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $\mathfrak{M}\eta\mathscr{M}$. Nous avons alors $X\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{M}$ et $X^{-1}\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{M}$ et même temps pour tout opérateur X de $\mathscr{M}'^{R}$, d'où $X\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$.

Inversement, nous supposons que $\mathfrak{M}$ remplit la condition donnée. Il existe pour un opérateur X de $\mathscr{M}'$ un nombre α tel qu'on ait $I+\alpha X\in\mathscr{M}'^{R}$ et donc $(I+\alpha X)\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$. Nous avons alors $f+\alpha Xf\in\mathfrak{M}$ pour tout élément f de $\mathfrak{M}$ et donc $Xf\in\mathfrak{M}$, d,où $X\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{M}$, c'est-à-dire, $\mathfrak{M}\eta\mathscr{M}$. C. Q. F. D.

(4.3) Pour un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $\mathfrak{M}\eta\mathscr{M}$, quand il existe son complémentaire, c'est-à-dire, un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ [2] et $\mathfrak{N}\eta\mathscr{M}$, nous dirons que $\mathfrak{M}$ est régulier par rapport à $\mathscr{M}$. Quand $\mathfrak{M}$ est régulier par rapport à $\mathscr{M}$, il existe une projection de P qui détermine $\mathfrak{M}$, et inversement.

Démonstration. Pour une projection P de $\mathscr{M}$, nous posons $\mathfrak{M}=P\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}=(I-P)\mathfrak{B}$, nous avons $X\mathfrak{M}=XP\mathfrak{B}=PX\mathfrak{B}\leqq\mathfrak{M}$ pour tout élément X de $\mathscr{M}'$ et de même $X\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{N}$, d'où $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}\eta\mathscr{M}$. Nous avons aussi $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ et donc, $\mathfrak{M}$ est régulier par rapport à $\mathscr{M}$.

Inversement, quand un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ est régulier par rapport à $\mathscr{M}$, il existe un sous-ensemble linéaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}\eta\mathscr{M}$. Tout élément f de $\mathfrak{B}$ est alors écrit sous la forme $f=g+h$, où $g\in\mathfrak{M}$ et $h\in\mathfrak{N}$, et aussi g et h sont détermines univoquement. Il existe donc une projection P telle qu'on ait $\mathfrak{M}=P\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}=(I-P)\mathfrak{B}$. Or, nous avons $P\in\mathscr{M}^{00}$. En effet, soient f un élément de $\mathfrak{B}$ et X un élément de $\mathscr{M}'$. Alors. $X\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{M}$ entraine l'existence d'un élément g de $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $XPf=Pg$. De même, $X\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{N}$ entraine l'existence d'un élément h de $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $X(I-P)f=(I-P)h$. Nous avons donc $PX(I-P)f=PXf-PXPf=PXf-P^2g=PXf-XPf$ et $PX(I-P)f=P(I-P)h=0$, d'où $(PX-XP)f=0$ et par suite, $PX=XP$, c'est-à-dire, $P\in\mathscr{M}^{00}$. C. Q. F. D.

(4.4) $\mathfrak{M}\eta\mathscr{M}$ entraine $\overline{\mathfrak{M}}\eta\mathscr{M}$ [3].

---

1) $\mathscr{M}^{R}$ désigne l'ensemble de tous les opérateurs réguliers de $\mathscr{M}''$, c'est-à-dire, ceux qui ont ses inverses.

2) $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ désigne qu'on a $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\smile\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}\frown\mathfrak{N}=(0)$.

3) $\overline{\mathfrak{M}}$ désigne la ferméture de $\mathfrak{M}$.

(4.5) $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ entraine $A\mathfrak{M}$ et $A^{-1}\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ pour tout élément A de $\mathcal{M}'$, où $A^{-1}\mathfrak{M}$ désigne l'ensemble de tous les éléments f de $\mathfrak{B}$ tels qu'on ait $Af\in\mathfrak{M}$.

5. Etant donné un anneau borné $\mathcal{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}$, nous désignons par $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles linéaires $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ tels qu'on ait $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ et $\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M})$ celui de tous les fermétures des éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$.

(5.1) 0 et $\mathfrak{B}\in\mathbb{L}(\mathcal{M})$.

(5.2) $\mathbb{L}(\mathcal{M})=\mathbb{L}(\mathcal{M}'')$ et donc $\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M})=\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M}'')$.

(5.3) $\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M})$ et $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ sont les structures complètes et la dernière est de plus modulaire.

En effet, il est évident que $\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M})$ et $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ sont les structures complètes. Puis, nous considérons la modularité de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$. Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{P}$ les éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ tels qu'on ait $\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{P}$. Nous avons alors $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N})\frown\mathfrak{P}\geqq\mathfrak{M}\frown\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$ et $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N})\frown\mathfrak{P}\geqq\mathfrak{N}\frown\mathfrak{P}$, d'où $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N})\frown\mathfrak{P}\geqq\cup(\mathfrak{N}\frown\mathfrak{P})$. En autre part, quand f est un élément de $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N})\frown\mathfrak{P}$, nous avons $f\in\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$ et donc il existe deux éléments g et h tels qu'on ait $f=g+h$, $g\in\mathfrak{M}$ et $h\in\mathfrak{N}$. Nous avons aussi $g\in\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{P}$ et $f\in\mathfrak{P}$, d'où $h=f-g$ appartiennent à $\mathfrak{P}$, ce qui entraine $h\in\mathfrak{N}\frown\mathfrak{P}$ et par suite $f=g+h\in\mathfrak{P}\cup(\mathfrak{N}\frown\mathfrak{P})$. Nous avons donc $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N})\frown\mathfrak{P}=\mathfrak{P}\cup(\mathfrak{N}\frown\mathfrak{P})$, c'est-à-dire, $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ est modulaire.

C. Q. F. D.

(5.4) Quand deux éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ sont réguliers et orthogonaux l'un l'autre, $\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$ est aussi régulier et appartiennent à $\mathbb{L}(\mathcal{M})$.

6. Maintenant, nous introduissons la notion de la dimension sur les éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$. Pour cela, nous considérons d'abord les éléments de $\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M})$. Etant donnés deux éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\bar{\mathbb{L}}(\mathcal{M})$, nous dirons que la dimension de $\mathfrak{M}$ est supérieure ou au moins égale à la dimension de $\mathfrak{N}$, ou bien celle de $\mathfrak{N}$ est inférieure ou au moins égale à celle de $\mathfrak{M}$, s'il existe un élément A de $\mathcal{M}''$ tel qu'on ait $\overline{A\mathfrak{M}}\geqq\mathfrak{N}$ et nous désignons ce fait par $\mathfrak{M}\gtrsim\mathfrak{N}$ ou bien $\mathfrak{N}\lesssim\mathfrak{M}$. Et, quand nous avons $\mathfrak{M}\gtrsim\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}\lesssim\mathfrak{M}$ en même temps, nous dirons que les dimensions de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont égaux et nous désignons ce fait par $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$. De plus, nous désignons par $d(\mathfrak{M})$ la dimension de $\mathfrak{M}$ ainsi défini et suivant que nous avons $\mathfrak{M}\gtrsim\mathfrak{N}$ ou bien $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$ ou bien $\mathfrak{M}\lesssim\mathfrak{N}$, nous écrivons $d(\mathfrak{M})\geqq d(\mathfrak{N})$ ou bien $d(\mathfrak{M})=d(\mathfrak{N})$ ou bien $d(\mathfrak{M})\leqq d(\mathfrak{N})$.

Puis, nous définirons la dimension $d(\mathfrak{M})$ d'un élément $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ par celle de la fermeture $\bar{\mathfrak{M}}$.

(6.1) $\mathfrak{M}\gtrsim\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}\gtrsim\mathfrak{P}$ entrainent $\mathfrak{M}\gtrsim\mathfrak{P}$.

(6.2) (i) $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{M}$, (ii) $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$ entraine $\mathfrak{N}\cong\mathfrak{M}$, (iii) $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}\cong\mathfrak{P}$ entrainent $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{P}$.

(6.3) $0\lesssim\mathfrak{M}\lesssim\mathfrak{B}$.

(6.4) $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{N}$ entraine $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{N}$.

(6.5) $d(\mathfrak{M}) \geqq d(\mathfrak{N})$ et $d(\mathfrak{N}) \geqq d(\mathfrak{P})$ entrainent $d(\mathfrak{M}) \geqq d(\mathfrak{P})$.

(6.6) $\mathfrak{M} \supseteqq \mathfrak{N}$ entraine $d(\mathfrak{M}) \geqq d(\mathfrak{N})$.

(6.7) $d(0) \leqq d(\mathfrak{M}) \leqq d(\mathfrak{B})$.

(6.8) $d(A\mathfrak{M}) \leqq (\mathfrak{M})$ pour tout élément A de $\mathcal{M}''$.

(6.9) L'ensemble $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ des dimensions de tous les éléments de $\overline{\mathbb{L}}(\mathcal{M})$ et par suite $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ est demi-ordonné.

7. Maintenant, nous définirons l'addition des dimensions comme il suit. Etant donnés deux éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ tels qu'on ait $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$, nous appelons la dimension $d(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N})$ de $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ la somme de $d(\mathfrak{M})$ et $d(\mathfrak{N})$, et nous la désignons par $d(\mathfrak{M}) + d(\mathfrak{N})$. Pour que cette définition est complète, il faut que la somme des dimensions est déterminée univoquement. Or, c'est deduit par la proposition (7.1) suivante.

(7.1) $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{M}_2 \perp \mathfrak{N}_2$ entrainent $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{N}_2$.

Démonstration. $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{N}_2$ entrainent l'existence des éléments A et B de $\mathcal{M}''$ tels qu'on ait $\mathfrak{M}_2 \leqq A\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_2 \leqq B\mathfrak{N}_1$. Et, $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{N}_1$ entraine l'existence d'une projection P de $\mathcal{M}$ telle qu'on ait $\mathfrak{M}_1 \leqq P\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}_1 \leqq (I-P)\mathfrak{B}$. Donc, quand nous posons $C = AP + B(I-P)$, nous avons $C \in \mathcal{M}''$, et $f \in \mathfrak{M}_1$ entraine $Cf = \big(AP + B(I-P)\big)f = APf + B(I-P)f = APf = Af$, d'où nous avons $C\mathfrak{M}_1 = A\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M}_2$. De même, nous avons $C\mathfrak{N}_1 \geqq \mathfrak{N}_2$ et par suite $C(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{N}_1) \geqq \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{N}_2$, ce qui donne $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{N}_1 \geq \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{N}_2$. De même, nous avons $\mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{N}_2 \geq \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{N}_1$ et donc $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{N}_2$. C. Q. F. D.

(7.2) $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ entraine $d(\mathfrak{M}) + d(\mathfrak{N}) = d(\mathfrak{N}) + d(\mathfrak{M})$.

(7.3) Pour trois éléments δ_1, δ_2 et δ_3 de $\mathbb{D}(\mathcal{M})$, quand il existe les sommes $(\delta_1+\delta_2)+\delta_3$ et $\delta_1+(\delta_2+\delta_3)$, nous avons $(\delta_1+\delta_2)+\delta_3 = \delta_1+(\delta_2+\delta_3)$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{N}_{12}$ et $\mathfrak{N}_3$ les éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ tels qu'on ait $d(\mathfrak{N}_{12}) = \delta_1 + \delta_2$, $d(\mathfrak{N}_3) = \delta_3$ et $\mathfrak{N}_{12} \perp \mathfrak{N}_3$. Nous avons alors $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cong \mathfrak{N}_{12}$ pour les éléments $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ tels qu'on ait $d(\mathfrak{M}_k) = \delta_k$ et $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$ et donc, il existe un opérateur A de $\mathcal{M}''$ qui satisfait à la relation $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \leqq A\mathfrak{N}_{12}$. Or, $\mathfrak{N}_{12} \perp \mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$ entrainent l'existence des projections P et Q de $\mathcal{M}$ telles qu'on ait $\mathfrak{M}_1 \leqq P\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}_2 \leqq (I-P)\mathfrak{B}$, $\mathfrak{N}_{12} \leqq Q\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{N}_3 = (I-Q)\mathfrak{B}$. Et, nous avons

$$A^{-1}PA\mathfrak{B} \cup A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \quad \text{et} \quad A^{-1}PA\mathfrak{B} \cap A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B} = \mathfrak{N}_0,$$

où $\mathfrak{N}_0$ désigne l'ensemble de tous les éléments f de $\mathfrak{B}$ qui remplit $Af = 0$. En effet, pour un élément f de $\mathfrak{B}$, quand nous posons $h = f - g$, où g est un élément de $A^{-1}PAf$, nous avons $Ah = A(f-g) = Af - Ag = Af - PAf = (I-P)Af$, et donc $h \in A^{-1}(I-P)Af$, ce qui donne $f = g + h = A^{-1}PA\mathfrak{B} \cup A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}$, et par suite $A^{-1}PA\mathfrak{B} \cup A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. En autre part, nous avons d'après la définition $\mathfrak{N}_0 \leqq A^{-1}PA\mathfrak{B} \cap$

$A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}$ et $f\in A^{-1}PA\mathfrak{B}\frown A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}$ entraine $Af\in PA\mathfrak{B}\frown (I-P)A\mathfrak{B}=(0)$, d'où $Af=0$ et donc $f\in\mathfrak{N}_0$. Nous avons donc $A^{-1}PA\mathfrak{B}\frown A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}=\mathfrak{N}_0$.

Puis, soient $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_{23}$ les éléments de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ tels qu'on ait $d(\mathfrak{N}_1)=\delta_1$, $d(\mathfrak{N}_{23})=\delta_2+\delta_3$ et $\mathfrak{N}_1\perp\mathfrak{N}_{23}$. Nous avons alors $\mathfrak{M}_2'\smile\mathfrak{M}_3'\cong\mathfrak{N}_{23}$ pour les éléments $\mathfrak{M}_2'$ et $\mathfrak{M}_3'$ de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ qui remplissent $d(\mathfrak{M}_k')=\delta_k$ et $\mathfrak{M}_2'\perp\mathfrak{M}_3'$, et donc il existe un opérateur B de $\mathscr{M}''$ tel qu'on ait $\mathfrak{N}_{23}\leqq B(\mathfrak{M}_2'\smile\mathfrak{M}_3')=B\mathfrak{M}_2'\smile B\mathfrak{M}_3'$. De plus, $\mathfrak{M}_1\cong\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2\cong\mathfrak{M}_2'$ et $\mathfrak{M}_3'\cong\mathfrak{N}_3$ entrainent l'existence des éléments C, D et E de $\mathscr{M}''$ tels qu'on ait $\mathfrak{N}_1\leqq C\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2'\geqq D\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3'\leqq E\mathfrak{N}_3$.

Maintenant, nous définirons un opérateur F de $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$ comme il suit. Pour un élément f de $\mathfrak{B}$, quand nous avons

$$(*)\qquad Qf=f_1+f_2\,,\quad f_1\in A^{-1}PA\mathfrak{B}\quad\text{et}\quad f_2\in A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}\,,$$

nous posons $Ff=CAf_1+BDAf_2+BE(I-Q)f$. Alors, F satisfait aux conditions demandée. En effet, quand nous avons pour f une autre décomposition

$$Qf=g_1+g_2\,,\quad g_1\in A^{-1}PA\mathfrak{B}\quad\text{et}\quad g_2\in A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}\,,$$

nous avons $f_1+f_2=g_1+g_2$ et par suite $f_1-g_1=g_2-f_2$, ce qui entraine $A(f_1-g_1)\in PA\mathfrak{B}\frown(I-P)A\mathfrak{B}=(0)$, et donc $Af_1-Ag_1=Ag_2-Af_2=0$, d'où $CAf_1=CAg_1$ et $BDAf_2=BDAg_2$. Nous avons donc $CAg_1+BDAg_2+BE(I-Q)f=CAf_1+BDAf_2+BE(I-Q)f$, et par suite F est univoque. Il est évidemment linéaire et borné sur $\mathfrak{B}$.

Or, nous avons $F\in\mathscr{M}''$. En effet, soit X un élément de $\mathscr{M}'$. Nous avons alors pour un élément f de $\mathfrak{B}$, $XFQf=XCAf_1+XBDAf_2=CAXf_1+BDAXf_2$. Or, $A^{-1}PA\mathfrak{B}$ et $A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}\in\mathbb{L}(\mathscr{M})$ entrainent $Xf_1\in A^{-1}PA\mathfrak{B}$ et $Xf_2\in A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}$ et donc $QXf=XQf=Xf_1+Xf_2$ entraine $FQXf=CAXf_1+BDAXf_2=XFQf$, d'où $FQX=XFQ$. De même, nous avons $F(I-Q)X=XF(I-Q)$ et donc $FX=XF$, c'est-à-dire, $F\in\mathscr{M}''$.

Puis, nous considérons $F(\mathfrak{N}_{12}\smile\mathfrak{N}_3)$. Pour un élément f_1 de $\mathfrak{N}_1$, il existe un élément g_1 de $\mathfrak{M}_1$ tel qu'on ait $f_1=Cg_1$. Or, comme nous avons $\mathfrak{M}_1\leqq A\mathfrak{N}_{12}$, il existe un élément h_1 de $\mathfrak{N}_{12}$ tel qu'on ait $Ah_1=g_1$ et par suite $CAh_1=Cg_1=f_1$. D'après la définition, nous avons $Ah_1=g_1\in\mathfrak{M}_1\leqq P\mathfrak{B}$ et donc $PAh_1=Ah_1$, d'où $h_1\in A^{-1}PA\mathfrak{B}$. Or, $h_1\in\mathfrak{N}_{12}$ entraine $h_1\in Q\mathfrak{B}$ et par suite $Qh_1=h_1$. D'où la décomposition de Qh_1 sous la forme (*) est $Qh_1=h_1+0$ et donc nous avons $Fh_1=FQh_1=f_1$, d'où $F\mathfrak{N}_{12}\geqq\mathfrak{N}_1$. Puis, pour un élément f_{23} de $\mathfrak{N}_{23}$, il existe un élément g_2 de $\mathfrak{M}_2'$ et celui g_3 de $\mathfrak{M}_3'$ tels qu'on ait $f_{23}=Bg_2+Bg_3$. D'après la définition, il existe un élément h_2 de $\mathfrak{M}_2$ et h_3 de $\mathfrak{N}_3$ tels qu'on ait $g_2=Dh_2$ et $g_3=Eh_3$ et de même k_2 de $\mathfrak{N}_{12}$ tel qu'on ait $h_2=Ak_2$. Nous avons alors $f_{23}=BDAk_2+BEh_3$. Or, nous avons $Ak_2=h_2\in\mathfrak{M}_2\leqq(I-P)\mathfrak{B}$ et donc $(I-P)Ak_2=Ak_2$, d'où $k_2\in A^{-1}(I-P)A\mathfrak{B}$. De plus, $k_2\in\mathfrak{N}_{12}$ entraine $Qk_2=k_2$ et par suite la décomposition de Qk_2 sous la forme (*) est $Qk_2=0+k_2$, ce qui entraine $Fk_2=0+FQk_2=BDAk_2$ et donc $BDAk_2\in F\mathfrak{N}_{12}$. En autre part, $h_3\in\mathfrak{N}_3\leqq(I-Q)\mathfrak{B}$ entraine $(I-Q)h_3=h_3$ et donc $Fh_3=BE(I-Q)h_3=BEh_3$, d'où $BEh_3\in F\mathfrak{N}_3$. Nous avons donc $f_{23}=BDAk_2+BEh_3\in F\mathfrak{N}_{12}\smile F\mathfrak{N}_3=F(\mathfrak{N}_{12}\smile\mathfrak{N}_3)$, c'est-à-dire

$\mathfrak{N}_{23} \leqq F(\mathfrak{N}_{12} \cup \mathfrak{N}_3)$, d'où $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_{23} \leqq F(\mathfrak{N}_{12} \cup \mathfrak{N}_3)$, ce qui donne $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_{23} \leqq \mathfrak{N}_{12} \cup \mathfrak{N}_3$. De même, nous avons $\mathfrak{N}_{12} \cup \mathfrak{N}_3 \leqq \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_{23}$ et par suite $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_{23} \cong \mathfrak{N}_{12} \cup \mathfrak{N}_3$, c'est-à-dire, $(\delta_1+\delta_2)+\delta_3=\delta_1+(\delta_2+\delta_3)$.

C. Q. F. D.

(7.4) Pour trois éléments δ_1, δ_2 et δ_3 de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$, quand il existe les éléments $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$ de $\overline{\mathbb{L}}(\mathscr{M})$ tels qu'on ait $\delta_k=d(\mathfrak{M}_k)$, $(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \perp \mathfrak{M}_3$ et $(\mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3) \perp \mathfrak{M}_1$, il existe aussi $(\delta_1+\delta_2)+\delta_3$ et $\delta_1+(\delta_2+\delta_3)$.

8. D'ailleurs, puisqu'il n'existe pas toujours la somme de deux dimensions données comme nous voyons, nous etendrons le domaine des dimensions comme la somme de celles-ci toujours existe. Pour cela, nous considérons d'abord la somme algébrique $s=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_u$ des dimensions et si δ_{ν_k} $(k=1,2,\dots,v)$ paraissent respectivement n_k-fois dans cette somme et $\sum_{k=1}^{v} n_k=u$, nous écrivons $s=n_1\delta_{\nu_1}+n_2\delta_{\nu_2}+\cdots+n_v\delta_{\nu_v}$. Puis, nous définirons l'égalité et l'addition de ces sommes algébriques comme nous faissons ordinairement dans l'algébre, c'est-à-dire, pour les sommes s donnée au-dessus et $s'=\delta_1'+\delta_2'+\cdots+\delta_{u'}'$, quand nous avons $u=u'$ et une permutation $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_u)$ de $(1, 2, \dots, u)$ telle qu'on ait $\delta_{\mu_k}=\delta_k'$ $(k=1, 2, \dots, u)$, nous dirons que s et s' sont égaux l'une l'autre et nous désignons ce fait par $s=s'$; puis nous entendrons par la somme de s et s' la somme algébrique $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_u+\delta_1'+\delta_2'+\cdots+\delta_{u'}'$ et nous la désignons par $s+s'$. Alors, l'égalité des sommes algébriques est symétrique, réflexive et transitive, et l'addition est associative et commutative. D'où, l'ensemble $\sum$ de toutes les sommes algébriques est un demi-groupe.

9. Or, quand un sous-ensemble Γ de $\sum$ remplit les conditions:

1) $s=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_u \in \Gamma$ et $\delta_k' \leqq \delta_k$ $(k=1, 2, \dots, u)$ entrainent $\delta_1'+\delta_2'+\cdots+\delta_u' \in \Gamma$,
2) $s=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_u \in \Gamma$ et s'il existe $\delta=\delta_{u-1}+\delta_u$ au sens de **7**, nous avons aussi $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{u-2}+\delta \in \Gamma$,
3) $s=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_u \in \Gamma$ et s'il existe $\delta_u=\delta'+\delta''$ au sens de **7**, nous avons aussi $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{u-1}+\delta'+\delta'' \in \Gamma$,

nous l'appelons un idéal de $\sum$. En particulier, nous désignons par (s) l'idéal plus petit qui contient s et nous l'appelons un ideal principal de $\sum$.

Maintenant, nous introduissons des notions de l'ordre et l'addition pour les idéaux de $\sum$. Quand nous avons $\Gamma \supseteq \varDelta$ pour deux idéaux Γ et $\varDelta$, nous désignons ce fait par $\Gamma \geqq \varDelta$ ou bien $\varDelta \leqq \Gamma$.

(9.1) $\Gamma \geqq \varDelta$ et $\varDelta \geqq \Gamma$ entrainent $\Gamma=\varDelta$.

(9.2) $\Gamma \geqq \varDelta$ et $\varDelta \geqq E$ entrainent $\Gamma \geqq E$.

Puis, pour deux idéaux Γ et $\varDelta$ de $\sum$, nous entendrons par la somme de ceux l'idéal plus petit qui contient toutes les sommes $s+t$, où $s \in \Gamma$ et $t \in \varDelta$, il nous la désignons par $\Gamma+\varDelta$.

(9.3) Pour deux idéaux Γ et $\varDelta$ de $\sum$, il existe toujours la somme $\Gamma+\varDelta$ et s'ils sont principaux, la somme est aussi principale.

(9.4) $\Gamma+\Delta=\Delta+\Gamma$.

(9.5) $(\Gamma+\Delta)+E=\Gamma+(\Delta+E)$.

(9.6) $\Gamma\geqq\Delta$ entraine $\Gamma+E\geqq\Delta+E$.

(9.7) $(s+t)=(s)+(t)$.

(9.8) Quand nous désignons par $n\Gamma$ la somme $\Gamma+\Gamma+\cdots+\Gamma$ (n-fois), nous avons $n(\Gamma+\Delta)=n\Gamma+n\Delta$, $(n+m)\Gamma=n\Gamma+m\Gamma$ et $n(m\Gamma)=(nm)\Gamma$.

10. Maintenant, nous désignons par $\Delta(\mathcal{M})$ l'ensemble de tous les idéaux principaux de $\sum$, par $\Delta_0(\mathcal{M})$ celui de tous les idéaux écrites sous la forme (δ) et nous appelons $\Delta(\mathcal{M})$ le module des dimensions de $\mathcal{M}$.

(10.1) $\Delta(\mathcal{M})$ et $\Delta_0(\mathcal{M})$ sont demi-ordonnés et demi-groupes, et tout élément de $\Delta(\mathcal{M})$ peut être représenté comme une somme des éléments de $\Delta_0(\mathcal{M})$.

(10.2) (i) $(\delta)=(\delta')$ entraine $\delta=\delta'$ et inversement, (ii) $(\delta)\geqq(\delta')$ entraine $\delta\geqq\delta'$ et inversement, (iii) quand il existe la somme $\delta+\delta'$ au sens de **7**, nous avons $(\delta+\delta')=\delta+\delta'$. D'où, quand nous faissons correspondre à chaque élément δ de $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ un élément (δ) de $\Delta_0(\mathcal{M})$, c'est une isomorphisme.

Or, il faut donner quelque préparation géométrique voir cette proposition et donc nous omettons ici sa démonstration.

Remarque. Puisque $\Delta_0(\mathcal{M})$ et $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ sont d'après (10.2) isomorphiques l'un l'autre, nous écrivons simplement δ et $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n$ respectivement au lieu de (δ) et $(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)$. De plus, nous avons défini ici $\Delta(\mathcal{M})$ parfaitement algébrique, mais nous pouvons donner l'interprétation géométrique clair à $\Delta(\mathcal{M})$.

11. Enfin, nous considérons la relation entre les dimensions $d(\mathfrak{M})$ et les dimensions numériques $D(\mathfrak{M})$ qui indiquent numériquement l'etendue des éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$. Pour cela, nous posons d'abord une notion sur la finité des éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$. Voici la définition. Pour un élément δ de $\mathbb{D}(\mathcal{M})$, s'il n'existe aucun nombre naturel n tel qu'on ait $(n+1)\delta\leqq n\delta$ dans $\Delta(\mathcal{M})$, nous dirons que δ est fini au sens de M. A. Tarski, et quand la dimension $d(\mathfrak{M})$ d'un élément $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ est fini à ce sens, nous dirons que $\mathfrak{M}$ est fini au sens de M. A. Tarski. Nous pouvons alors classifier $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ au point de vue de cette notion comme il suit.

I. $\mathfrak{B}$ est fini au sens de M. A. Tarski. Dans ce cas, nous dirons que $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ est du type fini.

II. $\mathfrak{B}$ n'est pas fini au sens de M. A. Tarski, mais il existe au moins un élément fini dans $\mathbb{L}(\mathcal{M})$. Dans ce cas, nous dirons que $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ est du type infini.

III. Tous les éléments de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ ne sont pas finis au sens de M. A. Tarski. Dans ce cas, nous dirons que $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ est du type purement infini.

Or, nous avons les suivants sur l'existence des dimensions numériques.

(11.1) Quand $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ est du type fini, il existe une dimension numérique $D(\mathfrak{M})$ telle qu'on ait

(i) $0 \leqq D(\mathfrak{M}) \leqq 1$, $D(0)=0$ et $D(\mathfrak{B})=1$,
(ii) $D(\mathfrak{M})=D(\overline{\mathfrak{M}})$,
(iii) $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ entraine $D(\mathfrak{M})=D(\mathfrak{N})$,
(iv) $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{N}$ entraine $D(\mathfrak{M}) \geqq D(\mathfrak{N})$,
(v) lorsqu'on a $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$, on a $D(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N})=D(\mathfrak{M})+D(\mathfrak{N})$.

(11.2) Quand $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ est du type infini, il existe une dimension numérique $D(\mathfrak{M})$ qui remplit les conditions (ii), (iii), (iv), (v) de (11.1) et

(i′) $0 \leqq D(\mathfrak{M}) \leqq \infty$, $D(0)=0$ et il existe au moins un élément $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ tel qu'on ait $0 < D(\mathfrak{M}) < \infty$.

(11.3) Quand $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ est du type purement infini, il n'existe aucune dimension numérique $D(\mathfrak{M})$ qui remplit les conditions (i), (ii), (iii), (iv) et (v) de (11.2).

La démonstration de ces propositions est trouvée dans ma note précédente "Sur la notion de la dimension" (Proc. **19** (1943), 215).