16. *Die Geschwindigkeitspotentiale und die Kutta-Joukowskischen Bedingungen für die Strömungen in vielfach zusammenhängenden Gebieten. II.*

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1945.)

6. *Vorbemerkungen bei der Spezialisierung zu zweifach zusammenhängenden Strömungen.*

Wir haben uns in der vorderen Hälfte[1] dieser Note mit den Problemen beschäftigt, welche sich sowohl auf die Existenz, die eindeutige Bestimmtheit und übrigens eine Darstellung der Geschwindigkeitspotentiale als auch auf die zugehörigen Kutta-Joukowskischen Bedingungen bei allgemeinen vielfach zusammenhängenden Strömungen beziehen. Wir können wie dabei vorher erwähnt und wollen tatsächlich in dieser Fortsetzung, als mäßige Beispiele, dieselben Probleme insbesondere dann in ganz expliziter Weise erklären, falls ein *zweifach* zusammenhängendes Gebiet als das Strömungsfeld vorgegeben wird. Was ein Gebiet betrifft, das eine Punktrandkomponente besitzt, lassen sich die folgenden Überlegungen ohne Schwierigkeiten dafür modifizieren. Wir beschränken uns deshalb hierbei auch auf den Fall, wo jede der beiden Randkomponenten nicht in einen Punkt ausartet, sondern wirklich aus einem Kontinuum besteht.

Bekanntlich läßt sich ein beliebig vorgegebenes zweifach zusammenhängendes Gebiet solcher Art, d. h. ein sogenanntes *Ringgebiet*, dessen *Modul*, eine wesentlich einzige konforme Invariante, gleich $\lg \frac{1}{q}$ $(0<q<1)$ ist, stets konform und schlicht auf den konzentrischen Kreisring $q<|z|<1$ abbilden, und überdies ist diese Abbildung dann, von einer Drehung um den Punkt $z=0$ abgesehen, eindeutig bestimmt, wenn dasjenige Urrandkontinuum ausgezeichnet wird, das etwa der inneren Randkreisperipherie $|z|=q$ entsprechen soll. Für das Normalgebiet D, das wir der Bequemlichkeit halber auch bei den früheren allgemeinen Überlegungen eingeführt haben, können wir also hierbei einen konzentrischen Kreisring

$$R: \quad q<|z|<1$$

wählen. Darauf hin haben wir in diesem Falle die wirkliche Möglichkeit, die expliziten Erklärungen für alle auftretenden Größen zu geben.

7. *Verallgemeinerte Greensche Funktion des Kreisringes.*

Die (gewöhnliche) Greensche Funktion des Kreisringes $q^{\frac{1}{2}}<|z|<q^{-\frac{1}{2}}$ mit dem reell-positiven Quellpunkte p läßt sich wie bekannt[2] in der Form

1) Derselbe Titel. I, Proc. **21** (1945), 7–15.

2) Vgl. z. B. R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, 1. Bd., 2. Aufl., Berlin, (1931), S. 335–337. Wegen einer anderen Normierung der Singularität am Quellpunkte ist dort noch ein Faktor $\frac{1}{2\pi}$ hinzugefügt.

$$g^*(z\,;\,p)=-\Re\lg\left[iz^{-\frac{\lg p}{\lg q}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{z}{p}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\lg pz\right)}\right]\qquad(q^{\frac{1}{2}}<|z|<q^{-\frac{1}{2}})$$

liefern. Demgemäß erhalten wir die Greensche Funktion des betreffenden aus ihm durch eine Drehstreckung um den Nullpunkt entstehenden Kreisringes R mit einem beliebigen Quellpunkte z_∞ $(q<|z_\infty|<1)$ in der Gestalt

$$g(z\,;\,z_\infty,0,0)=g^*\left(q^{-\frac{1}{2}}\frac{\bar{z}_\infty z}{|z_\infty|}\,;\,q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|\right)$$

oder, ausführlich geschrieben, nach Weglassung eines unter dem äußeren Logarithmuszeichen auftretenden einflußlosen Faktors vom absoluten Betrage Eins, in der Gestalt

$$g(z\,;\,z_\infty,0,0)=-\Re\lg\left[i(q^{-\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}-\frac{\lg|z_\infty|}{\lg q}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{z}{z_\infty}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}\right]\qquad(q<|z|<1).$$

Eine analytische Funktion, deren reeller Teil gerade mit dieser Greenschen Funktion übereinstimmt, wird also durch den Ausdruck

$$f(z\,;\,z_\infty,0,0)=-\lg\left[i(q^{-\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}-\frac{\lg|z_\infty|}{\lg q}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{z}{z_\infty}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}\right]$$

gegeben. Schreiben wir sie jetzt, mittelst der bekannten allgemeinen Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen:

$$\sigma(2\omega_1 v)=2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'},\qquad \sigma(-u)=-\sigma(u),$$

$$\sigma_3(2\omega_1 v)=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0},\qquad \sigma_3(-u)=\sigma_3(u),$$

in die Weierstraßischen Bezeichnungen mit den Fundamentalperioden $2\omega_1=2\pi$ und $2\omega_3=2i\lg\frac{1}{q}$ um, *so erhalten wir schließlich den Ausdruck*

$$f(z\,;\,z_\infty,0,0)=\lg\frac{\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)}+\left(\frac{1}{\lg q}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|)\lg z+B,$$

worin der Kürze halber

$$B=\left(\frac{1}{\lg q}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|)\lg q^{-\frac{1}{2}}-\lg\left[iq^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2\right]$$

$$-\frac{\eta_1}{\pi}\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|)\lg\frac{z_\infty}{\bar{z}_\infty}$$

gesetzt ist.

Beide Dirichletsche Probleme für den Kreisring R mit den Randwerten

$$U_0(z)=\begin{cases} 1 & (|z|=q) \\ 0 & (|z|=1) \end{cases} \quad \text{und} \quad U_1(z)=\begin{cases} 0 & (|z|=q) \\ 1 & (|z|=1) \end{cases}$$

werden offenbar durch die Funktionen

$$U_0(z)=\frac{\lg|z|}{\lg q} \quad \text{bzw} \quad U_1(z)=1-\frac{\lg|z|}{\lg q}$$

aufgelöst, und folglich lassen sie sich durch ihre zugehörigen konjugiert harmonischen Funktionen in die analytischen Funktionen

$$W_0(z)=\frac{\lg z}{\lg q} \quad \text{bzw.} \quad W_1(z)=1-\frac{\lg z}{\lg q}$$

ergänzen. Mithin ist diejenige analytische Funktion

$$f(z\,;\,z_\infty, a_0, a_1)=f(z\,;\,z_\infty, 0, 0)+a_0 W_0(z)+a_1 W_1(z)$$

völlig gefunden worden, deren reeller Teil die verallgemeinerte Greensche Funktion mit den Randwerten a_0 und a_1 liefert.

Wir setzen nun, wie bei den allgemeinen Überlegungen,

$$k_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=q} df(z\,;\,z_\infty, 0, 0) \quad \text{und} \quad k_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} df(z\,;\,z_\infty, 0, 0)\,;$$

zwischen ihnen gilt natürlich die stets zu erfüllende Relation $k_0+k_1=1$. Diese beiden Größen lassen sich hierbei sofort ausrechnen. Aus der oben angegebenen Darstellung der Funktion $f(z\,;\,z_\infty, 0, 0)$ folgt nämlich zuerst

$$k_0=\frac{1}{2\pi i}\left\{\lg\frac{\sigma_3(i\lg\bar{z}_\infty-2\pi)}{\sigma_3(i\lg\bar{z}_\infty)}-\lg\frac{\sigma\left(i\lg\dfrac{q}{z_\infty}-2\pi\right)}{\sigma\left(i\lg\dfrac{q}{z_\infty}\right)}\right\}$$
$$+\left(\frac{1}{\lg q}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg\left(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|\right).$$

Mit Hilfe der allgemeinen Formeln

$$\sigma(u-2\omega_1)=-e^{-2\eta_1(u-\omega_1)}\sigma(u)\,, \qquad \sigma_3(u-2\omega_1)=e^{-2\eta_1(u-\omega_1)}\sigma_3(u)$$

können wir sie in die einfachere Gestalt

$$k_0=\frac{\lg|z_\infty|}{\lg q}$$

bringen, und folglich erhalten wir weiter

$$k_1=1-\frac{\lg|z_\infty|}{\lg q}\,.$$

Wir haben ferner die Werte der Periodizitätsmodul $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu=0, 1)$

von $\frac{1}{2\pi i} W_\mu(z)$ aufzusuchen. Die ersichtlichen Relationen $a_{\mu 0}+a_{\mu 1}=0$ und $a_{0\nu}+a_{1\nu}=0$ $(\mu, \nu=0,1)$ sind schon allgemein bekannt, aber alle diese Größen können auch einzeln unmittelbar ausgerechnet werden; die Resultate lauten

$$a_{00}=-a_{01}=-a_{10}=a_{11}=\frac{1}{\lg q}.$$

Die 1-reihige Matrix $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu=1)$ besitzt somit gewiß ihre reziproke Matrix mit einem einzigen Element

$$b_{11}=\lg q.$$

8. *Die Parallelschlitzabbildung des Kreisringes.*

Wir suchen nun diejenige Funktion

$$\omega=\omega(z)$$

zu finden, welche den Kreisring R konform auf ein in der ω-Ebene gelegenes Parallelschlitzgebiet abbildet und sogar den Normierungsbedingungen am inneren Punkte z_∞:

$$\omega(z_\infty)=\infty, \qquad \lim_{z\to z_\infty}(z-z_\infty)\omega(z)=v_\infty A$$

genügt; hierbei sei $v_\infty A$ eine vorgegebene komplexe Zahl. Beide zur reellen Achse parallele Geraden, die die Bildschlitze von $|z|=q$ und $|z|=1$ tragen, bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{I}\omega=\beta_0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{I}\omega=\beta_1.$$

Wir erwähnen hierauf zwei Verfahren, die Abbildungsfunktion $\omega(z)$ aufzusuchen. Erstens wie in einer vor kurzem veröffentlichten Note[3], wenn wir eine Fuuktion $Q(z)$ durch die Gleichung

$$\omega(z)=\frac{v_\infty A}{z-z_\infty}+iQ(z)$$

einführen, so stellt sie diejenige im Kreisringe R, und wegen der analytischen Fortsetzbarkeit von $\omega(z)$ sogar auf dem abgeschlossenen Kreisringe $q\leqq|z|\leqq 1$, regulär analytische und sogar eindeutige Funktion dar, deren reeller Teil gerade das Dirichletsche Problem mit den Randwerten

$$\mathfrak{R}Q(z)=\begin{cases}\beta_0-\mathfrak{I}\dfrac{v_\infty A}{qe^{i\theta}-z_\infty} & (z=qe^{i\theta})\\[2ex] \beta_1-\mathfrak{I}\dfrac{v_\infty A}{e^{i\theta}-z_\infty} & (z=e^{i\theta})\end{cases}$$

auflöst. Wir können also auf sie die Villatsche Darstellung anwenden[4].

---

3) Y. Komatu, Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, **21** (1945), 1–5.

4) Für eine kurze Herleitungsweise dieser Darstellung findet sich nebst dem betreffenden Literaturverzeichnis in meiner demnächst erscheinenden Note: Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique, Proc. **21** (1945), 94–96.

Darauf hin läßt sie sich in der Gestalt

$$Q(z)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\beta_1-\Im\frac{v_\infty A}{e^{i\theta}-z_\infty}\right)\zeta(i\lg z+\theta)d\theta$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\beta_0-\Im\frac{v_\infty A}{qe^{i\theta}-z_\infty}\right)\zeta_3(i\lg z+\theta)d\theta+ic^*$$

darstellen, worin c^* eine reelle Konstante bedeutet und die hier auftretenden elliptischen ζ-Funktionen alle sich wiederum auf die mit den Fundamentalperioden $2\omega_1=2\pi$ und $2\omega_3=2i\lg\frac{1}{q}$ beziehen. Formen wir sie noch ein wenig um, so *gelangen wir zu einer Darstellung von* $\omega(z)$:

$$\omega(z)=\frac{v_\infty A}{z-z_\infty}+\frac{2\eta_1 i}{\pi}(\beta_1-\beta_0)\lg z$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{e^{i\theta}-z_\infty}\right)\zeta(i\lg z+\theta)d\theta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{qe^{i\theta}-z_\infty}\right)\zeta_3(i\lg z+\theta)d\theta+c\,,$$

worin

$$c=2\eta_1(\beta_1-\beta_0)+i\beta_1-c^*$$

eine noch beliebig wählbare komplexe Konstante bedeutet. Aus der Monodromiebedingung[3] *für die Funktion* $Q(z)$ *ergibt sich ferner die Relation*

$$\beta_1-\beta_0=\Im\frac{v_\infty A}{z_\infty}.$$

Wir können natürlich von dieser Darstellung für die Funktion $\omega(z)$ ausgehen und tätsächlich sie als eine Konstruktionskomponente für das Potential bei unsrem Falle benutzen. Insbesondere wird ihre Ableitung dann durch

$$\omega'(z)=-\frac{v_\infty A}{(z-z_\infty)^2}+\frac{2\eta_1 i}{\pi z}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)$$
$$+\frac{i}{\pi z}\int_0^{2\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{e^{i\theta}-z_\infty}\right)\wp(i\lg z+\theta)d\theta$$
$$-\frac{i}{\pi z}\int_0^{2\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{qe^{i\theta}-z_\infty}\right)\wp(i\lg qz+\theta)d\theta$$

gegeben. Bei diesem Ausdrucke selbst bringt zwar der direkte Grenzübergang zu den Randwerten eine Schwierigkeit mit sich, daß je ein Integrand rechts dabei im allgemeinen eine Unendlichkeitsstelle zweiter Ordnung aufweist, aber wir können sie durch eine kleine Modifikation leicht vermeiden. Zum Zwecke beachten wir nämlich zuvor, daß die Differenz

$$\wp(u)+\frac{e^{iu}}{(1-e^{iu})^2}=\wp(u)-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{u}{2}$$

sich für alle reellen u regulär verhält, und daß die einfachen Beziehungen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{e^{i\theta}-z_\infty}\right)\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\,d\theta=\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}}{(1-\bar{z}_\infty z)^2}\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{qe^{i\theta}-z_\infty}\right)\frac{qe^{i\theta}}{(qe^{i\theta}-z)^2}\,d\theta=-\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}q^2}{(q^2-\bar{z}_\infty z)^2}$$

bestehen. Nach einigen Berechnungen erhalten wir somit die Randwerte der Ableitung in den folgenden Formen:

$$\begin{aligned}ie^{i\varphi}\omega'(qe^{i\varphi})=&\,2\Im\frac{v_\infty Ae^{i\varphi}}{(qe^{i\varphi}-z_\infty)^2}-\frac{2\eta_1}{\pi q}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)\\&-\frac{1}{\pi q}\int_0^{2\pi}\left\{\Im\left(\frac{v_\infty A}{e^{i(\theta+\varphi)}-z_\infty}\right)\wp(\theta+i\lg q)\right.\\&\left.-\Im\left(\frac{v_\infty A}{qe^{i(\theta+\varphi)}-z_\infty}\right)\left(\wp(\theta)-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\right)\right\}d\theta\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-ie^{i\varphi}\omega'(e^{i\varphi})=&-2\Im\frac{v_\infty Ae^{i\varphi}}{(e^{i\varphi}-z_\infty)^2}+\frac{2\eta_1}{\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)\\&+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\Im\left(\frac{v_\infty A}{qe^{i(\theta+\varphi)}-z_\infty}\right)\wp(\theta+i\lg q)\right.\\&\left.-\Im\left(\frac{v_\infty A}{e^{i(\theta+\varphi)}-z_\infty}\right)\left(\wp(\theta)-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\right)\right\}d\theta\,.\end{aligned}$$

Die Integrale rechts in den obigen Darstellungen für $\omega(z)$ sowie $\omega'(z)$ liesen sich eigentlich weiter ausrechnen. Wir sollen aber hierbei statt dessen einen zweiten mehr direkten Weg einschlagen. In der Tat entnehmen wir zunächst auf Grund der speziellen Gestalten der beiden mittels $\omega=\omega(z)$ voneinander entsprechenden Gebiete als plausibel, daß das Spiegelungsprinzip mit Erfolg angewandt wird[5]. Darauf hin beachten wir zuerst den merkwürdigen Periodizitätscharakter der betreffenden Funktion $\omega(z)$. Nach dem wohlbekannten Spiegelungsprinzip läßt sie sich nämlich über die Randkreise hinaus sukzessiv in die benachbarten Kreisringe mit demselben Modul analytisch fortsetzen, und sogar nimmt sie dort die bezüglich der betreffenden Bildschlitze spiegelbildlichen Werte, d. h. sie genügt den Funktionalgleichungen

$$\omega\left(\frac{q^2}{\bar{z}}\right)=\overline{\omega(z)}+2i\beta_0\qquad\text{und}\qquad\omega\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=\overline{\omega(z)}+2i\beta_1\,,$$

woraus ohne weiteres auch die Gleichung

$$\omega\left(\frac{z}{q^2}\right)=\overline{\omega\left(\frac{q^2}{\bar{z}}\right)}+2i\beta_1=\overline{\overline{\omega(z)}+2i\beta_0}+2i\beta_1=\omega(z)+2i(\beta_1-\beta_0)$$

folgt. Die durch die sukzessive Fortsetzung entstehende Funktion ist dann in der punktierten Ebene $0<|z|<\infty$ meromorph; sie hat lauter einfache Pole, die an den Stellen

5) Eine ähnliche Schlußweise findet sich z. B. a. a. O.[2]

$$q^{2n}z_\infty \quad \text{und} \quad \frac{q^{2n}}{\bar{z}_\infty} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

liegen und die zugehöngen Residuen $v_\infty A$ bzw. $\bar{v}_\infty \bar{A}$ besitzen. Um nun die Periodizitätseigenschaft deutlicher einzusehen, sehen wir sie lieber für die Funktion vom Hilfsargumente $w=i\lg z$ an und setzen demgemäß

$$\omega(e^{-iw})=\Omega(w).$$

Wegen der Eindeutigkeit von $\omega(z)$ hat die Funktion $\Omega(w)$ offenbar eine reine Periode 2π:

$$\Omega(w+2\pi)=\Omega(w).$$

Aber sie besitzt überdies auf Grund der obigen Funktionalgleichung für $\omega(z)$ auch eine Pseudoperiode $2i\lg\frac{1}{q}$ uud zwar genügt der Relation

$$\Omega\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=\Omega(w)+2i(\beta_1-\beta_0)$$

Sie ist deshalb eine elliptische Funktion zweiter Art mit etwa dem Periodenrechtecke

$$0<\Re w<2\pi \quad (=2\omega_1), \quad -\lg\frac{1}{q}<\Im w<\lg\frac{1}{q}\left(=\frac{\omega_3}{i}\right).$$

Übrigens läßt sich ohne weiteres übersehen, daß sie in diesem Rechtecke gerade zwei einfache Pole $i\lg z_\infty$ und $i\lg\frac{1}{\bar{z}_\infty}$ mit den Residuen $\frac{iv_\infty A}{z_\infty}$ bzw. $-\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}}{\bar{z}_\infty}$ besitzt. Deshalb muß sie in der Gestalt

$$\Omega(w)=\frac{iv_\infty A}{z_\infty}\zeta(w-i\lg z_\infty)-\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}}{\bar{z}_\infty}\zeta\left(w-i\lg\frac{1}{\bar{z}_\infty}\right)+\lambda_1 w+\lambda_0$$

dargestellt werden, wo λ_0 eine noch beliebig wählbare komplexe Konstante und λ_1 eine etwa mittels der soeben genannten Eigenschaften zu bestimmende Konstante bedeuten. Aus der Bedingung $\Omega(w+2\pi)=\Omega(w)$ folgt zuerst tatsächlich

$$\lambda_1=\frac{2\eta_1}{\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right),$$

und sodann, nebenbei nach der anderen Bedingung $\Omega\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=\Omega(w)+2i(\beta_1-\beta_0)$, ergibt sich mit Rücksicht auf die Legendresche Relation wiederum

$$\beta_1-\beta_0=2\eta_3 i\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)-\lambda_1\lg\frac{1}{q}$$
$$=\left(2\eta_3 i+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)=\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right).$$

Folglich erreichen wir eine integralzeichenfreie Darstellung der Parallelschlitzabbildungsfunktion :

$$\omega(z)=\frac{iv_\infty A}{z_\infty}\zeta\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)-\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}}{\bar{z}_\infty}\zeta(i\lg\bar{z}_\infty z)+\frac{2\eta_1 i}{\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)\lg z+\lambda_0\,.$$

9. *Das komplexe Geschwindigkeitspotential für den Kreisring.*

Wir sind jetzt in der Lage, das betreffende Geschwindigkeitspotential mittels der soeben gefundenen Funktionen $f(z\,;z_\infty,a_0,a_1)$ und $\omega(z)$ zusammenzusetzen. Zunächst besitzt es nach den allgemeinen Überlegungen allerdings die Gestalt

$$\begin{aligned}F(z\,;z_\infty,c_1,\varkappa_0,\varkappa_1)&=\omega(z)+\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi i}f(z\,;z_\infty,a_0,a_1)\\&=\frac{iv_\infty A}{z_\infty}\zeta\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)-\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}}{\bar{z}_\infty}\zeta(i\lg\bar{z}_\infty z)+\frac{2\eta_1 i}{\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)\lg z\\&+\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi i}\left\{\left(\left(\frac{1}{\lg q}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|)-\frac{a_1-a_0}{\lg q}\right)\lg z\right.\\&\left.+\lg\frac{\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)}\right\}+C\,;\end{aligned}$$

hierbei bedeutet

$$C=\lambda_0+\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi i}(B+a_1)$$

wiederum eine willkürliche Konstante, und wenn man die allgemeinen Überlegungen wörtlich verfolgen will, so ist ihr imaginärer Teil durch die Bedingung $\Im F=0$ längs $|z|=q$ (also etwa an $z=q$) festzustellen. Um nun den Wert von $(\varkappa_0+\varkappa_1)(a_1-a_0)$ zu bestimmen, berücksichtigen wir die schon allgemein erwähnten Beziehungen

$$(\varkappa_0+\varkappa_1)(a_1-a_0)a_{11}=\varkappa_1-(\varkappa_0+\varkappa_1)k_1=(\varkappa_0+\varkappa_1)k_0-\varkappa_0\,,$$

woraus die hierbei geltende Relation

$$(\varkappa_0+\varkappa_1)\frac{a_1-a_0}{\lg q}=(\varkappa_0+\varkappa_1)\frac{\lg|z_\infty|}{\lg q}-\varkappa_0$$

sofort folgt. *Wir erreichen somit schließlich die gewünschte volle Darstellung des komplexen Geschwindigkeitspotentials:*

$$\begin{aligned}F(z\,;z_\infty,c_1,\varkappa_0,\varkappa_1)&=\frac{iv_\infty A}{z_\infty}\zeta\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)-\frac{i\bar{v}_\infty\bar{A}}{\bar{z}_\infty}\zeta(i\lg\bar{z}_\infty z)\\&+\left\{\frac{2\eta_1 i}{\pi}\Im\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)+\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi i}\left(\frac{2\eta_1}{\pi}\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|)-\frac{1}{2}\right)+\frac{\varkappa_0}{2\pi i}\right\}\lg z\\&+\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi i}\lg\frac{\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)}+C\,.\end{aligned}$$

Nebenbei bemerkt wird die Differenz $c_1(=c_1-c_0)$ der Stromfunktionswerte längs beider Randkomponenten durch

$$c_1=\beta_1-\beta_0-\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi}(\alpha_1-\alpha_0)=\mathfrak{J}\frac{v_\infty A}{z_\infty}+\frac{\varkappa_1}{2\pi}\lg\frac{1}{|z_\infty|}-\frac{\varkappa_0}{2\pi}\lg\frac{|z_\infty|}{q}$$

geliefert, was ich auch in einem anderen Orte[6] anmerkte.

10. *Die Kutta-Joukowskischen Bedingungen beim Kreisringe.*

Diese Bedingungen fordern nun bei unsrem Falle beide Zirkulationskonstanten $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ so zu bestimmen, daß die Ableitung $F'(z)$ des soeben gefundenen Potentials an zwei beliebig vorgegebenen auf je einer Randkreisperipherie liegenden Punkten verschwindet, welche wir mit

$$z_0=qe^{i\varphi_0} \qquad \text{und} \qquad z_1=e^{i\varphi_1}$$

bezeichnen sollen. Die Winkel zwischen den (etwa bezüglich des Gebiets R negativ gerichteten) Tangenten der Peripherien an diesen Punkten und der positiv-reellen Achse sind dann gleich

$$\theta_0=\varphi_0+\frac{\pi}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \theta_1=\varphi_1-\frac{\pi}{2}.$$

Zunächst ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned}F'(z\,;\,z_\infty, c_1, \varkappa_0, \varkappa_1)&=\frac{v_\infty A}{z_\infty z}\wp\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)-\frac{\bar v_\infty \bar A}{\bar z_\infty z}\wp(i\lg \bar z_\infty z)\\&+\left\{\frac{2\eta_1 i}{\pi}\mathfrak{J}\left(\frac{v_\infty A}{z_\infty}\right)+\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi}\,\frac{2\eta_1}{\pi}\lg|z_\infty|+\frac{\varkappa_0}{2\pi i}\right\}\frac{1}{z}\\&-\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2\pi z}\left\{\zeta\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)-\zeta(i\lg\bar z_\infty z)\right\},\end{aligned}$$

woraus *die fraglichen Bedingungen ohne weiteres beide lineare Gleichungen für die zu bestimmenden Konstanten $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ nach sich ziehen, d. h. sie lauten*

$$s_{0j}\varkappa_0+s_{1j}\varkappa_1=\Omega_j \qquad (j=0,1);$$

hierbei sind zur Abkürzung

$$\Omega_j=e^{i\theta_j}\omega'(z_j)$$

gesetzt oder, ausführlich geschrieben,

$$\Omega_0=-\frac{2}{q}\mathfrak{J}\left\{\frac{v_\infty A}{z_\infty}\left(\wp(i\lg qz_\infty+\varphi_0)+\frac{\eta_1}{\pi}\right)\right\},$$

$$\Omega_1=\quad 2\mathfrak{J}\left\{\frac{v_\infty A}{z_\infty}\left(\wp(i\lg z_\infty+\varphi_1)+\frac{\eta_1}{\pi}\right)\right\}.$$

Diese beiden Größen sind ersichtlich stets reell, wie sie im allgemeinen so sein müssen.

---

6) Die in Anm.[3] zitierte Note.

Andererseits erhalten wir nach den allgemeinen Überlegungen oder auch auf direkte Weise für $\nu, j=0, 1$

$$\begin{aligned}
s_{\nu j}&=\frac{ie^{i\theta j}}{2\pi}\{f'(z_j; z_\infty, 0, 0)-b_{11}(k_1-\delta_{\nu 1})W_1'(z_j)\}\\
&=\frac{(-1)^j}{2\pi|z_j|}\left\{i\left(\zeta\left(i\lg\frac{z_j}{z_\infty}\right)-\zeta(i\lg\bar{z}_\infty z_j)\right)-\frac{2\eta_1}{\pi}\lg|z_\infty|-\frac{1+(-1)^\nu}{2}\right\}\\
&=\frac{(-1)^j}{2\pi|z_j|}\left\{i\left(\zeta_3\left(i\lg\frac{z_j}{qz_\infty}\right)-\zeta_3\left(i\lg\frac{\bar{z}_\infty z_j}{q}\right)\right)-\frac{2\eta_1}{\pi}\lg|z_\infty|-\frac{1+(-1)^\nu}{2}\right\},
\end{aligned}$$

d. h. für $\nu=0, 1$

$$s_{\nu 0}=\frac{1}{\pi q}\left\{\Im\zeta_3(i\lg z_\infty+\varphi_0)-\frac{\eta_1}{\pi}\lg|z_\infty|-\frac{1+(-1)^\nu}{4}\right\},$$

$$s_{\nu 1}=-\frac{1}{\pi}\left\{\Im\zeta(i\lg z_\infty+\varphi_1)-\frac{\eta_1}{\pi}\lg|z_\infty|-\frac{1+(-1)^\nu}{4}\right\};$$

nebenbei bemerke man hier, daß insbesondere die Relationen

$$s_{10}=s_{00}+\frac{1}{2\pi q} \qquad \text{und} \qquad s_{11}=s_{01}-\frac{1}{2\pi}$$

gelten. Die Koeffizientendeterminante unseres Gleichungssystems besitzt also den Wert

$$\boldsymbol{D}\equiv\begin{vmatrix} s_{00} & s_{10}\\ s_{01} & s_{11}\end{vmatrix}=-\frac{s_{00}}{2\pi}-\frac{s_{01}}{2\pi q}=\frac{1}{2\pi^2 q}\{\Im\zeta(i\lg z_\infty+\varphi_1)-\Im\zeta_3(i\lg z_\infty+\varphi_0)\}.$$

Der Deutlichkeit halber geben wir noch, mittels der bekannten Entwicklungen von ζ- und $\wp$-Funktionen, die Reihenformen für die hierbei auftretenden Größen an, welche lauten

$$\wp(i\lg qz_\infty+\varphi_0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq}{1-q^{2n}}\left(\frac{e^{in\varphi_0}}{z_\infty^n}+\frac{z_\infty^n}{e^{in\varphi_0}}\right),$$

$$\wp(i\lg z_\infty+\varphi_1)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^n e^{in\varphi_1}}{z_\infty^n}+\frac{z_\infty^n}{q^n e^{in\varphi_1}}\right)$$

sowie für $\nu=0, 1$

$$s_{\nu 0}=-\frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_\infty|^{2n}}{1-q^{2n}}\Re\left(\frac{qe^{i\varphi_0}}{z_\infty}\right)^n-\frac{1+(-1)^\nu}{4\pi q},$$

$$s_{\nu 1}=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z_\infty|^{2n}-q^{2n}}{1-q^{2n}}\Re\left(\frac{e^{i\varphi_1}}{z_\infty}\right)^n-\frac{1-(-1)^\nu}{4\pi}$$

und darauf hin

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{4\pi^2 q}+\frac{1}{2\pi^2 q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n}}\left\{(1-|z_\infty|^{2n})\Re\left(\frac{qe^{i\varphi_0}}{z_\infty}\right)^n-(|z_\infty|^{2n}-q^{2n})\Re\left(\frac{e^{i\varphi_1}}{z_\infty}\right)^n\right\}.$$

Die Determinante $\boldsymbol{D}$ ist für jeden gegebenen Quellpunkt z_∞, als eine Funktion vom Argumente $qe^{i\varphi_0}$ bzw. $e^{i\varphi_1}$ betrachtet, nicht identisch verschwindend und harmonisch. Falls sie von Null verschieden ist, so lassen sich die gesuchten Werte der Zirkulationskonstanten offenbar mittels der soeben gefundenen Ausdrücke expliziterweise durch

$$\varkappa_0 = \frac{1}{D}(s_{11}\Omega_0 - s_{10}\Omega_1)\,, \qquad \varkappa_1 = \frac{1}{D}(s_{00}\Omega_1 - s_{01}\Omega_0)$$

eindeutig liefern.

Bemerkung.

Zum Schluß sollen wir noch darauf aufmerksam machen, daß der *einfach* zusammenhängende Fall fast unmittelbar auf einfachere und übersichtliche Weise erledigt werden kann. Betrachten wir nämlich die Strömung in einem Normalgebiet D, etwa im Kreisäußern $|z-m|>r$, mit einer Zirkulationskonstante $\varkappa$ und einer unendlichfernen Geschwindigkeit v_∞ — wir können und wollen hierbei offenbar o. B. d. A. $A=1$ nehmen —, so lassen sich alle betreffenden Größen ganz ausdrücklich durch elementare Funktionen darstellen:

$$f(z\,;\,\infty,\,a) = \lg\frac{z-m}{r} + a\,, \quad \omega(z) = v_\infty(z-m) + \frac{\bar{v}_\infty r^2}{z-m}\;;$$

und folglich ergibt sich das Potential in der Gestalt

$$F(z\,;\,\infty,\,\varkappa) = v_\infty(z-m) + \frac{\bar{v}_\infty r^2}{z-m} + \frac{\varkappa}{2\pi i}\lg\frac{z-m}{r} + C\,,$$

welche nichts anderes als die gebräuchliche ist.

Die Kutta-Joukowskische Bedingung an einem beliebig vorgegebenen Profilpunkte $z_0 = m + re^{i\varphi_0}$ führt dann bekanntermaßen zu

$$\varkappa = 4\pi\Im v_\infty(z_0 - m) = 4\pi r\,|\,v_\infty|\sin(\arg v_\infty + \varphi_0)\,.$$

Nachtrag bei der Korrektur.

Ich muß hier eine Entschuldigung klar aussprechen. Nachdem ich diese Note fertiggeschrieben hatte, fand ich bald darauf einige verwandte Literaturen auf, mit denen die letzte Hälfte dieser Note den großen wesentlich gemeinsamen Teil enthielt: das Bericht von I. E. Garrick, Potential flow about arbitrary biplane wing section, N.A.C.A. Tech. Rep. No. 542 (1936), 47–75 sowie die darin zitierte Arbeit von M. Lagally, Die reibungslose Strömung im Außengebiet zweier Kreise, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **9** (1929), 299–305. Trotzdem habe ich hierbei keinen Teil dieser Note gestrichen, erstens der Völligkeit halber, zweitens wegen des hauptsächlichen Zweckes für die Erklärung der allgemeinen Überlegungen, drittens aus Einheitlichkeitsgründen in den ganzen Gedankengängen und den Bezeichnungen, und letztens um somit die verschiedenen auftretenden Quantitäten deutlicher zu machen.