135. Über den Verband der Rechtsideale eines assoziativen Ringes.

Von Tadasi NAKAYAMA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 13, 1944.)

Die Gesamtheit der Rechtsideale eines (assoziativen) Ringes bildet einen modularen Verband, welcher für die Struktur des Ringes grosse Bedeutung besitzt. Es ist also wichtig zu wissen, wann ein Verband mit dem Rechtsidealverband eines Ringes isomorph wird. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine rein verbandstheoretische Charakterisierung der Rechtsidealverbände zu geben. Wohlbekannt ist der Fall der halbeinfachen Ringe, oder allgemeiner, der Regulären Ringe[1]; Dann (und nur dann) ist der zugehörige Verband komplementär. Es ist verhältnismässig leicht, den bei den komplementären modularen Verbänden in bekannter Weise definierten Begriff der sogenannten L-Zahlen und ihre Kompositionen auf allgemeine modulare Verbände unter gewissen Beschränkung überzutragen und so einen Ring zu bilden. Dann stehen wir aber einer recht, wie es dem Verfasser scheint, schwierigen Aufgabe gegenüber, unter passenden Bedingungen den ursprünglichen Verband mit dem Rechtsidealverband des so entstandenen Ringes in vollständigem Zusammenhang zu bringen. Die Lösung dieser Aufgabe, die wir unten geben, und also unsere so erhaltene verbandstheoretische Charakterisierung der Rechtsidealverbände, lässt vielleicht an Einfachheit noch etwas zu wünschen übrig; doch ist sie, so hoffen wir, nicht ohne Bedeutung und Interesse.

Die vorliegende Arbeit rührt von einem Gespräch mit Herrn Inaba her, der kürzlich in einer sehr interessanten Arbeit[2] ein ähnliches Problem behandelte, Verbände der Untergruppen einer (endlichen) abelschen Gruppe zu kennzeichnen, und dem Verfasser die Hoffnung mitteilte, durch die Von Staudtsche Algebra dieses Problem zu lössen. Der Verfasser möchte hier seinen herzlichsten Dank ihm aussprechen.

§ 1. *Ring der L-Zahlen.*

Es sei L ein modularer Verband mit Null 0 und Eins I, es sei angenommen, dass L ein endliches System von zueinander unabhängigen und zueinander perspektiven Elementen

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \tag{1}$$

mit der Vereinigung

$$I = \cup a_i \tag{2}$$

besitzt. Wir bezeichnen die Menge aller Komplemente von a_j in $a_i \cup a_j$

---

1) Siehe J. von Neumann, Continuous geometry. II (1937); K. Kodaira-S. Huruya, Continuous geometry =ツイテ, 全國紙上數學談話會, 第 167–9 號 (1938).

2) E. Inaba, Über modulare Verbände, welche die Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe bilden. I., Proc. **19** (1943).

mit L_{ij}, und ihre einzelne Elemente mit b_{ij}, c_{ij} u.s.w. Ist $b_{ij} \in L_{ij}$, $b_{jk} \in L_{jk}$, so liegt das Element

$$b_{ij} \times b_{jk} = (b_{ij} \cup b_{jk}) \cap (a_i \cup a_k) \tag{3}$$

in L_{ik}, und es gilt für diese Verknüpfung das Assoziativgesetz

$$(b_{ij} \times b_{jk}) \times b_{kl} = b_{ij} \times (b_{jk} \times b_{kl}) \,, \tag{4}$$

sobald $i \neq k$, $j \neq l$ ist. Es gibt weiter ein System $\{c_{ij}\}$ $(c_{ij} \in L_{ij})$, so dass

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ij} \times c_{jk} = c_{ik} \tag{5}$$

für beliebige i, j, k gilt. In folgenden Betrachtungen halten wir das System $\{a_i\,;\ c_{ij}\ (i, j=1, 2, \dots, n)\}$ ein für allemal fest.

Für ein Teilsystem von $\{a_i\}$, etwa $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, sei der von den Elementen $b_j \leqq a_j$ $(j=1, 2, \dots, m)$ und $b_{jk} \in L_{jk}$ $(j, k=1, 2, \dots, m)$ erzeugte Unterverband von L mit $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ bezeichnet. Dann können wir die Existenz des Systems der projektiven Transformationen

$$P\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i_\rho, j_\rho = 1, 2, \dots, n, \\ i_\rho \neq i_\sigma, j_\rho \neq j_\sigma \text{ für } \rho \neq \sigma \end{matrix} \quad (m < n) \tag{6}$$

von $L(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ auf $L(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m})$ mit den Eigenschaften:

(7)
- i) Ist $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l\}$ ein Teilsystem von $\{1, 2, \dots, m\}$, so fällt $P\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix}$ auf $L(a_{i_{\tau_1}}, \dots, a_{i_{\tau_l}})$ mit $P\begin{pmatrix} i_{\tau_1}, \dots, i_{\tau_l} \\ j_{\tau_1}, \dots, j_{\tau_l} \end{pmatrix}$ zusammen,
- ii) $P\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} j_1, \dots, j_m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix}$,
- iii) Ist $i_\rho \neq j_\rho$ für einen einzigen Wert ρ_0 von $\rho=1, 2, \dots, m$, so ist $P\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix}$ der perspektive Isomorphismus: $u \to (u \cup c_{i_{\rho_0} j_{\rho_0}}) \cap (a_{j_1} \cup a_{j_2} \cup \dots \cup a_{j_m})$ von $L(a_{i_1}, \dots a_{i_m})$ und $L(a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$

beweisen. Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie beim bekannten komplementären Fall[3].

Es sei nun $n \geqq 3$. Ein System

$$\beta = (b_{ij})\,;\ b_{ij} \in L_{ij}\ (i, j=1, 2, \dots, n) \text{ mit } b_{ij} P\begin{pmatrix} i\,j \\ k\,l \end{pmatrix} = b_{kl}$$

soll eine L-Zahl heissen, und einzelnes Komponent b_{ij} soll mit β_{ij} bezeichnet werden. Die Gesamtheit von L-Zahlen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$. Dann wird eine Art von Multiplikation $\gamma, \beta \to \delta = \gamma\beta$ in $\mathfrak{S}$ durch

$$\delta_{ik} = \beta_{ij} \times \gamma_{jk} \tag{8}$$

definiert. Sie ist assoziativ, und es gilt $\beta 0 = 0 \beta = 0$, $\beta\varepsilon = \varepsilon\beta = \beta$ $(\beta \in \mathfrak{S})$ für die Elemente $0, \varepsilon$ mit $0_{ij} = a_i$, $\varepsilon_{ij} = c_{ij}$.

---

3) Siehe die in 1) ziteirten Arbeiten.

Sind nun zwei Elemente x, y in L zueinander mit der Achse c perspektiv in $x \cup y$, so schreiben wir in Zeichen $x \underset{c}{\sim} y$. Ist $x = x_1 \cup \cdots \cup x_r \underset{c}{\sim} y = y_1 \cup \cdots \cup y_r$, und sind beim zugehörigen perspektiven Isomorphismus: $u(\leqq x) \to v = (u \cup c) \frown y(\leqq y)$ von $x/0$ und $y/0$ die Elemente $x_1, \cdots, x_r$ zu $y_1, \cdots, y_r$ zugeordnet, so schreiben wir $(x_1, \cdots, x_r) \underset{c}{\sim} (y_1, \cdots, y_r)$. Dann existiert für $\beta, \gamma \in \mathfrak{S}$ ein eindeutig bestimmtes drittes Element $\alpha \in \mathfrak{S}$, so dass für je zueinander verschiedene i, j, k

$$(9) \qquad (a_i, c_{ik}, a_k) \underset{a_j}{\sim} (\beta_{ij}, c_{ik}, x) \underset{a_j}{\sim} (\gamma_{ij}, y, a_k) \underset{a_j}{\sim} (\alpha_{ij}, y, x)$$

mit geeigneten x, y gilt[4]. Dieses Element α bezeichnen wir mit $\beta + \gamma$.

Sei jetzt $n \geqq 4$. Dann ist diese Addition in $\mathfrak{S}$ assoziativ, kommutativ, und beiderseitig distributiv für die oben definierte Multiplikation. Weiter ist $\beta + 0 = \beta$, und es gibt $\xi \in \mathfrak{S}$, für jedes β, mit $\beta + \xi = 0$. Also bildet die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ der L-Zahlen von L einen (assoziativen) Ring mit dem Eins ε[5].

§ **2.** *Rechtsideale in* $\mathfrak{S}$.

Es sei für $\beta \in \mathfrak{S}$ und $i \neq j$

$$(10) \qquad (a_i \cup \beta_{ij}) \frown a_j = \beta_j$$

gesetzt. Dann wird dieses Element $\beta_j (\leqq a_j)$ durch β und j eindeutig bestimmt, und wir haben

$$(11) \quad \beta_j P\binom{j}{k} = \beta_k, \qquad (12) \quad \beta_j \cup a_i = \beta_{ij} \cup a_i.$$

Hilfssatz 1. $(\beta\gamma)_j \leqq \beta_j$. Beweis. Wie üblich; siehe 1).

Hilfssatz 2. $(-\beta)_j = \beta_j$, $(\beta + \gamma)_j \leqq \beta_j \cup \gamma_j$.

Beweis. Die erste Behauptung ist evident. Nun ist, nach (9) mit $\alpha = \beta + \gamma$,

$$(\beta+\gamma)_j = \big((\beta+\gamma)_{ij} \cup a_i\big) \frown a_j$$

$$= \Big(\Big(\big\{(\beta_{ij} \cup c_{ik}) \frown (a_j \cup a_k)\big\} \cup \big\{(\gamma_{ij} \cup a_k) \frown (c_{ik} \cup a_j)\big\}\Big) \frown (a_i \cup a_j) \cup a_i\Big) \frown a_j$$

$$= \Big\{\Big(\big\{(\beta_{ij} \cup c_{ik}) \frown (a_j \cup a_k)\big\} \cup \big\{(\gamma_{ij} \cup a_k) \frown (c_{ik} \cup a_j)\big\}\Big) \cup a_i\Big\} \frown (a_i \cup a_j) \frown a_j$$

$$\leqq \big((\beta_{ij} \cup c_{ik}) \cup (\gamma_{ij} \cup a_k) \cup a_i\big) \frown a_j = (\beta_{ij} \cup \gamma_{ij} \cup a_i \cup a_k) \frown a_j$$

$$= (\beta_{ij} \cup \gamma_{ij} \cup a_i) \frown a_j = (\beta_j \cup \gamma_j \cup a_i) \frown a_j = \beta_j \cup \gamma_j,$$

was die zweite Hälfte des Hilfssatzes beweist.

Diese Hilfssätze zeigen: Wenn $\mathfrak{b}$ ein Ideal vom Interval $[0, a_j]$ ist, so bildet die Gesamtheit der Elemente $\beta \in \mathfrak{S}$ mit $\beta_i \in \mathfrak{b}$ ein Rechtsideal in $\mathfrak{S}$.

Hilfssatz 3. Ist $a_j \leqq \beta_j^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \cdots \cup \beta_j^{(r)}$, so ist $\{(\alpha_{ij} \cup \beta_{kj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \frown (a_i \cup a_k)\} \cup a_k = a_i \cup a_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$.

Beweis. Die linke Seite der letzten Formel ist gleich $(\alpha_{ij} \cup \beta_{kj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots \cup a_k) \frown (a_i \cup a_k)$. Hier ist der Ausdruck in den vorigen

4) Es ist $x = \beta_{kj}$.

5) Dies alles lässt sich ganz ähnlich wie beim komplementären Fall beweisen; siehe 1).

Klammern $\geqq a_{ij} \cup a_j \cup a_k = a_{ij} \cup a_{kj} \cup a_k = a_{ij} \cup a_{ij}P\begin{pmatrix} i & j \\ k & j \end{pmatrix} \cup a_k = a_{ij} \cup \big((a_{ij} \cup c_{ik}) \cap (a_k \cup a_j)\big) \cup a_k = a_{ij} \cup \big((a_{ij} \cup c_{ik} \cup a_k) \cap (a_k \cup a_j)\big) = (a_{ij} \cup c_{jk} \cup a_k) \cap (a_{ij} \cup a_k \cup a_j) \geqq a_i \cup a_k$.

Nun setzen wir voraus, dass L die folgende Bedingung erfüllt:

Bedingung (A): Ist $x \cup a_1 = a_2 \cup a_1$ für ein Element x aus L, so gibt es ein Komplement γ_{21} von a_1 in $a_2 \cup a_1$ mit $\gamma_{21} \leqq x$[6].

Unter dieser Annahme gilt

Hilfsstaz 4. Ist $\alpha_j \leqq \beta_j^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \cdots \cup \beta_j^{(r)}$ für $\alpha, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(r)} \in \mathfrak{S}$, so gibt es $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(r)}$ in $\mathfrak{S}$ derart, dass

$$\alpha = \beta^{(1)}\gamma^{(1)} + \beta^{(2)}\gamma^{(2)} + \cdots + \beta^{(r)}\gamma^{(r)}$$

ist.

Beweis. Wegen des Hilfssatzes 3 und der obigen Annahme gibt es ein $\gamma = \gamma^{(1)} \in \mathfrak{S}$ mit $\gamma_{ik} \leqq (a_{ij} \cup \beta_{kj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap (a_i \cup a_k)$, wo $i \neq j \neq k \neq i$ ist. Andererseits ist

$$(a_i, c_{ik}, a_k) \underset{a_j}{\sim} (a_{ij}, c_{ik}, x) \underset{a_j}{\sim} (a_i, y, x) \underset{a_j}{\sim} \big((-\alpha)_{ij}, y, a_k\big),$$

wo $x = (a_{ij} \cup c_{ik}) \cap (a_k \cup a_j) = a_{kj}$, $y = (a_i \cup x) \cap (c_{ik} \cup a_j) = (a_i \cup a_{kj}) \cap (c_{ik} \cup a_j)$. Mit dem gleichen y gilt

$$(a_i, c_{ik}, a_k) \underset{a_j}{\sim} \big((-\alpha)_{ij}, y, a_k\big) \underset{a_j}{\sim} \big((\beta^{(1)}\gamma)_{ij}, c_{ik}, z\big) \underset{a_j}{\sim} \big((-\alpha + \beta^{(1)}\gamma)_{ij}, y, z\big).$$

Also

$$(-\alpha + \beta^{(1)}\gamma)_{ij} = (y \cup z) \cap (a_i \cup a_j),$$

$$\begin{aligned}(-\alpha + \beta^{(1)}\gamma)_j &= \big(a_i \cup \{(y \cup z) \cap (a_i \cup a_j)\}\big) \cap a_j \\ &= (a_i \cup y \cup z) \cap (a_i \cup a_j) \cap a_j = (a_i \cup y \cup z) \cap a_j.\end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} z &= \big((\beta^{(1)}\gamma)_{ij} \cup c_{ik}\big) \cap (a_k \cup a_j) = (\beta^{(1)}\gamma)_{kj} = (\gamma_{kj} \cup \beta_{ij}^{(1)}) \cap (a_k \cup a_j) \\ &\leqq \big(\{(a_{kj} \cup \beta_{ij}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap (a_k \cup a_i)\} \cup \beta_{ij}^{(1)}\big) \cap (a_k \cup a_j) \\ &= (a_{kj} \cup \beta_{ij}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap (a_k \cup a_i \cup \beta_{ij}^{(1)}) \cap (a_k \cup a_j). \end{aligned}$$

Ist l ein von i, j, k verschiedener vierter Index, so ist auch

$$z = zP\begin{pmatrix} i & k & j \\ l & k & j \end{pmatrix} \leqq (a_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap (a_k \cup a_l \cup \beta_{lj}^{(1)}) \cap (a_k \cup a_j).$$

Weiter ist $a_i \cup y = a_i \cup \{(a_i \cup a_{kj}) \cap (c_{ik} \cup a_j)\} = (a_i \cup a_{kj}) \cap (c_{ik} \cup a_j \cup a_i) = a_i \cup a_{kj}$. Daher ist $(-\alpha + \beta^{(1)}\gamma)_j$

$$\begin{aligned} &\leqq \big(\{(a_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap (a_k \cup a_l \cup \beta_{lj}^{(1)}) \cap (a_k \cup a_j)\} \cup a_i \cup a_{kj}\big) \cap a_j \\ &= \big(\{(a_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cdots) \cap (a_k \cup a_l \cup \beta_{lj}^{(1)}) \cap (a_k \cup a_j)\} \cup a_{kj}\big) \cap a_j \\ &= (a_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap (a_k \cup a_l \cup \beta_{lj}^{(1)} \cup a_{kj}) \cap (a_k \cup a_j) \cap a_j \\ &\leqq (a_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)} \cup \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cap a_j = (\beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots) \cup \{(a_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)}) \cap a_j\}. \end{aligned}$$

6) Es genügt in Wahrheit dies nur für $x \in L\ (a_1, a_2, a_3)$ anzunehmen.

Hier ist $(\alpha_{kj}, \alpha_j) \perp$, $(\alpha_{kj} \cup \alpha, \beta_{lj}^{(1)}) \perp$[7], also $(\alpha_{kj}, \alpha_j, \beta_{lj}^{(1)}) \perp$, $(\alpha_{kj} \cup \beta_{lj}^{(1)}) \cap \alpha_j = 0$. Daher gilt

$$(\alpha-\beta^{(1)}\gamma)_j = (-\alpha+\beta^{(1)}\gamma)_j \leqq \beta_j^{(2)} \cup \beta_j^{(3)} \cup \cdots \cup \beta_j^{(r)}.$$

Nun folgt der Hilfssatz durch Induktion nach r, da er im Falle $r=0$ trivialerweise richtig ist.

Hiermit ist gezeigt: Wenn $\mathfrak{B}$ ein Rechtsideal von $\mathfrak{S}$ ist, bildet die Gesamtheit von β_i mit $\beta \in \mathfrak{B}$ ein Ideal von $[0, a_i]$; zwei verschiedenen Rechtsidealen von $\mathfrak{S}$ gehören zwar zwei verschiedene Ideale von $[0, a_i]$.

Nun führen wir die zweite Bedingung ein, die wir für unseren L als erfüllt annehmen:

Bedingung (B): Für zwei Elemente $b_1 > c_1$ aus $[0, a_1]$ existiert ein β_{21} (Komplement von a_1 in $a_2 \cup a_1$), so dass $\beta_{21} \leqq a_2 \cup b_1$ aber $\not\leqq a_2 \cup c_1$ ist[8].

Diese Bedingung ist aber noch nicht hinreichend, um die Zuordnung zwischen L und dem Verband der Rechtsideale im allgemeinsten Fall zu bewerkstelligen. Also setzen wir zuerst voraus die weitere

Bedingung (B_1): $[0, a_1]$ ist vollständig. Gilt für Komplemente $\alpha_{21}, \beta_{21}^{(\tau)}$ $(\tau \in T)$ von a_1 in $a_2 \cup a_1$ die Relation $a_1 \left(=(a_2 \cup \alpha_{21}) \cap a_1\right) \leqq \sup_{\tau \in T} \left\{\beta_1^{(\tau)}\left(=(a_2 \cup \beta_{21}^{(\tau)}) \cap a_1\right)\right\}$, so ist $a_1 \leqq \beta_1^{(\tau_1)} \cup \beta_1^{(\tau_2)} \cup \ldots \cup \beta_1^{(\tau_r)}$ mit geeigneten endlich-vielen $\beta_1^{(\tau)}$.

Dann wird der Verband $[0, a_1]$ zum Verband aller Rechtsideale von $\mathfrak{S}$ isomorph.

Beweis. Es sei $b \in [0, a_1]$. $\beta(\in \mathfrak{S})$ mit $\beta_1 \leqq b$ bilden ein Rechtsideal $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{S}$, wie wir oben gesehen haben; dafür schreiben wir: $b \to \mathfrak{B}$. Ist $b > c$, so gilt $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$ $(b \to \mathfrak{B},\ c \to \mathfrak{C})$ wegen der Bedingung (B)[9].

Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ ein Rechtsideal von $\mathfrak{S}$, so sei b das erzeugehende Element des nach der obigen Vorschrift zu $\mathfrak{B}$ zugeordnten Ideales $\mathfrak{b}$ von $[0, a_1]$: $\mathfrak{B} \to b = \sup \mathfrak{b} = \sup \{\beta_1 \mid \beta \in \mathfrak{B}\}$. Ist $\mathfrak{C}$ ein zweites Rechtsideal von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}$, wie wir schon bemerkt haben. Dann folgt aber aus der Bedingung (B), dass $\mathfrak{C} \to c = \sup \mathfrak{c} < \sup \mathfrak{b} = b$ ist. Nun ist es klar, dass die Zuordnung $b \leftrightarrow \mathfrak{B}$ den verlangten $(1-1)$ Isomorphismus zwischen $[0, a_1]$ und dem Rechtsidealverband von $\mathfrak{S}$ gibt.

Wir nehmen jetzt die Vollständigkeit von L zurück, aber verschärfen (B) in die

Bedingung (B'): Ist $b \in [0, a_1]$, so gibt es endlich-viele Komplemente $\beta_{21}^{(1)}, \beta_{21}^{(2)}, \ldots, \beta_{21}^{(r)}$ von a_1 in $a_2 \cup a_1$ mit $b = \beta_1^{(1)} \cup \beta_1^{(2)} \cup \cdots \cup \beta_1^{(r)}$ $\left(\beta_1^{(\rho)} = (a_2 \cup \beta_{21}^{(\rho)}) \cap a_1\right)$.

Unter dieser Bedingung (B') ist $[0, a_1]$ mit dem Verband aller endlichen Rechtsideale von $\mathfrak{S}$ isomorph. Beweis. Ist $\mathfrak{B}$ ein endliches Rechtsideal in $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{B} = (\beta^{(1)}\mathfrak{S}, \beta^{(2)}\mathfrak{S}, \ldots, \beta^{(r)}\mathfrak{S})$, so ist das zugeordnete

---

7) $(a_j, \beta_{lj}) \perp$, $(a_j \cup \beta_{lj}, a_k) \perp$ also $(a_j, \beta_{lj}, a_k) \perp$, $(a_k a_j) \cap \beta_{lj} = 0$. Für die Theorie der Unabhängigkeit in modularen Verbänden siehe etwa G. Birkhoff, Lattice Theory (1940) und J. von Neumann, Continuous Goemetry. I. (1936).

8) Oder, was dasselbe ist, $\beta_1\left(=(a_2 \cup \beta_{21}) \cap a_1\right) \leqq b_1$ aber $\not\leqq c_1$.

9) $>$ bedeutet $\geqq$ und $\neq$.

Ideal $\mathfrak{b}$ von $[0, a_1]$ ein Hauptideal: $\mathfrak{b}=[0, \beta_1^{(1)} \cup \beta_1^{(2)} \cup \cdots \cup \beta_1^{(r)}]$. Andererseits ist es klar, dass $\beta_1^{(1)} \cup \cdots \cup \beta_1^{(r)}$ $(\in [0, a_1]) \rightarrow (\beta^{(1)}\mathfrak{S}, \cdots \beta^{(r)}\mathfrak{S})$ (in demselben Sinne von $\rightarrow$ wie oben). Nun beweist man die Behauptung ganz ähnlich wie oben.

Es sei bemerkt, dass diese Bedingungen (B'), (B_1) beide von (B) absorbiert werden, wenn L von endlicher Dimension ist.

§ **3.** *Hauptsatz.*

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein Ring mit einem Einselement ε. Wir betrachten einen n-gliedrigen Vektorraum $\mathfrak{M}=E_1\mathfrak{S}+E_2\mathfrak{S}+\cdots+E_n\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{S}$ und den modularen Verband L seiner Unterräume ($=\mathfrak{S}$-Unterrechtsmoduln). Die n Elemente $a_1=E_1\mathfrak{S}$, $a_2=E_2\mathfrak{S}, \ldots, a_n=E_n\mathfrak{S}$ in L sind zueinander unabhängig und perspektiv in L. Ihre Vereinigung ist ersichtlich das Eins $I=\mathfrak{M}$ von L. Komplemente von $a_j=E_j\mathfrak{S}$ in $a_i \cup a_j=E_i\mathfrak{S}+E_j\mathfrak{S}$ sind die Untermoduln von der Form

$$\beta_{ij}=(E_i-E_j\beta)\mathfrak{S} \qquad (\beta \in \mathfrak{S}) \tag{13}$$

$(i \neq j)$. Ist $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{U} \cup E_1\mathfrak{S}=E_2\mathfrak{S}+E_1\mathfrak{S}$, so wird E_2 als eine Summe $u+E_1\alpha$ von u, $E_1\alpha$ aus $\mathfrak{U}$, $E_1\mathfrak{S}$ dargestellt. Dann ist $u\mathfrak{S}$ $(\in L) \subseteqq \mathfrak{U}$ und $u\mathfrak{S} \cup E_1\mathfrak{S}=E_2\mathfrak{S}+E_1\mathfrak{S}$. Hier ist $u\mathfrak{S} \cap E_1\mathfrak{S}=0$; ist nämlich $v=u\xi=E_1\eta$ ein gemeinsames Element von $u\mathfrak{S}$ und $E_1\mathfrak{S}$, so gilt $E_2\xi$ $(\in E_2\mathfrak{S})=u\xi+E_1\alpha\xi=E_1(\eta+\alpha\xi) \in E_1\mathfrak{S}$ also $E_2\xi=0$, $\xi=0$ und $v=0$. Dies weist aber die Bedingung (A) des vorigen Paragraphen für L nach.

Weiter genügt L der Bedingung (B), weil für das Element β_{ij} in (13) $\beta_j=E_j\beta\mathfrak{S}$ ist. Die Bedingung (B_1) ist auch erfüllt, wie man leicht einsieht[10].

Gehen wir jetzt zum Unterverband L' von endlichen $\mathfrak{S}$-Unterrechtsmoduln von $\mathfrak{M}$ über. I, a_i, β_{ij} und β_j alle liegen in L', und a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sind auch in L' zueinander perspektiv. Da weiter $u\mathfrak{S} \in L'$, erfüllt L' (A). Er genügt auch (B').

Satz. Ein endlich-dimensionaler modularer Verband (bzw, ein modularer Verband, bzw. ein vollständiger modularer Verband) L_0 ist dann und nur dann mit dem Verband aller Rechtsideale (bzw. aller endlichen Rechtsideale, bzw. aller Rechtsideale) in einem assoziativen Ring mit Einselement isomorph, wenn L_0 in einem modularen Verband L als Ideal $[0, I_0]$ derart eingebettet werden kann, dass es in L vier in L zueinander unabhängigen und zueinander perspektiven Elemente $a_1=I_0, a_2, a_3, a_4$ mit der Vereinigung $a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup a_4=I$ (Eins von L) gibt, und die Bedingungen $(A), (B)$ (bzw. $(A), (B')$, bzw. $(A), (B), (B_1)$) erfüllt sind.

---

10) Endlichartigkeit von (Rechts-) Idealen (im Sinne von P. Lorenzen, Abstrakte Begründung der mutiplikativen Idealtheorie, Math. Zeitschr. 45 (1939)).