Représentations unitaires d'un groupe de Lie connexe et ensembles moment généralisés*

Lobna Abdelmoula Didier Arnal Mohamed Selmi

Résumé

Soient G un groupe de Lie connexe et π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ non séparable. Pour chaque ensemble infini I, on définit la représentation unitaire $\hat{\pi}_I = (\#I)\pi$ de G dans l'espace $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I} = (\#I)\mathcal{H}_\pi$. Alors, on montre que l'ensemble moment généralisé de $\hat{\pi}_I$ caractérise π à quasi-équivalence près.

Abstract

Let G be a connected Lie group and π a unitary representation of G on a non separable Hilbert space $\mathcal{H}_\pi$. For any infinite set I, we define the representation $\hat{\pi}_I = (\#I)\pi$ of G on $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I} = (\#I)\mathcal{H}_\pi$. Then, we show that the generalized moment set of $\hat{\pi}_I$ characterize π up to quasi-equivalence.

1 Introduction

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de dual $\mathfrak{g}^*$ et π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. On désigne par $\mathcal{H}_\pi^\infty$ le sous-espace des vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}_\pi$. Dans([7]), Wildberger a défini l'application moment Ψ_π de π de la manière suivante : Pour tout ξ de $\mathcal{H}_\pi^\infty \setminus \{0\}$, l'élément $\Psi_\pi(\xi)$ de $\mathfrak{g}^*$ est défini par

$$\Psi_\pi(\xi)(X) = \frac{1}{i}\frac{< d\pi(X)\xi, \xi >}{< \xi, \xi >}, \ X \in \mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

*Ce travail est supporté par D.G.R.S.R.T, Unité de Recherche : 99 UR 1502.

Received by the editors August 2010.

Communicated by M. Van den Bergh.

Mots-clés : Groupe de Lie, Représentation unitaire, espace de Hilbert non séparable, ensemble moment généralisé.

L'ensemble moment I_π de la représentation π est l'adhérence dans $\mathfrak{g}^*$ de l'image de l'application moment. Wildberger a donné une description explicite de l'ensemble moment I_π dans le cas des groupes de Lie nilpotents connexes et simplement connexes. Plus précisément, il a montré que si π est une représentation unitaire et irréductible alors l'ensemble moment I_π est la fermeture de l'enveloppe convexe de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\pi$ associée à π par la théorie de Kirillov. Ceci a été généralisé par D. Arnal et J. Ludwig ([2]) en particulier au cas des groupes de Lie résolubles connexes.

Malheureusement l'application moment ne permet pas de retrouver directement l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\pi$. Déjà dans le cas nilpotent, un contre-exemple a été donné par Wildberger montre que deux orbites coadjointes distincts peuvent la même enveloppe convexe.

Afin de séparer des représentations unitaires et irréductibles de G au moyen de l'application moment, A. Baklouti, J. Ludwig et M. Selmi dans ([3]) ont étendu la définition de $\Psi_\pi(\xi)$ aux éléments de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ de G. Ils ont défini l'application moment généralisée Ψ_π de la manière suivante : Pour tout A de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ et tout ξ de $\mathcal{H}_\pi^\infty \setminus \{0\}$,

$$\Psi_\pi(\xi)(A) = \Re e\left(\frac{1}{i}\frac{< d\pi(A)\xi, \xi >}{< \xi, \xi >}\right). \tag{1.2}$$

L'ensemble moment généralisé $J(\pi)$ associé à la représentation π est l'enveloppe convexe de l'image de l'application moment généralisée.

Dans ([1]) nous avons montré que la séparation des représentations unitaires et **irréductible** d'un groupe de Lie connexe est possible a l'aide de l'ensemble moment généralisé.

Le but de ce papier est de montrer qu'on peut séparer les représentations unitaires d'un groupe de Lie connexe dans un espace **non** nécessairement **séparable** en restant dans le cadre de l'application moment généralisée. Pour cela, on définit pour chaque représentation unitaire π de G, une représentation $\hat{\pi}_I = (\#I)\pi$ de G dans $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I} = (\#I)\mathcal{H}_\pi$ où I est un ensemble infini. Alors, on montre que l'ensemble moment généralisé de $\hat{\pi}_I$ caractérise π à quasi-équivalence près.

2 Ensembles moment et multiples d'une représentation

2.1 Multiples d'une représentation

Définitions 2.1. On dit que deux représentations unitaires $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ et $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ d'un groupe de Lie connexe G sont :

i) unitairement équivalentes, s'il existe une transformation unitaire ϕ de $\mathcal{H}_\pi$ sur $\mathcal{H}_\rho$ telle que :
$$\phi \circ \pi(g) = \rho(g) \circ \phi, \quad g \in G. \tag{2.1}$$
Dans ce cas, on note $\pi \simeq \rho$.

ii) quasi-équivalentes, s'il existe un ensemble infini I tel que $\hat{\pi}_I$ et $\hat{\rho}_I$ sont unitairement équivalentes et on note $\pi \sim \rho$.

Définitions 2.2. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\xi_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}$.

i) On dit que la famille $(\xi_i)_{i\in I}$ est sommable de somme ξ, si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une partie finie J_ϵ de I telle que pour toute partie finie $J_\epsilon \subset K \subset I$, on a :
$$\left\|\xi - \sum_{i\in K} \xi_i\right\|_{\mathcal{H}} < \epsilon.$$
Dans ce cas, on note $\xi = \sum_{i\in I} \xi_i$.

En particulier, si $(\xi_i)_{i\in I}$ est sommable alors l'ensemble $I' = \{i \in I, \xi_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

ii) On dit que la famille $(\xi_i)_{i\in I}$ vérifie la condition de Cauchy, si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une partie finie J_ϵ de I telle que pour toute partie finie L de I disjointe de J_ϵ, on a :
$$\left\|\sum_{i\in L} \xi_i\right\|_{\mathcal{H}} < \epsilon.$$
En particulier, toute famille qui vérifie la condition de Cauchy est sommable et réciproquement.

Soient G un groupe de Lie connexe et π une représentation unitaire de G et dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Pour tout ensemble infini I, on définit la représentation $\tilde{\pi}_I = (\#I)\pi$ ainsi :
On considère une famille $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ d'espaces de Hilbert unitairement équivalents à $\mathcal{H}_\pi$ par une transformation unitaire $\phi_i : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_i$, on définit sur chaque $\mathcal{H}_i$ une représentation π_i équivalente à π par ϕ_i ($\pi_i = \phi_i \circ \pi \circ \phi_i^{-1}$), on définit l'espace $\mathcal{H}_{\tilde{\pi}_I}$ somme hilbertienne des $\mathcal{H}_i$:
$$\mathcal{H}_{\tilde{\pi}_I} = \oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i = \left\{\sum_{i\in I} \xi_i,\ \ \xi_i \in \mathcal{H}_i,\ \ \left(\|\xi_i\|^2_{\mathcal{H}_i}\right)_{i\in I} \text{est sommable}\right\} \tag{2.2}$$
avec :
$$\langle \sum_{i\in I} \xi_i | \sum_{j\in I} \eta_j \rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{\pi}_I}} = \sum_{i\in I} \langle \xi_i | \eta_i \rangle_{\mathcal{H}_i}. \tag{2.3}$$
et la représentation $\tilde{\pi}_I : G \to \mathcal{H}_{\tilde{\pi}_I}$ par :
$$\tilde{\pi}_I(g)(\sum_{i\in I} \xi_i) = \sum_{i\in I} \pi_i(g)\xi_i, \quad g \in G. \tag{2.4}$$
En particulier, si I est un ensemble infini dénombrable (I est équipotent à $\mathbb{N}$), on note $\tilde{\pi}_I = \tilde{\pi} = \aleph_0\pi$ avec :
$$\mathcal{H}_{\tilde{\pi}} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n,\ \ \xi_n \in \mathcal{H}_n,\ \ \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty\right\}$$
et
$$\tilde{\pi}(g)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(g)\xi_n, \quad g \in G.$$

Lemme 2.3. *Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire d' un groupe de Lie connexe G, I et J deux ensembles tels que $\#I \geq \#J$ et $\#I$ est infini. Alors, on a :*

$$\hat{\pi}_I \simeq \widehat{(\hat{\pi}_J)}_I \simeq \widehat{(\hat{\pi}_I)}_J.$$

Démonstration. On montre d'abord que $\hat{\pi}_I$ et $\widehat{(\hat{\pi}_J)}_I$ sont unitairement équivalentes. Posons :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pi, \quad \hat{\mathcal{H}}_J = \mathcal{H}_{\hat{\pi}_J} = \oplus_{j\in J}\phi_j(\mathcal{H}), \quad \hat{\mathcal{H}}_I = \mathcal{H}_{\hat{\pi}_I} = \oplus_{i\in I}\tau_i(\mathcal{H})$$

et

$$\widehat{(\hat{\mathcal{H}}_J)}_I = \mathcal{H}_{\widehat{(\hat{\pi}_J)}_I} = \oplus_{i\in I}\theta_i(\hat{\mathcal{H}}_J).$$

où ϕ_j, τ_j, θ_j sont des transformations unitaires vérifiant l'équation(2.1).
Pour chaque (i, j) de $I \times J$, on définit le sous-espace $\mathcal{H}_{(i,j)}$ de $\widehat{(\hat{\mathcal{H}}_J)}_I$ par :

$$\mathcal{H}_{(i,j)} = \theta_i\left(\phi_j(\mathcal{H})\right).$$

Par construction, l'application $\psi_{(i,j)} = \theta_i \circ \phi_j$ est une isométrie surjective de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{(i,j)}$. Ainsi, la restriction de $\widehat{(\hat{\pi}_J)}_I$ à l'espace $\mathcal{H}_{(i,j)}$ est une représentation notée par $\pi_{(i,j)}$.

Soit $\hat{\hat{\xi}}_{(i,j)} = \theta_i\left(\phi_j(\xi_{(i,j)})\right)$ un vecteur de $\mathcal{H}_{(i,j)}$ ($\xi_{(i,j)} \in \mathcal{H}$), alors $\hat{\hat{\xi}}_{(i,j)}$ appartient à $\theta_i(\hat{\mathcal{H}}_J) = (\hat{\mathcal{H}}_J)_i$ et on a :

$$\widehat{(\hat{\pi}_J)}_I(g)\left(\hat{\hat{\xi}}_{(j,i)}\right) = \theta_i\left(\hat{\pi}_J(g)\phi_j(\xi_{(i,j)})\right) = \theta_i\left(\phi_j(\pi(g)\xi_{(i,j)})\right) \in \mathcal{H}_{(i,j)}.$$

Enfin, on a bien sûr :

$$\widehat{(\hat{\mathcal{H}}_J)}_I = \oplus_{i\in I}\theta_i(\hat{\mathcal{H}}_J) = \oplus_{i\in I}\theta_i\left(\oplus_{j\in J}\phi_j(\mathcal{H})\right) = \oplus_{(i,j)\in I\times J}\mathcal{H}_{(i,j)}.$$

Un vecteur $\widehat{(\hat{\xi}_J)}_I$ de $\widehat{(\hat{\mathcal{H}}_J)}_I$ s'écrit donc d'une manière unique

$$\widehat{(\hat{\xi}_J)}_I = \sum_{(i,j)\in I\times J} \psi_{(i,j)}(\xi_{(i,j)})$$

avec $\xi_{(i,j)} \in \mathcal{H}$ pour tout (i, j) et $\left(\|\xi_{(i,j)}\|^2\right)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable de somme :

$$\left\|\widehat{(\hat{\xi}_J)}_I\right\|^2 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \|\xi_{(i,j)}\|^2.$$

De plus :

$$\widehat{(\hat{\pi}_J)}_I(g)\left(\sum_{(i,j)\in I\times J} \psi_{(i,j)}(\xi_{(i,j)})\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \psi_{(i,j)}\left(\pi(g)\xi_{(j,i)}\right).$$

Soit Φ une bijection de I sur $I \times J$. On définit une application T de $\hat{\mathcal{H}}_I$ dans $\widehat{(\hat{\mathcal{H}}_J)}_I$ par :

$$T\left(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\xi_\ell)\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\xi_{\Phi^{-1}(i,j)}\right).$$

Par construction, T est isométrique :

$$\left\|\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\xi_\ell)\right\|^2 = \sum_{\ell\in I}\|\xi_\ell\|^2 = \sum_{(i,j)\in I\times J}\left\|\xi_{\Phi^{-1}(i,j)}\right\|^2 = \left\|T\left(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\xi_\ell)\right)\right\|^2.$$

L'application réciproque de T est bien sûr $S : \widehat{(\hat{\mathcal{H}}_J)}_I \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}_I$ avec :

$$S\left(\sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\xi_{(i,j)}\right)\right) = \sum_{\ell\in I}\tau_\ell\left(\xi_{\Phi(\ell)}\right).$$

En effet :

$$\begin{aligned}
(T\circ S)\left(\sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\xi_{(i,j)}\right)\right) &= T\left(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell\left(\xi_{\Phi(\ell)}\right)\right)\\
&= T\left(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\xi'_\ell)\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\xi'_{\Phi^{-1}(i,j)}\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\xi_{(i,j)}\right).
\end{aligned}$$

De plus, T entrelace $\hat{\pi}_I$ et $\widehat{(\hat{\pi}_J)}_I$, en effet, pour tout $g \in G$ et $\xi_\ell \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
T\left(\hat{\pi}_I(g)(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\xi_\ell))\right) &= T\left(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\pi(g)\xi_\ell)\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\pi(g)\xi_{\Phi^{-1}(i,j)}\right)\\
&= \widehat{(\hat{\pi}_J)}_I(g)\left(\sum_{(i,j)\in I\times J}\psi_{(i,j)}\left(\xi_{\Phi^{-1}(i,j)}\right)\right)\\
&= \widehat{(\hat{\pi}_J)}_I(g)\left(T\left(\sum_{\ell\in I}\tau_\ell(\xi_\ell)\right)\right).
\end{aligned}$$

De la même manière, on construit un opérateur d'entrelacement qui entrelace $\widehat{(\hat{\pi}_I)}_J$ et $\hat{\pi}_I$. ■

2.2 Ensembles moment complet et généralisé

Définitions 2.4. Soit π une représentation unitaire d'un groupe de Lie connexe G.

i) On appelle ensemble moment généralisé de π qu'on le note par $J(\pi)$, l'enveloppe convexe de l'ensemble des formes Φ_ξ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^*$ définies par :

$$A \mapsto \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{i}\langle d\pi(A)\xi|\xi\rangle\right), \quad \xi \in \mathcal{H}_\pi^\infty, \ \|\xi\| = 1. \tag{2.5}$$

ii) On appelle ensemble moment complet de π qu'on le note par $\tilde{J}(\pi)$, l'ensemble des formes $\tilde{\Phi}_{(\xi_n)}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^*$ définies par :

$$A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{i}\langle d\pi(A)\xi_n|\xi_n\rangle\right) \tag{2.6}$$

où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}_\pi$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2 = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|d\pi(A)\xi_n\|^2 < \infty, \ \forall A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Lemme 2.5. *Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire d'un groupe de Lie connexe G. Alors, pour tout ensemble infini I, on a :*

$$\tilde{J}(\pi) = J(\hat{\pi}_I).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}^\infty$ le sous-espace des vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}$. Un calcul simple montre que :

$$\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}^\infty = \left\{\hat{\xi}_I = \sum_{i\in I}\phi_i(\xi_i); \ \xi_i \in \mathcal{H}_\pi^\infty, \ \left(\|d\pi(A)\xi_i\|^2\right)_{i\in I} \text{ est sommable } \forall A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\right\}. \tag{2.7}$$

En effet, si un vecteur $\hat{\xi}_I = \sum_{i\in I}\phi_i(\xi_i)$ est différentiable, alors chaque vecteur ξ_i est différentiable. De plus, pour tout A est dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on a : $\left(\|d\pi(A)(\xi_i)\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable avec :

$$d\hat{\pi}_I(A)(\hat{\xi}_I) = \sum_{i\in I}\phi_i\left(d\pi(A)(\xi_i)\right), \ \ \|d\hat{\pi}_I(A)(\hat{\xi}_I)\|^2 = \sum_{i\in I}\|d\pi(A)(\xi_i)\|^2.$$

Réciproquement, soit $(\xi_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}_\pi$ vérifiant pour tout A de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\left(\|d\pi(A)(\xi_i)\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable. Alors, il existe une famille au plus dénombrable vérifiant la même propriété (on peut se ramener donc au cas séparable). Le vecteur $\hat{\xi}_I = \sum_i \phi_i(\xi_i)$ est bien défini dans $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}$. De plus, on peut dériver à l'origine l'application :

$$t \mapsto \hat{\pi}_I(\exp\ tX)(\hat{\xi}_I) = \sum_{i\in I}\phi_i(\pi(\exp\ tX)\xi_i).$$

En effet, pour tout X de $\mathfrak{g}$, le vecteur $\hat{\eta}_I = \sum_{i\in I}\phi_i(d\pi(X)\xi_i)$ est un vecteur bien défini de $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}$ et on obtient :

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\hat{\pi}_I(\exp\ tX)(\hat{\xi}_I)-\hat{\xi}_I}{t}-\hat{\eta}\right\|^2 = \lim_{t\to 0}\sum_{i\in I}\left\|\frac{\pi(\exp\ tX)(\xi_i)-\xi_i}{t}-d\pi(X)\xi_i\right\|^2.$$

Cependant, pour tout réels λ et t, on a :

$$\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}-i\lambda\right|^2 = \left(\frac{\cos(t\lambda)-1}{t}\right)^2+\left(\frac{\sin(t\lambda)}{t}-\lambda\right)^2 \leq 2\lambda^2.$$

Donc, si la décomposition spectrale de $d\pi(X)$ est $d\pi(X) = \int_{\mathbb{R}} i\lambda\ dE_\lambda$, on peut écrire pour tout i :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\pi(\exp\ tX)(\xi_i)-\xi_i}{t}-d\pi(X)\xi_i\right\|^2_{\mathcal{H}_\pi} &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}-i\lambda\right|^2 d\langle E_\lambda(\xi_i),\xi_i\rangle_{\mathcal{H}_\pi}\\ &\leq \int_{\mathbb{R}} 2\lambda^2\ d\langle E_\lambda(\xi_i),\xi_i\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = 2\,\|d\pi(X)\xi_i\|^2_{\mathcal{H}_\pi}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout partie finie K de I, les sommes partielles :

$$S_K = \sum_{i\in K}\left\|\frac{\pi(\exp\ tX)(\xi_i)-\xi_i}{t}-d\pi(X)\xi_i\right\|^2$$

sont majorées par $2\sum_{i\in I}\|d\pi(X)(\xi_i)\|^2$, donc la famille

$$\left(\left\|\frac{\pi(\exp\ tX)(\xi_i)-\xi_i}{t}-d\pi(X)\xi_i\right\|^2\right)_{i\in I}$$

est sommable de somme $\sup_{K\subset I} S_K$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\hat{\pi}_I(\exp\ tX)(\hat{\xi}_I)-\hat{\xi}_I}{t}-\hat{\eta}_I\right\|^2 = \sum_{i\in I}\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\pi(\exp\ tX)(\xi_i)-\xi_i}{t}-d\pi(X)\xi_i\right\|^2 = 0.$$

Ainsi, $\hat{\xi}_I$ est un vecteur du domaine de $d\hat{\pi}_I(X)$ et on a :

$$d\hat{\pi}_I(X)(\hat{\xi}_I) = \hat{\eta}_I = \sum_{i\in I}\phi_i(d\pi(X)(\xi_i)).$$

Par récurrence, on montre de même que pour tout A, le vecteur $\hat{\xi}_I$ est dans le domaine de $d\hat{\pi}_I(A)$.et que :

$$d\hat{\pi}_I(A)(\hat{\xi}_I) = \sum_{i\in I}\phi_i(d\pi(A)(\xi_i)).$$

Ainsi, $\hat{\xi}_I$ est un vecteur $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}$.

Soit maintenant f un élément de $\tilde{J}(\pi)$. Il existe donc une suite (ξ_n) de vecteurs de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ telle que $\sum_n \|d\pi(A)\xi_n\|^2 < \infty$ pour tout A de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Comme I est un ensemble infini, il contient donc un sous-ensemble J équipotent à $\mathbb{N}$. Par conséquent, le vecteur $\sum_n \phi_n(\xi_n) = \sum_{j\in J} \phi_j(\xi_j) = \hat{\xi}_I$ est de norme 1 et dans $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}^\infty$. Ainsi, pour tout A de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on a

$$f(A) = \sum_n \langle d\pi(A)\xi_n|\xi_n\rangle = \sum_{j\in J} \langle d\pi(A)\xi_j|\xi_j\rangle = \langle d\hat{\pi}_I(A)\hat{\xi}_I|\hat{\xi}_I\rangle.$$

Par suite f est dans $J(\hat{\pi}_I)$.

Réciproquement, si f est dans $J(\hat{\pi})$, il existe une suite finie de vecteurs $\hat{\xi}_I^{(k)}$ de $\mathcal{H}_{\hat{\pi}_I}^\infty$ et une suite de nombres positifs $\lambda^{(k)}$ telles que :

$$\|\hat{\xi}_I^{(k)}\| = 1, \ \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{(k)} = 1, \text{ et } f(A) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{(k)} \langle d\hat{\pi}(A)\hat{\xi}_I^{(k)}|\hat{\xi}_I^{(k)}\rangle, \ A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Remarquons que chaque vecteur $\hat{\xi}_I^{(k)}$ s'écrit $\sum_{i\in I} \phi_i(\xi_i^{(k)})$ avec $\sum_{i\in I} \|\xi_i^{(k)}\|^2 = 1$. De plus, pour tout A de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ la famille $\left(\|d\pi(A)\xi_i^{(k)}\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable.

Posons alors pour tout $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $k \in \{0, \cdots, m-1\}$ et $i \in I$:

$$f_i^{(k)}(A) = \langle d\pi(A)\xi_i^{(k)}|\xi_i^{(k)}\rangle.$$

On a alors :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i\in I} \lambda^{(k)} f_i^{(k)}(A).$$

La famille $\left(f_i^{(k)}(A)\right)_{i\in I}$ est sommable, elle vérifie donc la condition de Cauchy.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une partie $J_n^{(k)}$ de I tel que si L une partie de I disjointe de $J_n^{(k)}$ on a :

$$\left\| \sum_{i\in L} f_i^{(k)}(A) \right\| < \frac{1}{n}.$$

On peut supposer que $J_n^{(k)} \subset J_{n+1}^{(k)}$. Donc, on peut écrire $J_n^{(k)}$ comme réunion disjointes des ensembles suivants :

$$J_n^{(k)} = \left(\bigcup_{p=1}^{n-1} (J_{p+1}^{(k)} \setminus J_p^{(k)}) \right) \bigcup J_1^{(k)}.$$

Posons :

$$S_n^{(k)}(A) = \sum_{j\in J_n^{(k)}} f_j^{(k)}(A).$$

La suite $\left(S_n^{(k)}(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$\left\| S_{n+p}^{(k)}(A) - S_n^{(k)}(A) \right\| = \left\| \sum_{j\in J_{n+p}^{(k)} \setminus J_n^{(k)}} f_j^{(k)}(A) \right\| < \frac{1}{n},$$

elle converge vers $\sum_{i\in I} f_i^{(k)}(A)$.
Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} f_i^{(k)}(A) &= \lim_{n\to\infty} S_n^{(k)}(A)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{j\in J_{p+1}^{(k)}\setminus J_p^{(k)}} f_j^{(k)}(A) + \sum_{j\in J_1^{(k)}} f_j^{(k)}(A)\\ &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j\in J_{p+1}^{(k)}\setminus J_p^{(k)}} f_j^{(k)}(A) + \sum_{j\in J_1^{(k)}} f_j^{(k)}(A)\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}\eta_p^{(k)} &= \sum_{j\in J_{p+1}^{(k)}\setminus J_p^{(k)}} \phi_j(\xi_j^{(k)}),\ \ p\geq 1\\ \eta_0^{(k)} &= \sum_{j\in J_1^{(k)}} \phi_j(\xi_j^{(k)}).\end{aligned}$$

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} f_i^{(k)}(A) &= \sum_{p=1}^{\infty}\langle d\pi(A)\eta_p^{(k)}|\eta_p^{(k)}\rangle + \langle d\pi(A)\eta_0^{(k)}|\eta_0^{(k)}\rangle\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\langle d\pi(A)\eta_p^{(k)}|\eta_p^{(k)}\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{(k)}\sum_{p=0}^{\infty}\langle d\pi(A)\eta_p^{(k)}|\eta_p^{(k)}\rangle.$$

Maintenant, posons

$$\eta_{pm+k} = \sqrt{\lambda^{(k)}}\eta_p^{(k)}\ \ (0\leq k<m).$$

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\eta_n\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{(k)}\sum_{p=0}^{\infty}\|\eta_p^{(k)}\|^2 = 1$$

et

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle d\pi(A)\eta_n|\eta_n\rangle,$$

donc f appartient à $\tilde{J}(\pi)$. ∎

3 Représentations unitaires et application moment complet

Theorem 3.1. *Soient π et ρ deux représentations unitaires d'un groupe de Lie connexe G. Alors, π et ρ ont même ensemble moment complet si et seulement si elles sont quasi-équivalentes.*

Démonstration. Si π et ρ sont quasi-équivalentes, il existe un ensemble infini I tel que $\hat{\pi}_I = (\#I)\pi$ et $\hat{\rho}_I = (\#I)\rho$ sont unitairement équivalentes, elles ont donc même ensemble moment :

$$\tilde{J}(\pi) = J(\hat{\pi}_I) = J(\hat{\rho}_I) = \tilde{J}(\rho).$$

Réciproquement, supposons que $\tilde{J}(\pi) = \tilde{J}(\rho)$. Considérons l'ensemble $\mathcal{V}$ de toutes les familles $V = (\xi_i)_{i\in I}$ de vecteurs analytiques de norme 1 de $\mathcal{H}_\pi$ tels que si $i \neq j$, alors $\langle \pi(g)\xi_i | \xi_j \rangle = 0$ pour tout g de G. On ordonne $\mathcal{V}$ par inclusion. On obtient un ensemble inductif. D'après le lemme de Zorn , il existe une famille maximale W dans $\mathcal{V}$.
Pour chaque $i \in I$, on note $\mathcal{K}_i$ la fermeture de l'espace engendré par les $\pi(g)\xi_i$. On a bien sûr $\mathcal{K}_i \perp \mathcal{K}_j$ si $i \neq j$. En effet :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \pi(g_k)\xi_i \middle| \sum_{\ell=1}^{q} \mu_\ell \pi(g'_\ell)\xi_j \right\rangle = \sum_{k,\ell} \overline{\lambda_k}\mu_\ell \left\langle \pi((g'_\ell)^{-1}g_i)\xi_i | \xi_j \right\rangle = 0.$$

Par continuité du produit scalaire, si v_i appartient à $\mathcal{K}_i$ et v_j à $\mathcal{K}_j$, on aura aussi $v_i \perp v_j$. On peut donc considérer le sous-espace de $\mathcal{H}_\pi$ formé par la somme hilbertienne des $\mathcal{K}_i$. En fait, on a $\oplus_i \mathcal{K}_{i\in I} = \mathcal{H}_\pi$. Pour chaque $\mathcal{K}_i$, il existe une isométrie partielle T_i de $\mathcal{K}_i$ sur un sous-espace de $\mathcal{H}_{\tilde{\rho}}$, donc une isométrie partielle $T = \oplus_{i\in I} T_i$ de $\mathcal{H}_\pi$ sur un sous-espace de $\mathcal{H}_{\widehat{\rho}_I}$.
Dans [1] (Lemme 5.1), nous avons montré que pour tout vecteur analytique ξ_i de $\mathcal{H}_\pi$, il existe une suite $(\eta_{(i,k)})$ de vecteurs analytiques de $\mathcal{H}_\rho$ telle que :

$$\langle \pi(g)\xi_i | \xi_i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \rho(g)\eta_{(i,k)} | \eta_{(i,k)} \right\rangle,$$

Maintenant, on peut construire un opérateur d'entrelacement T_i entre $\pi|_{\mathcal{K}_i}$ et $\tilde{\rho}$. On considère $\mathcal{H}_{\tilde{\rho}} = \oplus_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(\mathcal{H}_\rho\right)$, on pose alors :

$$T_i \left(\sum_{p=1}^{\ell} \lambda_p \pi(g_p)\xi_i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\ell} \lambda_p \theta_k \left(\rho(g_p)\eta_{(i,k)} \right).$$

Ainsi, T_i s'étend d'une manière unique en une isométrie partielle de $\mathcal{K}_i$ dans $\mathcal{H}_{\tilde{\rho}}$. Cette isométrie est un entrelacement entre $\pi|_{\mathcal{K}_i}$ et $\tilde{\rho}$ (voir [1]).

En inversant les rôles de π et ρ, on trouve de même un ensemble J et pour chaque j de J un sous-espace invariant $\mathcal{H}'_j$ dans $\mathcal{H}_\rho$ et un opérateur d'entrelacement T'_j entre $\rho|_{\mathcal{K}'_j}$ et $\tilde{\pi}$.

On définit l'application linéaire $T = \oplus_{i\in I} T_i : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\tilde{\rho}}_I} = \oplus_{i\in I}\tilde{\theta}_i \left(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}}\right)$ par :

$$T\left(\sum_{i\in I} v_i\right) = \sum_{i\in I}\tilde{\theta}_i \left(T_i(v_i)\right).$$

T est un opérateur d'entrelacement entre π et $\widehat{\tilde{\rho}}_I$, en effet :

$$\left\| T\left(\sum_{i\in I} v_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i\in I}\tilde{\theta}_i \left(T_i(v_i)\right)\right\|^2 = \sum_{i\in I}\|T_i(v_i)\|^2 = \sum_{i\in I}\|v_i\|^2 = \left\|\sum_{i\in I} v_i\right\|^2.$$

De plus, pour tout g de G, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\tilde{\rho}}_I(g)\circ T\right)\left(\sum_{i\in I} v_i\right) &= \widehat{\tilde{\rho}}_I(g)\left(T(\sum_{i\in I} v_i)\right)\\
&= \widehat{\tilde{\rho}}_I(g)\left(\sum_{i\in I}\tilde{\theta}_i(T_i(v_i))\right)\\
&= \sum_{i\in I}\left(\tilde{\theta}_i\circ\tilde{\rho}(g)\right)\left(T_i(v_i)\right)\\
&= \sum_{i\in I}\tilde{\theta}_i\left(\tilde{\rho}(g)(T_i(v_i))\right)\\
&= \sum_{i\in I}\tilde{\theta}_i\left(T_i(\pi(g)v_i)\right)\\
&= T\left(\sum_{i\in I}\pi(g)v_i\right)\\
&= T\left(\pi(g)(\sum_{i\in I} v_i)\right) = \left(T\circ\pi(g)\right)(\sum_{i\in I} v_i).
\end{aligned}$$

De même, il existe un opérateur d'entrelacement T' entre ρ et $\widehat{\tilde{\pi}}_J$.

Soit L un ensemble infini de cardinal supérieur aux cardinaux de I et de J. On a vu que si I est infini, $\widehat{\tilde{\rho}}_I$ était unitairement équivalente par U à $\hat{\rho}_I$. On a donc un entrelacement isométrique $S = U\circ T$ entre π et $\hat{\rho}_I$. Comme L contient une partie isomorphe à I, $\hat{\rho}_I$ est une sous-représentation de $\hat{\rho}_L$ et on a construit un entrelacement entre π et $\hat{\rho}_L$. Si I est fini, $\widehat{\tilde{\rho}}_I$ est équivalente à $\tilde{\rho}$ et donc on a un entrelacement entre π et $\tilde{\rho}$. Comme L est infini, en procédant comme ci-dessus, on obtient un entrelacement entre π et $\hat{\rho}_L$. Finalement, on construit un opérateur d'entrelacement

$$\hat{S}_L : \mathcal{H}_{\hat{\pi}_L} = \oplus_{\ell\in L}\phi_\ell\left(\mathcal{H}_\pi\right) \longrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\hat{\rho}_I}_L} = \oplus_{\ell\in L}\hat{\theta}_\ell\left(\mathcal{H}_{\hat{\rho}_I}\right)$$

avec

$$\hat{S}\left(\sum_{\ell\in L}\phi_\ell(v_\ell)\right) = \sum_{\ell\in L}\hat{\theta}_\ell\left(S(v_\ell)\right).$$

Comme $\widehat{\rho}_{I_L}$ est unitairement équivalente par $\hat{U}$ à $\hat{\rho}_L$, on a donc un entrelacement isométrique $\hat{V} = \hat{U} \circ \hat{S}$ entre $\hat{\pi}_L$ et $\hat{\rho}_L$. Avec les notations de J. Dixmier ([4], p.101), on a $\hat{\pi}_L \leq \hat{\rho}_L$.

En renversant les rôles de π et ρ, on a aussi $\hat{\rho}_L \leq \hat{\pi}_L$. Ainsi, $\hat{\pi}_L$ et $\hat{\rho}_L$ sont unitairement équivalentes et par conséquent π et ρ sont quasi-équivalentes. ∎

Maintenant, si G est un groupe de Lie et π une représentation unitaire et irréductible de G, alors l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π est séparable. Dans la plupart des cas, les représentations unitaires qu'il est naturel de considérer se réalisent aussi dans des espaces séparables. Dans le suivant paragraphe, nous allons voir un exemple de représentations non séparables naturelles d'un groupe de Lie G.

4 Exemple : Groupe de Mautner

Soit G le groupe de Mautner, le groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe formé par les matrices complexes 3×3 de la forme :

$$M(t,z,w) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}, w, z \in \mathbb{C},$$

où α est un nombre réel irrationnel. En fait, G est le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^4$ muni de la loi de multiplication suivante :

$$(t,z,w).(t',z',w') = (t+t', z+z'e^{it}, w+w'e^{i\alpha t}).$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension 5 dont une base est

$$T = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec les relations de commutations non triviales :

$$[T, X+iY] = -i(X+iY) \text{ et } [T, U+iV] = -i\alpha(U+iV).$$

Posons $Z = X + iY$ et $W = U + iV$. L'action coadjointe de G sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est donné en tout point $f = \tau T^* + aZ^* + bW^* \in \mathfrak{g}^*$, $(f = \bar{f})$ par :

$$G \cdot f = \{\tau' T^* + ae^{-it}Z^* + be^{-i\alpha t}W^*,\ (\tau', t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ainsi, les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont des cylindres de dimension 2 dont les bases sont dense sur la surface du tore

$$\mathbb{T}_{|a|,|b|} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |x| = |a|,\ |y| = |b|\}.$$

Considérons la représentation régulière R du groupe G. Elle agit dans $L^2(G)$ par translation à droite et s'écrit :

$$(R(\tau,\xi,\eta)f)(t,z,w) = f(t+\tau, z+e^{it}\xi, w+e^{i\alpha t}\eta).$$

Kirillov a donné deux décompositions différentes de R en composantes irréductibles. D'abord, il a montré que T est la somme continue des représentations $U_{x,y}$ $(x,y \in \mathbb{C})$ qui agissent dans $L^2(\mathbb{R})$ suivant la formule :

$$(U_{x,y}(\tau,\xi,\eta)\varphi_{x,y})(t) = e^{i\Re\mathfrak{e}(e^{it}x\bar{\xi}+e^{i\alpha t}y\bar{\eta})}\varphi_{x,y}(t+\tau), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, les représentations $U_{x,y}$ $(x,y \in \mathbb{C})$ sont irréductibles vérifiant :

$$U_{x,y} \simeq U_{x',y'} \;\Leftrightarrow\; \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x' = xe^{it} \text{ et } y' = ye^{i\alpha t}.$$

Ensuite, il a décomposé R en somme continue des représentations $V_{r,\rho,s}$ $(r>0,\ \rho>0,\ s \in \mathbb{R})$ qui agissent dans $L^2(\mathbb{T}_{r,\rho})$ de la manière suivante :

$$(V_{r,\rho,s}(\tau,\xi,\eta)\varphi_{r,\rho})(x,y) = e^{i\Re\mathfrak{e}(\tau s+e^{i\tau}x\bar{\xi}+e^{i\alpha\tau}y\bar{\eta})}\varphi_{r,\rho}(xe^{i\tau}, ye^{i\alpha\tau}), \quad (x,y) \in \mathbb{T}_{r,\rho}.$$

Où $\mathbb{T}_{r,\rho}$ est le tore de dimension 2 dans $\mathbb{C}^2$.
Les représentations $V_{r,\rho,s}$ sont alors irréductibles telles que :

$$V_{r,\rho,s} \simeq V_{r,\rho,s'} \;\Leftrightarrow\; s-s' \in \Gamma = \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}.$$

De plus, aucune des représentations $V_{\tau,\rho,s}$ n'est équivalente à $U_{x,y}$.

Considérons maintenant les représentations non séparables $T_{(r,\rho)}$ et $S_{(r,\rho)}$ du groupe G qui sont définies

$$T_{(r,\rho)} = \oplus_{\theta\in\mathbb{R}|\Gamma} U_{(re^{i\theta},\rho)} \qquad \text{et} \qquad S_{(r,\rho)} = \oplus_{s\in\mathbb{R}|\Gamma} V_{r,\rho,s}.$$

Les représentations $T_{(r,\rho)}$ et $S_{(r,\rho)}$ ne sont pas quasi-équivalentes. Donc, les ensembles moment $J(T_{(r,\rho)})$ et $J(S_{(r,\rho)})$ sont différents bien qu'au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ils coïncident avec $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_{r,\rho}$.

Références

[1] L. Abdelmoula, D. Arnal, J. Ludwig and M. Selmi, *Separation of unitary representations of connected Lie groups by their moment sets*, Journal of Functional Analysis, **228** (2005), (189-206).

[2] D.Arnal and J. Ludwig, *La convexité de l'application moment d'un groupe de Lie*, Journal of Funct Analysis, **105** (1992), 256-300.

[3] A. Baklouti, J. Ludwig and M. Selmi, *Séparation des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Proceedings of the II International Workshop, Clausthal, Germany 17-20 August 1997, Lie theory and its applications in Physics II.

[4] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*. 2 ème ed. Cahiers scientifiques. **29**. Paris : Gauthier-Villars.XV, 390 p. (1969).

[5] E. Nelson, *Analytic vectors*. Ann of Math., II. Ser. **70**, 572-615 (1959).

[6] G, Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 188. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. XVI,529 p. (1972).

[7] N.J. Wildberger, *Convexity and unitary representations of nilpotent Lie groups*, Invent. Math. **98** (1989), 281-292.

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Sfax,
B.P. 1171, 3000 Sfax, Tunisie.
E-mail : Lobnaabdelmoula@yahoo.fr

Institut de Mathématiques de Bourgogne,
UMR CNRS 5585, Université de Bourgogne,
U.F.R Sciences et techniques,
B.P. 47870, F-21078 Dijon Cedex, France.
E-mail : Didier.Arnal@u-bourgogne.fr

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences de Monastir,
Avenue de l'environnement 5019 Monastir, Tunisie.
E-mail : Mohamed.Selmi@fss.rnu.tn