18. *Sur les espaces à connexion affine qui peuvent représenter les espaces projectifs des paths, III.*

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1945.)

§ 1. Dans les deux Notes précédentes[1] portant le même titre, nous avons considéré les propriétés caractéristiques des espaces A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions qui contiennent un champ de vecteur ξ^λ et qui peuvent représenter les espaces P_n projectifs des paths à n dimensions. Les points de P_n étant représentés par les rayons, c'est-à-dire, par les courbes définies par les équations différentielles $\frac{dx^\lambda}{dr}=\xi^\lambda$, et les paths de P_n par les surfaces S_2 à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1}, pour que l'espace A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions puisse représenter un espace P_n projectif des paths à n dimensions, il faut et il suffit que toutes les surfaces S_2 à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1} soient totalement géodésiques. Pour que toutes les surfaces S_2 à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1} soient totalement géodésiques, il faut et il suffit que les composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine et celles ξ^λ du champ de vecteur satisfassent aux deux conditions

$$\xi^\lambda{}_{;\mu;\nu}+\Pi^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega=\delta^\lambda_\mu\varphi_\nu+\delta^\lambda_\nu\varphi_\mu+\varphi_{\mu\nu}\xi^\lambda\,, \tag{1.1}$$

et

$$\xi^\lambda{}_{;\nu}=p\delta^\lambda_\nu+q_\nu\xi^\lambda\,, \tag{1.2}$$

où nous avons désigné par le point-virgule la dérivée covariante par rapport aux composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine de A_{n+1}, par $\Pi^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}$ le tenseur de courbure formé avec les $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$:

$$\Pi^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}=\frac{\partial\Pi^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\omega}-\frac{\partial\Pi^\lambda_{\mu\omega}}{\partial x^\nu}+\Pi^\alpha_{\mu\nu}\Pi^\lambda_{\alpha\omega}-\Pi^\alpha_{\mu\omega}\Pi^\lambda_{\alpha\nu}\,,$$

et par $\varphi_\nu, \varphi_{\mu\nu}, p, q_\nu$ les fonctions des coordonnées x^λ de A_{n+1} ainsi définies.

Dans une Note précédente[2], le présent auteur a donné les interprétations géométriques des équations tensorielles (1.1) et (1.2). L'équation (1.1) montre que notre espace à connexion affine admet une collinéation sousprojective infinitésimale dans la direction de ξ^λ. L'équation (1.2) représente que le champ de vecteur ξ^λ est cohérent, c'est-à-

---

1) K. Yano: Sur les espaces à connexion affine qui peuvent représenter les espaces projectifs des paths, I, Proc., **20** (1944), 631–639; II, Proc., **21** (1945), 16–24.

2) K. Yano: Subprojective transformations, subprojective spaces and subprojective collineations. Proc. **20** (1944), 671–675.

dire, si l'on développe le vecteur ξ^λ le long d'une courbe quelconque, les directions successives données par ξ^λ se coupent toujours.

Or, pour étudier l'espace à connexion projective, M. D. van Dantzig[1] prend les fonctions $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ homogènes de degré moins un par rapport aux coordonnées homogènes curvilignes x^λ et se transformant, par rapport aux transformations de coordonnées homogènes, comme les composantes de la connexion affine de l'espace à $n+1$ dimensions, ce qui revient à prendre un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions qui satisfait, dans le cas de sans torsion, à la condition

$$\xi^\lambda{}_{;\mu;\nu}+\Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega=0\,, \tag{1.3}$$

en d'autres termes, l'espace qui admet une collinéation affine dans la direction de ξ^λ. Cette condition est plus spéciale que (1.1), mais, il ne suppose pas la condition (1.2), et son espace n'admet pas nécessairement les paths. Il trouve (1.2) comme la condition pour que son espace admette les paths.

D'autre part, MM. O. Veblen[2], J. H. C. Whitehead[3] et J. Haantjes[4] prennent, pour étudier leurs espaces à connexion projective, un espace à connexion affine satisfaisant à la condition (1.3) et à la condition

$$\xi^\lambda{}_{;\nu}=\delta^\lambda_\nu \tag{1.4}$$

qui exprime que le champ de vecteur ξ^λ est concourant[5].

Dans ce cas, les paths de P_n admettent les paramètres projectifs. On sait que si les paths

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x^\lambda}{d\bar{t}^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\bar{t}}\frac{dx^\nu}{d\bar{t}}=0$$

de A_{n+1} représentent le même path de P_n, c'est-à-dire, si les deux paths ci-dessus se trouvent sur la même surface S_2 totalement géodégique engendrée par les rayons rencontrant un même path de A_{n+1}, les paramétres t et $\bar{t}$ correspondant au même point sur le path de P_n sont liés l'un à l'autre par une transformation homographique[6]. Pour cette raison, on appelle paramètre projectif t qui est un paramètre affine pour les paths de A_{n+1}.

Dans cette Note, nous allons partir d'un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions satiafaisant à la condition (1.3). Alors, la condition

---

1) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. Math. Ann., **106** (1932), 400–454.

2) O. Veblen: Generalized projective geometry. Journal of the London Math. Soc., (1929), 140–160.

3) J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces. Annals of Matn., **32** (1931), 327–360.

4) J. Haantjes: On the projective geometry of paths. Proc. Edinburgh Math. Soc., **5** (1937), 103–I15.

5) K. Yano: Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann. Proc., **19** (1943), 189–197.

6) J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces, loc. cit.

K. Yano: Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **24** (1938), 395–464; Projective parameters in projective and conformal geometries. Proc., **20** (1944), 45–53.

nécessaire et suffisante pour que cet espace représente un espace projectif des paths à n dimensions est que l'équation (1.2) soit valable. Le but de la présente Note est de chercher la condition nécessaire et suffisante pour que les paths de P_n admette, dans ces conditions, les paramètres projectifs au sens expliqué en haut.

§ 2. Considérons d'abord un espace A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions qui contient un champ de vecteur ξ^λ et qui admet une collinéation affine dans la direction de ξ^λ. La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace A_{n+1} admette une collinéation affine dans la direction de ξ^λ est qu'on ait

$$(\xi^\lambda{}_{;\mu}+S^{\cdot\lambda}_{\mu\omega}\xi^\omega)_{;\nu}+\Pi^{\cdot\lambda}_{\mu\nu\omega}\xi^\omega=0\,, \tag{2.1}$$

où nous avons désigné par le point-virgule la dérivée covariante par rapport aux composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine de A_{n+1}, par $S^{\cdot\lambda}_{\mu\nu}$ le tenseur de torsion et par $\Pi^{\cdot\lambda}_{\mu\nu\omega}$ les composantes du tenseur de courbure formées avec les $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$. C'est un tel espace que M. D. van Dantzig a pris pour étudier son espace à connexion projective. En effet, si l'on prend un systeme de coordonnées dans lequel on a $\xi^\lambda=x^\lambda$, l'équation (2.1) devient

$$\frac{\partial\Pi^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\omega}x^\omega+\Pi^\lambda_{\mu\nu}=0\,, \tag{2.2}$$

ce qui montre que les compsantes de la connexion affine sont les fonctions homogènes de degré moins un par rapport aux coordonnées homogènes curvilignes.

Comme l'a montré M. D. van Dentzig, son espace P_n à connexion projective générale n'admet pas nécessairement les paths, ce qui signifie que, dans l'espace à connexion affine à $n+1$ dimensions ne satisfaisant qu'à la condition (2.1), les surfaces S_2 à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1} ne sont pas nécessairement totalement géodésiques.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace projectif généralisé admette les paths, en d'autres termes, pour que, dans l'espace A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions qui représente l'espace projectif généralisé P_n à n dimensions, les surfaces S_2 engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1} soient totalement géodésiques, est qu'on ait

$$\xi^\lambda{}_{;\nu}=p\delta^\lambda_\nu+q_\nu\xi^\lambda\,, \tag{2.3}$$

ou, dans le système de coordonnées homogènes curvilignes de M. D. van Dantzig,

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu}x^\mu=(p-1)\delta^\lambda_\nu+q_\nu x^\lambda\,. \tag{2.4}$$

L'équation (2.3) nous montre que la direction donnée par ξ^λ dans laquelle l'espace A_{n+1} admet une collinéation affine doit être cohérente,

1) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räum, loc. cit.

J. A. Schouten et J. Haantjes: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. Compositio Math., **3** (1936), 1-51.

c'est-à-dire, si l'on développe le vecteur ξ^λ le long d'une courbe quelconque, les directions successives données par ξ^λ se coupent toujours, par conséquent les surfaces réglées par ces directions sont développables.

Si l'on suppose deux conditions (2.1) et (2.3) et de plus que l'espace soit sans torsion, l'espace A_{n+1} peut représenter un espace P_n projectif des paths.

Cela étant, prenons un système de coordonnées dans lequel le champ de vecteur ξ^λ a composantes

$$\xi^\lambda=\delta_0^\lambda . \tag{2.5}$$

Alors, les équations (2.1) et (2.3) deviennent respectivement

$$\frac{\partial \Pi_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^0}=0 \tag{2.6}$$

et

$$\Pi_{0\nu}^\lambda=p\delta_\nu^\lambda+q_\nu\delta_0^\lambda . \tag{2.7}$$

Soient

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi_{\mu\nu}^\lambda\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0 , \tag{2.8}$$

les équations différentielles d'un path de A_{n+1}, où t est un paramètre affine sur le path de A_{n+1} et soit $f^\nu(t)$ un système de solutions de ces équations différentielles.

Alors, les rayons passant par le point $(x^\lambda)_0$ étant représentés par les équations de la forme

$$x^\lambda=(x^\lambda)_0+\sigma\delta_0^\lambda ,$$

la surface engendrée par les rayons rencontrant le path $x^\lambda=f^\lambda(t)$ est représentée par

$$x^\lambda=f^\lambda(t)+\sigma\delta_0^\lambda , \tag{2.9}$$

t et σ étant deux paramètres sur la surface S_2 à deux dimensions. La surface S_2 est totalement géodésique.

En effet, si l'on considère le paramètre σ comme une fonction de t, les équations $x^\lambda=f^\lambda(t)+\sigma(t)\delta_0^\lambda$ représentent une courbe sur S_2, nous allons déterminer la fonction $\sigma(t)$ de manière que cette courbe soit encore un path de A_{n+1}.

En substituant $f^\lambda(t)=x^\lambda-\sigma(t)\delta_0^\lambda$ dans les équations

$$\frac{d^2f^\lambda}{dt^2}+\Pi_{\mu\nu}^\lambda(f)\frac{df^\mu}{dt}\frac{df^\nu}{dt}=0 ,$$

on trouve, les fonctions $\Pi_{\mu\nu}^\lambda$ étant indépendantes de x^0,

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}-\frac{d^2\sigma}{dt^2}\delta_0^\lambda+\Pi_{\mu\nu}^\lambda(x)\left(\frac{dx^\mu}{dt}-\frac{d\sigma}{dt}\delta_0^\mu\right)\left(\frac{dx^\nu}{dt}-\frac{d\sigma}{dt}\delta_0^\nu\right)=0 ,$$

d'où

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi_{\mu\nu}^\lambda\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}-2\Pi_{0\nu}^\lambda\frac{d\sigma}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}+\Pi_{00}^\lambda\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2-\frac{d^2\sigma}{dt^2}\delta_0^\lambda=0 .$$

En substituant (2.7) dans ces équations, on obtient

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}-2p\frac{d\sigma}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}$$
$$+\left[(p+q_0)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2-\frac{d^2\sigma}{dt^2}-2q_\nu\frac{dx^\nu}{dt}\frac{d\sigma}{dt}\right]\delta^\lambda_0=0\,, \tag{2.10}$$

où, $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ étant indépendantes de x^0, les p et q_ν ne sont les fonctions que de f^λ et par conséquent on peut les regarder comme étant connues. Donc, en résolvant les équations différentielles

$$(p+q_0)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2-\frac{d^2\sigma}{dt^2}-2q_\nu\frac{dx^\nu}{dt}\frac{d\sigma}{dt}$$
$$=(p-q_0)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2-\frac{d^2\sigma}{dt^2}-2q_\nu\frac{df^\nu}{dt}\frac{d\sigma}{dt}=0 \tag{2.11}$$

par rapport à σ, on obtient la fonction de la forme

$$\sigma=F(t,\alpha,\beta)\,, \tag{2.12}$$

où α et β sont les constantes d'intégration arbitraires.

Donc, en prenant la fonction σ donnée par (2.12), les équations (2.9) nous donnent un path sur S_2 et, comme σ contient deux constantes arbitraires, on peut mener un et un seul path de A_{n+1} qui passe deux points arbitraiement donnés sur S_2 et qui est contenu tout entier dans S_2. Donc, S_2 est totalement géodésique.

La fonction σ étant donnée par (2.12), les équations (2.10) nous donnent

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}-2p\frac{d\sigma}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}=0\,, \tag{2.13}$$

donc, le paramètre t n'est pas un paramètre affine pour le nouveau path. En posant

$$-2p\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\dfrac{d^2t}{d\bar{t}^2}}{\left(\dfrac{dt}{d\bar{t}}\right)^2}=-\frac{\dfrac{d^2\bar{t}}{dt^2}}{\dfrac{d\bar{t}}{dt}}\,, \tag{2.14}$$

on obtient, des équations (2.13),

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\bar{t}^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\bar{t}}\frac{dx^\nu}{d\bar{t}}=0\,, \tag{2.15}$$

t étant le paramètre affine pour le nouveau path.

Nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que deux paramètres t et $\bar{t}$ soient liés toujours par une relation homographique.

Pour que l'équation (2.14) admette une solution de la forme

$$\bar{t}=\frac{at+b}{ct+d}\,, \tag{2.16}$$

on doit avoir

$$-p\frac{d\sigma}{dt}=\frac{c}{ct+d}\,, \tag{2.17}$$

d'où, p n'étant pas nul, et ne contenant pas x^0,

$$p^2\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\frac{c^2p}{(ct+d)^2}+\frac{\partial p}{\partial x^\lambda}\frac{df^\lambda}{dt}\frac{c}{ct+d}\,. \tag{2.18}$$

En substituant (2.17) et (2.18) dans (2.11), on trouve

$$q_0\frac{c^2}{(ct+d)^2}+\frac{\partial p}{\partial x^\lambda}\frac{df^\lambda}{dt}\frac{c}{ct+d}-2pq_\lambda\frac{df^\lambda}{dt}\frac{c}{ct+d}=0\,. \tag{2.19}$$

Les $\dfrac{df^\lambda}{dt}$ pouvant être pris arbitrairement en chaque point de l'espace, on en tire

$$\frac{\partial p}{\partial x^\lambda}=2pq_\lambda \quad \text{et par conséquent} \quad q_0=0\,. \tag{2.20}$$

Inversement, si les conditions (2.20) sont satisfaites, les équations (2.11) sont satisfaites par la valeur de σ satisfaisant à (2.17), et les équations (2.14) et (2.17) nous donnent

$$\bar{t}=\frac{at+b}{ct+d}\,.$$

Donc, nous avons le

Theorème: Un espace projectif des paths P_n à n dimensions étant représenté par un espace A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions qui contient un champ de vecteur ξ^λ et dont la connexion affine $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ satisfait aux conditions

$$\xi^\lambda{}_{;\mu;\nu}+\Pi^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega=0 \quad \text{et} \quad \xi^\lambda{}_{;\nu}=p\delta^\lambda_\nu+q_\nu\xi^\lambda\,,$$

et les paths de P_n par les surfaces S_2 totalement géodésiques engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1}, pour que les paths de P_n admettent les paramètres projectifs, soit, pour que les paramètres affines pour deux paths se trouvant tous les deux sur une même surface totalement géodésique engendrée par les rayons rencontrant un même path soient liés l'un à l'autre par une relation homographique, il faut et il suffit que $\dfrac{\partial p}{\partial x^\lambda}=2pq_\lambda$.

§ 3. Nous avons trouvé que dans un espace à connexion projective dont la connexion a les composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial \Pi^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^0}=0 \quad \text{et} \quad \Pi^\lambda_{0\nu}=p\delta^\lambda_\nu+\frac{1}{2p}\frac{\partial p}{\partial x^\nu}\delta^\lambda_0\,, \tag{3.1}$$

les paths admettent les paramètres projectifs. Nous allons montrer, dans ce dernier paragraphe, comment le paramètre projectif peut se représenter en fonction d'un paramètre affine sur le path de P_n.

Soient

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0\,, \tag{3.2}$$

les équations différentielles d'un path. En posant $\lambda=0$ et $\lambda=i$ $(i, j, k, \dots =1, 2, \dots, n)$ respectivement dans (3.2), on obtient

$$\frac{d^2x^0}{dt^2}+\Pi^0_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2+2\Pi^0_{0k}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^k}{dt}+\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0\,,$$

et

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Pi^i_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2+2\Pi^i_{0k}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^k}{dt}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0\,.$$

En substituant (3.1) dans ces équations, on obtient respectivement

$$\frac{d^2x^0}{dt^2}+p\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2+\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x^k}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^k}{dt}+\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0\,, \tag{3.3}$$

et

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2p\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^i}{dt}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0\,. \tag{3.4}$$

Définissons un paramètre s par l'équation

$$2p\frac{dx^0}{dt}=\frac{d^2t}{ds^2}\Big/\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \tag{3.5}$$

alors, les équations (3.4) prennent la forme

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0\,, \tag{3.6}$$

et on voit que le paramètre s est de caractère affine.

En dérivant (3.5) par rapport à t, on trouve

$$2\frac{\partial p}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^0}{dt}+2p\frac{d^2x^0}{dt^2}=\frac{\dfrac{d^3t}{ds^3}}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^3}-\frac{2\left(\dfrac{d^2t}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^4}\,. \tag{3.7}$$

En substituant (3.5) et (3.7) dans (3.3), on obtient

$$\{t, s\}=\frac{\dfrac{d^3t}{ds^3}}{\dfrac{dt}{ds}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\dfrac{dt}{ds}}\right)^2=-2p\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\,, \tag{3.8}$$

ce qui montre que le paramètre t est bien de caractère projectif[1].

1) L. Berwald: On the projective geometry of paths. Annals of Math., **37** (1936), 879-898; J. Haantjes: On the prejective geometry of paths. Proc. Edinburgh Math. Soc., **5** (1937), 103-115.