# Bigèbres quasi-Lie et boucles de Lie

Momo Bangoura

**Abstract**

In this work, we define the quasi-Poisson Lie quasigroups, dual objects to the quasi-Poisson Lie groups and we establish the one-to-one correspondance up to isomorphism between the local quasi-Poisson Lie quasigroups and quasi-Lie bialgebras.

**Résumé**

Dans ce travail, nous définissons les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson, objets duaux des groupes de Lie quasi-Poisson et nous établissons une correspondance biunivoque à isomorphisme près entre les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson locaux et les bigèbres quasi-Lie.

## 1 Introduction

Les groupes de Lie-Poisson étant les limites classiques des algèbres de Hopf, les groupes de Lie quasi-Poisson [12, 13] sont les limites classiques des quasi-algèbres de Hopf introduites par Drinfeld [6], et les objets infinitésimaux sont appelés les quasi-bigèbres de Lie dans [6] et quasi-bigèbres jacobiennes dans [13]. Rappelons que dans la traduction du papier original de Drinfeld en anglais [6], le terme "*quasi-Lie bialgebra*" est utilisé pour ce que nous appelons ici quasi-bigèbre de Lie. Contrairement aux notions de bigèbre de Lie et de groupe de Lie-Poisson [5, 14, 2, 16, 15], les notions de quasi-bigèbre de Lie et de groupe de Lie quasi-Poisson ne sont pas auto-duales ; l'objet dual d'une quasi-bigèbre de Lie

Received by the editors February 2007 - In revised form in September 2008.
Communicated by S. Gutt.
2000 *Mathematics Subject Classification :* 17B70, 17A30.
*Key words and phrases :* Lie algebra, Akivis algebra, quasi-Lie bialgebra, Lie loop, Lie group, Lie quasi-bialgebra, quasi-double, quasigroup, quasi-Poisson.

est appelé une quasi-bigèbre co-jacobienne dans [13, 3]. Nous l'appellerons *bigèbre quasi-Lie*. Ici, nous nous proposons de construire l'objet dual d'un groupe de Lie quasi-Poisson, c'est-à-dire un objet géométrique généralisant les groupes de Lie-Poisson dont l'espace tangent en un élément distingué est muni d'une structure de bigèbre quasi-Lie et nous convenons d'appeler cet objet quasi-groupe de Lie quasi-Poisson. Plus précisément, un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson est un $G-$espace quasi-Poisson au sens de [1], muni d'une structure de boucle de Lie (Lie loop en anglais) mono-alternative à droite avec certaines relations de compatibilité entre les deux structures, notamment celle généralisant la multiplicativité [16, 15] du champ de bivecteurs qui est satisfaite dans le cas des groupes de Lie-Poisson. Pour cela, on se sert de la théorie des boucles de Lie mono-alternatives à droite [20] en introduisant les notions de groupe de Lie quasi-double et d'algèbre de Lie quasi-double dont les propriétés font ressortir l'action à droite d'un groupe de Lie sur une boucle de Lie et d'une "action" de cette boucle de Lie sur le groupe de Lie. Un groupe de Lie quasi-double est un triplet formé d'un groupe de Lie, d'un sous-groupe de Lie fermé et d'une sous-variété fermée du groupe de Lie, laquelle est munie d'une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite, le triplet vérifiant un certain nombre de propriétés ; l'objet infinitésimal associé est appelé une algèbre de Lie quasi-double. Cette construction généralise certains résultats de [16] sur les groupes de Lie doubles et algèbres de Lie doubles ; ces dernières sont aussi appelées algèbres de Lie bicroisées dans [14, 17].

Dans la section 2 nous faisons un rappel de quelques notions sur les boucles de Lie et les algèbres d'Akivis [7, 18, 19, 20].

Dans la section 3, on définit et on étudie les groupes de Lie quasi-doubles et les algèbres de Lie quasi-doubles en établissant une correspondance entre les deux notions, tout en faisant ressortir la compatibilité entre les différentes opérations les définissant.

Dans la section 4, on fait un bref rappel sur les bigèbres quasi-Lie en montrant leur lien d'une part avec les algèbres de Lie quasi-doubles, et d'autre part avec les algèbres d'Akivis.

La dernière section recouvre l'essentiel du travail à savoir la définition des quasi-groupes de Lie quasi-Poisson et l'établissement d'une correspondance bijective à isomorphisme près entre les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson locaux et les bigèbres quasi-Lie.

## 2 Boucles de Lie mono-alternatives à droite

Dans cette section, nous faisons un rappel sur les boucles de Lie en reprenant les définitions et certains résultats de [18, 19, 20].

**Définition 1.** *Une boucle de Lie est une variété analytique réelle $B$ munie d'une opération interne analytique*

$$\begin{array}{rcccc} m & : & B \times B & \longrightarrow & B \\ & & (a, b) & \longrightarrow & ab = m(a, b) \end{array}$$

*admettant un élément neutre $\varepsilon$, vérifiant*

$$a\varepsilon = \varepsilon a = a$$

*pour tout $a \in B$, telle que les équations*

$$ac = b \quad et \quad ca = b$$

*admettent des solutions uniques notées respectivement $a \setminus b$ et $b/a$ et les applications*

$$(a, b) \longrightarrow b \setminus a, \qquad (a, b) \longrightarrow a/b$$

*sont analytiques.*

Ainsi, comme on le voit, tout groupe de Lie est une boucle de Lie.
Si les trois opérations

$$(a, b) \longrightarrow ab, \quad (a, b) \longrightarrow a/b\,, \quad (a, b) \longrightarrow b \setminus a$$

sont définies localement au voisinage de $\varepsilon$, on dit que $B$ est une boucle de Lie locale.
**Remarque :** L'unicité des solutions dans une boucle de Lie des équations $ab = c$ et $ba = c$ signifie que les translations à gauche et à droite par un élément $a \in B$, notées respectivement par $\lambda_a$ et $\rho_a$, définies par $\lambda_a(b) = ab$, $\rho_a(b) = ba$, sont des difféomorphismes.

L'espace tangent en l'identité à toute boucle de Lie est muni d'une structure généralisant la notion de structure d'algèbre de Lie, et dont les propriétés découlent de celles de la boucle de Lie. Ce qui nous conduit à la définition suivante [7] :

**Définition 2.** *Une algèbre d'Akivis $(A, [.,.], < .,.,. >)$ est un espace vectoriel $A$ muni d'une application bilinéaire antisymétrique*

$$\begin{array}{rcccc} [.,.] & : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & & (x, y) & \longrightarrow & [x, y] \end{array}$$

*et d'une application trilinéaire*

$$\begin{array}{rcccc} < .,.,. > & : & A \times A \times A & \longrightarrow & A \\ & & (x, y, z) & \longrightarrow & < x, y, z > \end{array}$$

*telles que*

$$\sum_{\sigma \in S_3} sign\sigma < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)} >= \sum_{\bigcirc} [[x_1, x_2], x_3]$$

*où $S_3$ désigne le groupe des permutations de $(1, 2, 3)$, $sign\sigma$ est la signature de $\sigma \in S_3$ et $\sum_{\bigcirc}$ désigne la somme sur les permutations circulaires de $x_1, x_2, x_3$.*

Ainsi, toute algèbre de Lie détermine une structure d'algèbre d'Akivis en prenant $< .,.,. >= 0$.
Pour une boucle de Lie locale $B$, on montre dans [7] qu'il existe une structure d'algèbre d'Akivis sur $T_\varepsilon B$, l'espace tangent en l'identité, déterminée par les opérations suivantes :

$$[x, y] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} [(x(t)y(t)) / (y(t)x(t))]|_{t=0}$$

$$< x, y, z >= \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} [((x(t)y(t))z(t)) / (x(t)(y(t)z(t)))]|_{t=0}$$

pour $x, y, z \in T_\varepsilon B$, où $x(t), y(t), z(t)$ sont des courbes de classe $C^k$ $(k \geq 3)$ dans $B$, passant par le point $\varepsilon$ avec les vecteurs tangents $x, y, z$ respectivement.
L'algèbre d'Akivis ainsi décrite est appelée algèbre d'Akivis de la boucle de Lie $B$.
Nous allons à présent définir une classe de boucles de Lie locales avec laquelle nous travaillerons dans la suite.

**Définition 3.** *Une boucle de Lie locale $B$ est dite mono-alternative à droite, si pour tous $a, b \in B$, voisins de $\varepsilon$ et pour tous entiers $k, l \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$(ab^k)b^l = ab^{k+l}.$$

**Remarque :** La formule ci-dessus exprime d'une part une associativité faible de la multiplication définie sur $B$, d'autre part l'existence d'un inverse pour tout élément $a \in B$, noté $a^{-1}$. Par convention , on a pour tout $a \in B$, $a^0 = \varepsilon$, $a^{-k} = (a^{-1})^k$ et donc $\rho_a^{-1} = \rho_{a^{-1}}$.

**Exemple 1.** *Soit $SH(n)$ l'ensemble des matrices hermitiennes $n \times n$ définies positives de déterminant $1$ et $SU(n)$ le groupe spécial unitaire d'ordre $n$ ; considérons la décomposition polaire du groupe de Lie réel $SL(n, \mathbb{C})$ des matrices complexes $n \times n$ de déterminant $1$,*

$$SL(n, \mathbb{C}) = SU(n) \times SH(n).$$

*Alors $SH(n)$ muni de la multiplication définie par la projection sur $SH(n)$ du produit matriciel dans $SL(n, \mathbb{C})$, est une boucle de Lie mono-alternative à droite.*

Explicitement, la multiplication sur $SH(n)$ est définie par

$$m(a, b) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall a, b \in SH(n).$$

En effet tout élément $d \in SL(n, \mathbb{C})$ se décompose de manière unique sous la forme $d = ga$, où $g \in SU(n)$ et $a \in SH(n)$ ; soient $\bar{g}$ et $\bar{a}$ les complexes conjuguées de $g$ et $a$ respectivement. Comme $(\bar{g})^t g = I_n$ et $(\bar{a})^t = a$ par définition de $SU(n)$ et $SH(n)$, multipliant $d$ à gauche par la conjuguée de sa transposée, on obtient $(\bar{d})^t d = a^2$; d'où $a = [(\bar{d})^t d]^{\frac{1}{2}}$ est la projection de $d$ sur $SH(n)$. Pour tous $a, b \in SH(n)$, distincts de $I_n$ et $b \neq a^{-1}$, le produit $ab$ qui est un élément de $SL(n, \mathbb{C})$ n'est élément ni de $SH(n)$, ni de $SU(n)$. Comme $(\bar{a})^t = a$ et $(\bar{b})^t = b$ par définition de $SH(n)$, de ce qui précède, la projection du produit $ab$ sur $SH(n)$ est

$$m(a, b) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall a, b \in SH(n).$$

On vérifie sans peine que $(SH(n), m)$ est une boucle de Lie mono-alternative à droite.

De même, l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives $n \times n$ et l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives $n \times n$ sont des boucles de Lie mono-alternatives à droite, la multiplication $m$ étant définie comme dans l'exemple ci-dessus.

## 3 Groupes de Lie quasi-doubles

Les groupes de Lie quasi-doubles sont des généralisations naturelles des groupes de Lie doubles [16].

**Définition 4.** *Un groupe de Lie quasi-double est un triplet* $(G, G_1, G_2)$*, où*
*1)* $G$ *est un groupe de Lie et* $G_1$ *un sous-groupe de Lie fermé de* $G$ *;*
*2)* $G_2$ *est une sous-variété fermée de* $G$ *munie de deux applications analytiques*

$$\alpha : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_1 \qquad et \qquad m : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_2$$

*satisfaisant l'identité*

$$(ab)_G = \alpha(a,b)m(a,b) \qquad \forall a, b \in G_2,$$

*telles que* $m$ *définit sur* $G_2$ *une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite ;*
*3) l'application*

$$\begin{array}{rcccl} \omega & : & G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G, \\ & & (g,a) & \longrightarrow & ga \end{array}$$

*est un difféomorphisme.*

Si $G_1$, $G_2$ et $\omega$ sont définis localement, on dit que $(G, G_1, G_2)$ est un groupe de Lie quasi-double local.
**Remarques :** Si $\alpha(a,b) = e, \forall a, b \in G_2$, où $e$ désigne l'élément neutre de $G$, alors $G_2$ est aussi un sous-groupe de Lie de $G$ et le triplet $(G, G_1, G_2)$ définit un groupe de Lie double au sens de [16]. Par ailleurs, en identifiant $G$ avec $G_1 \times G_2$ par $\omega$, on voit que $\alpha$ et $m$ sont respectivement les projections sur $G_1$ et $G_2$ de la restriction de la multiplication de $G$ à $G_2$. Par ailleurs, de l'unicité de l'élément neutre $e$ dans $G$, il résulte que $e = \varepsilon$ où $\varepsilon$ est l'élément neutre de $G_2$ ; par conséquent nous les identifierons dans toute la suite de ce travail.

Nous allons à présent montrer que si $(G, G_1, G_2)$ est un groupe de Lie quasi-double, alors il existe deux applications analytiques

$$\chi : G_2 \times G_1 \longrightarrow G_1 \qquad \text{et} \qquad \sigma : G_2 \times G_1 \longrightarrow G_2$$

telles que $\sigma$ définisse une action à droite du groupe de Lie $G_1$ sur la variété $G_2$ et $G_2$ agisse sur $G_1$ par $\chi$ au sens de la relation (3) ci-dessous. En effet si $g \in G_1$ et $a \in G_2$, alors $ag \in G$ ; par conséquent d'après la condition (3) de la définition précédente, il existe un unique élément $g' \in G_1$ et un unique élément $a' \in G_2$ tels que

$$ag = g'a'$$

Posons $a' = a^g$ et $g' = g^a$, et considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} \chi & : & G_2 \times G_1 & \longrightarrow & G_1, \\ & & (a,g) & \longrightarrow & g^a \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} \sigma & : & G_2 \times G_1 & \longrightarrow & G_2 \\ & & (a,g) & \longrightarrow & a^g \end{array}$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Soit* $(G, G_1, G_2)$ *un groupe de Lie quasi-double ; soient* $g, h \in G_1$ *et* $a, b, c \in G_2$*. Alors on a les identités suivantes :*

1. $(gh)^a = g^a h^{a^g}$
2. $(a^g)^h = a^{gh}$
3. $(g^b)^a \alpha(a^{g^b}, b^g) = \alpha(a, b) g^{m(a,b)}$
4. $[m(a, b)]^g = m(a^{g^b}, b^g)$
5. $\alpha(a, b)\alpha(m(a, b), c) = [\alpha(b, c)]^a \alpha(a^{\alpha(b,c)}, m(b, c))$
6. $m(m(a, b), c) = m(a^{\alpha(b,c)}, m(b, c))$

*Inversement si* $G_1$ *est un groupe de Lie agissant à droite par* $\sigma$ *sur une boucle de Lie mono-alternative à droite* $G_2$ *dont la loi est définie par* $m : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_2$ *et s'il existe deux applications analytiques* $\alpha : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_1$ *et* $\chi : G_2 \times G_1 \longrightarrow G_1$ *tels que les conditions (1)-(6) soient vérifiées, alors il existe une structure de groupe de Lie sur* $G_1 \times G_2$ *telle que* $(G_1 \times G_2, G_1, G_2)$ *définisse un groupe de Lie quasi-double.*

*Démonstration :* Pour la première partie, la démonstration des identités (1)-(6) est une conséquence directe de l'associativité et de l'unicité de la décomposition du produit dans $G$.
Pour la seconde partie, on définit la structure de groupe de Lie sur $G_1 \times G_2$ par :

$$(g, a)(h, b) = (gh^a \alpha(a^h, b), m(a^h, b)), \forall g, h \in G_1, \forall a, b \in G_2.$$

Il suffit de vérifier l'associativité du produit ainsi défini sur $G_1 \times G_2$, qui est une conséquence des conditions (1)-(6). ∎

**Remarque :** La condition (2) signifie que $\sigma$ définit une action à droite du groupe de Lie $G_1$ sur la variété $G_2$, tandis que la condition (3) signifie que $G_2$ agit à gauche par $\chi$ sur $G_1$ mais que $\chi$ n'est pas une vraie action à gauche, le défaut d'action étant mesuré par l'application $\alpha$ ; dans la suite, nous appellerons une telle application $\chi$ une *action à gauche* $\alpha-$*tordue*. Si $\alpha(a, b) = e, \forall a, b \in G_2$, alors $G_2$ est un groupe de Lie et $\chi$ devient une action à gauche de $G_2$ sur la variété $G_1$.

**Corollaire 1.** *Soit* $(G, G_1, G_2)$ *un groupe de Lie quasi-double. Alors* $\forall a, b, c \in G_2$*, on a :*

1. $\lambda_{m(a,b)}(c) = (\lambda_{\sigma(a,\alpha(b,c))} \circ \lambda_b)(c)$,
2. $\rho_{m(a,b)}(c) = (\rho_b \circ \rho_a)(\sigma(c, \alpha(a, b)^{-1}))$,
3. $(\rho_b \circ \lambda_a)(c) = (\lambda_{\sigma(a,\alpha(c,b))} \circ \rho_b)(c)$.

Ces différentes relations découlent de la relation (6) du théorème précédent. Si $\alpha(a, b) = e, \forall a, b \in G_2$, alors $G_2$ est un groupe de Lie et on retrouve les identités usuelles sur les translations à gauche et à droite dans un groupe de Lie.

**Exemple 2.** *Le triplet* $(SL(n,\mathbb{C}), SU(n), SH(n))$ *considéré dans l'exemple 1 est un groupe de Lie quasi-double. Les applications* $\alpha$ *et* $m$ *sur* $SH(n)$ *sont définies respectivement par*

$$\alpha(a,b) = (ab)(ba^2b)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad m(a,b) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}} \quad \forall a,b \in SH(n).$$

Définissons à présent la notion correspondante pour les algèbres de Lie en établissant une relation entre les deux notions.

**Définition 5.** *Une algèbre de Lie quasi-double est un triplet* $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ *où* $\mathbf{g}$ *est une algèbre de Lie de dimension finie,* $\mathbf{g_1}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathbf{g}$ *et* $\mathbf{g_2}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{g}$ *muni de deux opérations bilinéaires antisymétriques*

$$\mu : \Lambda^2\mathbf{g_2} \longrightarrow \mathbf{g_2} \qquad \text{et} \qquad \psi : \Lambda^2\mathbf{g_2} \longrightarrow \mathbf{g_1}$$

*tels que*

1. $\mathbf{g} = \mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2}$ *comme somme directe de sous-espaces vectoriels ;*
2. $[x,y]_\mathbf{g} = \psi(x,y) + \mu(x,y), \forall x,y \in \mathbf{g_2}$.

Ainsi, une algèbre de Lie quasi-double est une algèbre de Lie qui se décompose en somme directe d'une sous-algèbre de Lie et d'un sous-espace vectoriel.
**Remarque :** Si $\psi(x,y) = 0, \forall x,y \in \mathbf{g_2}$, alors $\mathbf{g_2}$ est aussi une sous-algèbre de Lie de $\mathbf{g}$ et le triplet $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ définit une algèbre de Lie double au sens de [16], i.e encore "a matched pair of Lie algebras" au sens de [17]. Dans [1], les algèbres de Lie quasi-doubles $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ telles que $\mathbf{g}$ est munie d'une forme bilinéaire invariante non dégénérée par rapport à laquelle $\mathbf{g_1}$ et $\mathbf{g_2}$ sont des sous-espaces isotropes maximaux de $\mathbf{g}$, sont appelées des quasi-triples de Manin.

**Exemple 3.** *Le triplet* $(sl(n,\mathbb{C}), su(n), sh(n))$*, où* $sl(n,\mathbb{C})$ *est l'algèbre de Lie des matrices complexes* $n \times n$ *de trace nulle,* $su(n)$ *l'algèbre de Lie des matrices anti-hermitiennes* $n \times n$ *de trace nulle et* $sh(n)$ *l'espace vectoriel des matrices hermitiennes* $n \times n$ *de trace nulle, est une algèbre de Lie quasi-double. Ici,* $\psi$ *est la restriction à* $sh(n)$ *du crochet de Lie de* $sl(n,\mathbb{C})$*, qui est à valeurs dans* $su(n)$ *et* $\mu = 0$.

Plus généralement, la décomposition de Cartan [9] de toute algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie fournit une structure d'algèbre de Lie quasi-double.

Pour établir le lien entre les groupes de Lie quasi-doubles locaux et les algèbres de Lie quasi-doubles, rappelons tout d'abord le lemme suivant sur la décomposition d'une algèbre de Lie en une somme directe de sous-espaces vectoriels [10] (page 76) :

**Lemme 1.** *Soit* $G$ *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathbf{g}$ *e t supposons que* $\mathbf{g}$ *est une somme directe de sous-espaces vectoriels*

$$\mathbf{g} = \mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2} \oplus ... \oplus \mathbf{g_k}.$$

*Si* $U_i$ *est un voisinage ouvert suffisamment petit de* $0$ *dans* $\mathbf{g_i}$ *pour* $1 \leq i \leq k$*, alors l'application*

$$(X_1, ..., X_k) \longrightarrow g(expX_1)...(expX_k)$$

*est un difféomorphisme de* $U_1 \times ... \times U_k$ *dans un voisinage ouvert de* $g$ *dans* $G$.

Le résultat suivant établit une correspondance entre les groupes de Lie quasi-doubles locaux et les algèbres de Lie quasi-doubles.

**Théorème 2.** *Soit $(G, G_1, G_2)$ un groupe de Lie quasi-double local ; soient $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g_1}$ les algèbres de Lie de $G$ et $G_1$ respectivement, et soit $\mathbf{g_2} = T_eG_2$ l'espace tangent à $G_2$ en l'identité. Alors $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ est une algèbre de Lie quasi-double.*
*Inversement, à toute algèbre de Lie quasi-double, il correspond un unique groupe de Lie quasi-double local, à isomorphisme près, dont l'algèbre de Lie quasi-double est celle de départ.*

*Démonstration :* Il est clair que $\mathbf{g} = \mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2}$. Pour la conclusion, il suffit de prendre pour $\mu$ le crochet commutateur associé à $m$ et pour $\psi$ le crochet commutateur associé à $\alpha$, i.e

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}[m(x(t), y(t))/m(y(t), x(t))]|_{t=0}$$

et

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}[\alpha(x(t), y(t))(\alpha(y(t), x(t)))^{-1}]|_{t=0}$$

où $x(t), y(t)$ sont des courbes de classe $C^k$ $(k \geq 2)$ dans $B$, passant par $e$ avec les vecteurs tangents $x, y$ respectivement. Remarquons que $\psi$ est bien défini, car $\alpha(x(t), y(t))$ et $\alpha(y(t), x(t))$ sont des éléments du groupe de Lie $G_1$ et par conséquent $\alpha(x(t), y(t))(\alpha(y(t), x(t)))^{-1} \in G_1$.
Pour la seconde partie, considérons une algèbre de Lie quasi-double $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ et soient $G$, $G_1$ les groupes de Lie connexes et simplement connexes correspondant à $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g_1}$ respectivement. Soit $\Pi : G \longrightarrow G_1 \setminus G$ la projection naturelle de $G$ dans l'espace $G_1 \setminus G$ des classes à droite et $\phi$ la restriction à $\mathbf{g_2}$ de l'application composée $\Pi \circ (exp) : \mathbf{g} \longrightarrow G_1 \setminus G$. Alors $\phi$ est un difféomorphisme d'un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbf{g_2}$ dans un voisinage de la classe $\Pi(e)$ dans $G_1 \setminus G$ [9, 20]. Posons

$$G_2 = expV.$$

Du lemme précédent, il résulte que pour $k = 2$ et $g = e$, l'application $\omega : G_1 \times G_2 \longrightarrow G$ définie par $(g, a) \longrightarrow ga$ est un difféomorphisme local. Introduisons sur $G_2$ une loi de composition interne définie par :

$$m(a, b) = \Pi_{G_2}(ab)$$

$\forall a, b \in G_2$, où $ab$ est le produit dans $G$ des éléments $a$ et $b$ et $\Pi_{G_2}$ est la projection locale sur $G_2$ parallèlement à $G_1$, i.e, dans la décomposition locale unique $d = ga \in G$, $g \in G_1$ et $a \in G_2$. Alors $(G_2, m)$ est une boucle de Lie locale monoalternative à droite [20]. En effet, par définition de $m$, on a

$$m(m(a, b^k), b^l) = \Pi_{G_2}(\Pi_{G_2}(ab^k)b^l) = \Pi_{G_2}((ab^k)b^l) = \Pi_{G_2}(ab^{k+l})$$

et comme pour $b$ suffisamment proche de $e$ dans $G_2$ on a $b^{k+l} \in G_2$, alors

$$m(a, m(b^k, b^l)) = \Pi_{G_2}(a\Pi_{G_2}(b^kb^l) = \Pi_{G_2}(ab^{k+l}) = m(a, b^{k+l}).$$

Par conséquent
$$m(m(a,b^k),b^l) = m(a,b^{k+l})$$
Ainsi $(G_2, m)$ est une boucle de Lie locale mono-alternative à droite. D'après [20], cette boucle de Lie locale mono-alternative à droite est unique à isomorphisme près.
Posons $\alpha(a,b) = \Pi_{G_1}(ab)$ où $\Pi_{G_1}$ est la projection locale sur $G_1$ parallèlement à $G_2$ ; de l'unicité de la décomposition locale des éléments de $G$, il résulte que $(ab)_G = \alpha(a,b)m(a,b)$, $\forall a, b \in G_2$. En définitive $(G, G_1, G_2)$ est un groupe de Lie quasi-double local. D'où le résultat. ■

Comme pour les groupes de Lie quasi-doubles, nous allons montrer que pour toute algèbre de Lie quasi-double donnée $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$, il existe deux applications correspondant à $\chi$ et $\sigma$. En effet si $\xi \in \mathbf{g_1}$ et $x \in \mathbf{g_2}$, alors $[x,\xi]_{\mathbf{g}} \in \mathbf{g}$ ; par conséquent il existe $\xi' \in \mathbf{g_1}$ et $x' \in \mathbf{g_2}$ tels que
$$[x,\xi] = \xi' + x'.$$
Posons $\xi' = \xi^x$, $x' = x^\xi$ et considérons les applications suivantes :
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g_2} \times \mathbf{g_1} & \longrightarrow & \mathbf{g_1}, \\ (x,\xi) & \longrightarrow & \xi^x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{g_2} \times \mathbf{g_1} & \longrightarrow & \mathbf{g_2} \\ (x,\xi) & \longrightarrow & x^\xi \end{array}$$
On a le résultat suivant

**Théorème 3.** *Soit $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ une algèbre de Lie quasi-double. Soient $\xi, \eta, \in \mathbf{g_1}$, $x, y, z \in \mathbf{g_2}$. Alors on a les identités suivantes :*

1. $[\xi,\eta]^x = [\xi^x,\eta] + [\xi,\eta^x] - (\xi)^{x^\eta} + (\eta)^{x^\xi}$
2. $x^{[\xi,\eta]} = (x^\xi)^\eta - (x^\eta)^\xi$
3. $\mu(x,y)^\xi = \mu(x^\xi,y) + \mu(x,y^\xi) + (x)^{\xi^y} - (y)^{\xi^x}$
4. $\xi^{\mu(x,y)} = (\xi^y)^x - (\xi^x)^y + [\xi,\psi(x,y)] + \psi(x^\xi,y) + \psi(x,y^\xi)$
5. $\sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x,y),z) = \sum_{\bigcirc} x^{\psi(y,z)}$
6. $\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z) = \sum_{\bigcirc} \psi(x,y)^z$

*Inversement si $\mathbf{g_1}$ est une algèbre de Lie agissant sur un espace vectoriel $\mathbf{g_2}$ par $(x,\xi) \longrightarrow x^\xi$, $\mathbf{g_2}$ muni de deux applications bilinéaires antisymétriques $\mu : \Lambda^2\mathbf{g_2} \longrightarrow \mathbf{g_2}$ et $\psi : \Lambda^2\mathbf{g_2} \longrightarrow \mathbf{g_1}$, et s'il existe une application de $\mathbf{g_2} \times \mathbf{g_1}$ dans $\mathbf{g_1}$ notée par $(x,\xi) \longrightarrow \xi^x$, tels que les conditions (1)-(6) ci-dessus soient satisfaites, alors il existe une unique structure d'algèbre de Lie sur $\mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2}$ telle que $(\mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ définisse une algèbre de Lie quasi-double.*

*Démonstration :* La démonstration de la première partie du théorème est une conséquence de l'identité de Jacobi dans $\mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2}$.
Pour la seconde partie, on définit un crochet $[.,.]$ sur $\mathbf{g_1} \oplus \mathbf{g_2}$ par :
$$[\xi,\eta] = [\xi,\eta]_{\mathbf{g_1}}, \forall \xi, \eta \in \mathbf{g_1}$$

$$[x,\xi] = \xi^x + x^\xi, \forall \xi \in \mathbf{g_1}, \forall x \in \mathbf{g_2}$$
$$[x,y] = \psi(x,y) + \mu(x,y), \forall x,y \in \mathbf{g_2}$$

et on vérifie l'identité de Jacobi pour le crochet ainsi défini, qui est une conséquence des conditions (1)-(6) de la première partie du théorème. Ce qui achève la démonstration. ∎

**Corollaire 2.** *Soit* $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ *une algèbre de Lie quasi-double. Posons*

$$[x,y]_{\mathbf{g_2}} = \mu(x,y), \qquad < x,y,z >= \frac{1}{2} x^{\psi(y,z)}.$$

*Alors le triplet* $(\mathbf{g_2}, [.,.]_{\mathbf{g_2}}, < .,.,. >)$ *est une algèbre d'Akivis.*

La démonstration du corollaire est une interprétation de la condition (5) du théorème précédent.

Si $(G, G_1, G_2)$ est un groupe de Lie quasi-double, localement, en appliquant la formule de Campbell-Hausdorff dans $G$ [8], on a le résultat suivant

**Proposition 1.** *Les applications* $m, \alpha, \sigma$ *et* $\chi$ *admettent les développements limités (d'ordre* 3*) suivants au voisinage de zéro :*

$$m(x,y) = x+y+\frac{1}{2}\mu(x,y)+\frac{1}{12}\left(\mu(x,\mu(x,y)) + \mu(y,\mu(y,x)) + x^{\psi(x,y)} + y^{\psi(y,x)}\right) + ...$$

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{2}\psi(x,y) + \frac{1}{12}\left(\psi(x,\mu(x,y)) + \psi(y,\mu(y,x)) + \psi(x,y)^x + \psi(y,x)^y\right) + ...$$

$$\sigma(x,\xi) = x + \frac{1}{2}x^\xi + \frac{1}{12}\left(\mu(x,x^\xi) + (x)^{\xi^x} + (x^\xi)^\xi\right) + ...$$

$$\chi(x,\xi) = \xi + \frac{1}{2}\xi^x + \frac{1}{12}\left(\psi(x,x^\xi) + [\xi^x,\xi] + (\xi^x)^x + (\xi)^{x^\xi}\right) + ...$$

$\forall \xi \in \mathbf{g_1}, \forall x,y \in \mathbf{g_2}$.

**Définition 6.** *Soit* $(\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})$ *une algèbre de Lie quasi-double. Une forme bilinéaire* $< .,. >: \mathbf{g_1} \times \mathbf{g_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite invariante si* $\forall \xi, \eta \in \mathbf{g_1}$, $\forall x,y,z \in \mathbf{g_2}$, *on a :*
*a)* $< \xi, \mu(x,y) >=< \xi^y, x >$, $\mu$ *étant le crochet défini sur* $\mathbf{g_2}$ *;*
*b)* $< [\xi,\eta], x >=< \eta, x^\xi >$ *où* $[.,.]$ *est le crochet de Lie sur* $\mathbf{g_1}$ *;*
*c)* $< \psi(x,y), z >=< \psi(y,z), x >$, *où* $\psi$ *est la projection sur* $\mathbf{g_2}$ *du crochet de Lie de* $\mathbf{g}$.

**Exemple 4.** *Soit* $(sl(n,\mathbb{C}), su(n), sh(n))$ *l'algèbre de Lie quasi-double de l'exemple 3. Alors la forme bilinéaire* $< .,. >: su(n) \times sh(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$< \xi, x >= Im(trace(x\xi)), \qquad \forall x \in sh(n), \forall \xi \in su(n),$$

*est invariante.*

Soit $(G, G_1, G_2)$ un groupe de Lie quasi-double ; pour tout $x \in T_eG_2$, soit $x^L$ le champ de vecteurs invariant à gauche sur $G$ associé à $x$, c'est-à-dire

$$x^L(d) = (T_eL_d)(x) \in T_dG, \forall d \in G$$

où $L_d$ est la translation à gauche par $d$ dans $G$, et $x^\lambda$ l'image directe par $\Pi_{G_2}$ du champ $x^L$, c'est-à-dire

$$x^\lambda(\Pi_{G_2}(d)) = [T_e(\Pi_{G_2} \circ L_d)](x) \in T_{\Pi_{G_2}(d)}G_2, \forall d \in G.$$

Il est clair que $x^\lambda$ n'est pas invariant à gauche par les translations dans $G_2$ du fait de la non associativité de $m$ ; appelons-le le champ de vecteurs translaté à gauche sur $G_2$ associé à $x$. Soit $(\lambda_a)_*$ (respectivement $(\rho_b)_*$) l'application linéaire tangente de $\lambda_a$ (respectivement $\rho_b$).
On a le résultat suivant

**Proposition 2.** *Soit $(G, G_1, G_2)$ un groupe de Lie quasi-double ; soit $\rho_{G_2} : T_eG_1 \longrightarrow \mathcal{X}(G_2)$, l'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à l'action $\sigma$ de $G_1$ sur $G_2$, $\mathcal{X}(G_2)$ étant l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $G_2$. Alors pour tous $\xi \in T_eG_1$, pour tous $a, b \in G_2$, pour tous $x, y \in T_eG_2$, on a*

$$x^\lambda(m(a,b)) = (\lambda_a)_*(x^\lambda(b)) + (\rho_b)_*(\rho_{G_2}(x^b)(a)),$$
$$\rho_{G_2}(\xi)(m(a,b)) = (\lambda_a)_*(\rho_{G_2}(\xi)(b)) + (\rho_b)_*(\rho_{G_2}(\xi^b)(a)),$$
$$[x^\lambda, y^\lambda] = \rho_{G_2}(\psi(x,y)) + (\mu(x,y))^\lambda$$

*où $[x^\lambda, y^\lambda]$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs $x^\lambda$ et $y^\lambda$ sur $G_2$, $x^b$ et $\xi^b$ sont des éléments de $T_eG$, définis respectivement par*

$$x^b = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, exptx)) \qquad et \qquad \xi^b = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\chi(b, expt\xi))$$

*Démonstration :* Ici, on notera $\sigma_a(g) = \sigma(a, g)$ et nous désignerons par $L_a$ (respectivement $R_a$) la translation à gauche (respectivement à droite) par $a \in G_2$ dans le groupe de Lie $G$. Démontrons la première relation ; en effet d'après la formule (6) du théorème 1 et la définition de $m$, $\forall a, b \in G_2$ et $\forall x \in T_eG_2$, on a :

$$\begin{aligned}
x^\lambda(m(a,b)) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(m(m(a,b), exptx)) \\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(m(\sigma(a, \alpha(b, exptx)), m(b, exptx))) \\
&= (\Pi_{G_2})_*(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\sigma(a, \alpha(b, exptx)).\Pi_{G_2}(b.exptx))) \\
&= (\Pi_{G_2})_*((\sigma_a)_*(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, exptx))).b) \\
&\quad +(\Pi_{G_2})_*((\sigma(a,e).(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\Pi_{G_2}(b.exptx)))) \\
&= (\Pi_{G_2} o R_b o \sigma_a)_*(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, exptx))) + (\Pi_{G_2} o L_a)_*(x^\lambda(b)) \\
&= (\rho_b o \sigma_a)_*(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, exptx))) + (\lambda_a)_*(x^\lambda(b)) \\
&= (\lambda_a)_*(x^\lambda(b)) + (\rho_b)_*(\rho_{G_2}(x^b)(a)).
\end{aligned}$$

D'où le résultat ; en particulier si $\alpha(a,b) = e$, $\forall a, b \in G_2$, alors $x^b = 0, \forall x \in T_eG_2$ et on retrouve le fait que $x^\lambda$ est invariant à gauche sur $G_2$ qui est dans ce cas un groupe de Lie. La démonstration de la deuxième relation est identique, et celle de la dernière découle de l'identité bien connue pour les groupes de Lie en se plaçant dans le groupe de Lie $G$, à savoir

$$[x^L, y^L] = [x,y]^L,$$

où $x^L$, $y^L$ désignent les champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$ associés à $x$ et $y$ respectivement, $[x^L, y^L]$ est leur crochet de Lie dans $G$ et $[x,y]$ le crochet de Lie des éléments $x$ et $y$ dans $T_eG$. Ce qui achève la démonstration de la proposition. ∎

## 4 Bigèbres quasi-Lie

Les bigèbres quasi-Lie sont les objets duaux des quasi-bigèbres de Lie introduites par Drinfeld [6]. Plus précisément

**Définition 7.** *Une bigèbre quasi-Lie est un quadruplet* $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ *où* $\mathbf{F}$ *est un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $\mu : \Lambda^2\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$, $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}$, *et* $\psi \in \Lambda^3\mathbf{F}^*$ *tels que :*

1. $Alt(\gamma \otimes Id)\gamma(x) = 0, \forall x \in \mathbf{F}$, *i.e* $(\mathbf{F}, \gamma)$ *est une co-algèbre de Lie ;*
2. $\gamma$ *est une dérivation par rapport à* $\mu$*, c'est-à-dire*
$$\gamma(\mu(x,y)) = \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)), \qquad \forall x, y \in \mathbf{F};$$
3. $Alt(\mu^t \otimes Id)\mu^t(\xi) = (\delta_\gamma \psi)(\xi), \forall \xi \in \mathbf{F}^*$, *où* $\mu^t : \mathbf{F}^* \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}^*$ *est l'opérateur transposé de* $\mu$ *et* $\delta_\gamma$ *désigne l'opérateur cobord d'algèbre de Lie définie par* $\gamma$ *;*
4. $Alt((\mu^t \otimes Id \otimes Id)\psi) = 0,$

*où* $Alt$ *est l'opérateur alternateur défini sur l'algèbre tensorielle de* $\mathbf{F}^*$ *par*

$$Alt(\xi_1 \otimes ... \otimes \xi_n) = \sum_\sigma sign\sigma \xi_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes \xi_{\sigma(n)},$$

$\xi_i \in \mathbf{F}^*$, $i = 1, ..., n$, $\sigma$ *étant une permutation de* $\{1, ..., n\}$ *et* $sign\sigma$ *la signature de la permutation* $\sigma$.

**Remarques :**
a) Dans le cas où $\psi = 0$, le triplet $(\mathbf{F}, \mu, \gamma)$ satisfaisant les conditions ci-dessus est une bigèbre de Lie [5, 14, 2]. Dans ce cas, la condition (2) signifie que $\gamma$ est un $1-$cocycle de $(\mathbf{F}, \mu)$ à valeurs dans $\Lambda^2\mathbf{F}$ par rapport à l'action adjointe définie par $\mu$.
b) Si $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ est une bigèbre quasi-Lie, alors $(\mathbf{F}^*, \gamma, \mu, \psi)$ est une quasi-bigèbre de Lie [12, 13]. Ainsi, comme on le voit, ces deux notions sont duales l'une de l'autre et ne sont pas auto-duales.

En identifiant les applications $\mu$ et $\gamma$ à des éléments de l'algèbre extérieure de $\mathbf{F}^* \oplus \mathbf{F}$, à savoir $\mu \in \Lambda^2\mathbf{F}^* \otimes \mathbf{F}$, $\gamma \in \mathbf{F}^* \otimes \Lambda^2\mathbf{F}$, et en utilisant les propriétés du grand crochet [13] nous avons le résultat suivant

**Proposition 3.** $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ *est une bigèbre quasi-Lie si et seulement si* $\mu + \gamma + \psi$ *est de carré nul par rapport au grand crochet ; plus précisément si les conditions suivantes sont satisfaites*

$$[\gamma, \gamma] = 0$$
$$[\gamma, \mu] = 0$$
$$\frac{1}{2}[\mu, \mu] + [\gamma, \psi] = 0$$
$$[\mu, \psi] = 0.$$

Ce formalisme a l'avantage de simplifier les calculs dans la théorie des bigèbres de Lie et leurs généralisations [13].

**Exemple 5.** *Soit* $(\mathbf{F}, \gamma)$ *une co-algèbre de Lie ; soit* $\omega \in \Lambda^2\mathbf{F}^*$ *et posons*

$$\mu = \delta_\gamma(\omega)$$

$$\psi = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]^\gamma$$

*où* $[.,.]^\gamma$ *désigne le crochet de Schouten algébrique [13] associé à* $\gamma$*. Alors* $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ *est une bigèbre de quasi-Lie.*

**Exemple 6.** *Considérons la décomposition polaire de l'algèbre de Lie réelle* $sl(n, \mathbb{C})$*, c'est-à-dire*

$$sl(n, \mathbb{C}) = su(n) \oplus sh(n).$$

*Soient* $\gamma$ *le crochet de Lie sur* $su(n)$ *et* $\psi$ *la restriction à* $sh(n)$ *du crochet de Lie de* $sl(n, \mathbb{C})$*, qui est à valeurs dans* $su(n)$*. Comme* $su(n)$ *s'identifie au dual* $sh(n)^*$ *de* $sh(n)$ *par l'intermédiaire de la forme bilinéaire invariante non dégénérée définie sur* $sl(n, \mathbb{C})$ *par*

$$< x, y >= Im(trace(xy)), \qquad x, y \in sl(n, \mathbb{C}),$$

*on peut identifier* $\psi$ *à un élément de* $\Lambda^3 su(n) \cong \Lambda^3(sh(n))^*$*. Par conséquent* $(sh(n), 0, \gamma, \psi)$ *est une bigèbre quasi-Lie.*

Nous allons à présent montrer qu'à toute structure de bigèbre quasi-Lie sur un espace vectoriel donné $\mathbf{F}$ de dimension finie, il correspond une certaine structure d'algèbre de Lie sur $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ et inversement [13, 3] ; faisant ainsi du triplet $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ une algèbre de Lie quasi-double.

Soit $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ une bigèbre quasi-Lie ; pour plus de simplicité, désignons $\gamma$ et sa transposée par le même symbole et identifions $\psi \in \Lambda^3\mathbf{F}^*$ à une application bilinéaire antisymétrique notée aussi par $\psi : \Lambda^2\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}^*$ définie par

$$< \psi(x, y), z >= \psi(x, y, z), \forall x, y, z \in \mathbf{F},$$

où $< .,. >$ désigne le crochet de dualité entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}^*$. Nous avons le résultat suivant ([3]) :

**Théorème 4.** *Le crochet* $M$ *sur* $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ *défini par :*

$$M(x, y) = \mu(x, y) + \psi(x, y), \forall x, y \in \mathbf{F}$$

$$M(x, \xi) = -ad_\xi^{*\gamma} x + ad_x^{*\mu} \xi, \forall x \in \mathbf{F}, \forall \xi \in \mathbf{F}^*$$

$$M(\xi, \eta) = \gamma(\xi, \eta), \forall \xi, \eta \in \mathbf{F}^*$$

*où* $ad_x^\mu y = \mu(x, y)$, $ad_x^{*\mu} = -(ad_x^\mu)^t$, $ad_\xi^\gamma \eta = \gamma(\xi, \eta)$ *et* $ad_\xi^{*\gamma} = -(ad_\xi^\gamma)^t$,
*est un crochet d'algèbre de Lie laissant invariant le produit scalaire canonique défini sur* $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ *par*

$$< x + \xi, y + \eta >=< \xi, y > + < \eta, x >, \forall x, y \in \mathbf{F}, \forall \xi, \eta \in \mathbf{F}^*$$

De façon plus précise, on montre dans [3], que les structures de bigèbre quasi-Lie sur un espace vectoriel $\mathbf{F}$ sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre de Lie quasi-double sur $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ laissant invariant le produit scalaire canonique, c'est-à-dire les structures de quasi-triple de Manin [1]. Dans [13, 3], le couple $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, M)$ est appelé le double de la bigèbre quasi-Lie $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$. Ainsi, d'après le corollaire 2, à toute structure de bigèbre quasi-Lie, il correspond une structure d'algèbre d'Akivis.
Pour plus de détails sur les bigèbres quasi-Lie, voir [12, 13, 3].

## 5 Quasi-groupes de Lie quasi-Poisson

Dans cette section, nous définissons l'objet géométrique correspondant à une bigèbre quasi-Lie, puis nous établissons un résultat liant les deux notions.

**Définition 8.** *Un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson est un ensemble* $(B, m, G, \sigma, P, \alpha, \chi, < .,. >)$ *où* $(B, m)$ *est une boucle de Lie mono-alternative à droite,* $G$ *un groupe de Lie agissant à droite sur* $B$ *par* $\sigma : B \times G \longrightarrow B$*,* $P$ *un champ de bivecteurs s'annulant en l'identité de* $B$*,* $\alpha : B \times B \longrightarrow G$ *une application analytique,* $\chi : B \times G \longrightarrow G$ *une action à gauche* $\alpha-$*tordue de* $B$ *sur* $G$ *et* $< .,. >: T_eG \times T_eB \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire invariante non dégénérée tels que*

1. $m(m(a,b),c) = m(\sigma(a, \alpha(b,c)), m(b,c)), \forall a,b,c \in B$;
2. $\alpha(a,b)\alpha(m(a,b),c) = \chi(a, \alpha(b,c))\alpha(\sigma(a, \alpha(b,c)), m(b,c)), \forall a,b,c \in B$;
3. $\frac{1}{2}[P,P]_S = -(\Lambda^3 \rho_B)(\psi)$, *où* $[.,.]_S$ *désigne le crochet de Schouten des champs de multivecteurs [11, 13],* $\rho_B : T_eG \longrightarrow \mathcal{X}(B)$ *l'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à l'action* $\sigma$ *et* $\psi$ *le crochet commutateur associé à* $\alpha$ *;*
4. $L_{x^\lambda} P = [(L_{x^\lambda} P)(e)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), \forall x \in T_eB$, *où* $x^\lambda$ *désigne le champ de vecteurs translaté à gauche correspondant à* $x$ *et* $L_{x^\lambda} P$ *la dérivée de Lie de* $P$ *par rapport à* $x^\lambda$.

**Remarques :**
1) Si $\alpha(a,b) = e, \forall a,b \in B$ (donc $\psi = 0$), alors $(B,m)$ est un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson ; si en plus $B$ est connexe, la condition (4) de la définition ci-dessus ($\psi = 0$) est équivalente à la multiplicativité [16, 15, 13] de $P$ car $P(e) = 0$, et donc $(B, m, P)$ est un groupe de Lie-Poisson.
2) Par définition $(\rho_B(\xi))(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\sigma(a, exp(-t\xi)))$.
3) La non dégénérescence de $< .,. >$ identifie $T_eG$ avec le dual $(T_eB)^*$ de $T_eB$ ; d'où de l'invariance de $< .,. >$, $\psi \in \Lambda^3(T_eB)^* \cong \Lambda^3 T_eG$.
4) Dans la condition 4) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson, $\psi$ est identifié à une application de $T_eB$ dans $\Lambda^2(T_eB)^* \cong \Lambda^2 T_eG$ par $< \psi(x), y \wedge z >=< \psi(x,y), z >= \psi(x,y,z)$.
5)Par définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson, $P$ n'est pas en général Poisson, mais il définit un crochet de Poisson sur l'espace $C^\infty(B)^G$ des fonctions $G-$invariantes définies sur $B$ [1].

On a le résultat suivant

**Proposition 4.** *Soit $(B, m, G, \sigma, P, \alpha, \chi, < ., . >)$ un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local ; soit $\gamma$ la linéarisation de $P$ en l'identité de $B$ [21], c'est-à-dire $\gamma(x) = (L_{x^\lambda} P)(e)$, $\forall x \in T_e B$. Alors l'application $\gamma : T_e B \longrightarrow \Lambda^2(T_e B)$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\gamma^2 = 0$;
2. $\gamma(\mu(x, y)) = \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)), \qquad \forall x, y \in T_e B,$

*où $\mu$ est le crochet associé à $m$, et $\gamma^2(x) = (\gamma \otimes Id + Id \otimes \gamma)(\gamma(x))$.*

*Démonstration :* 1) En utilisant l'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten et la condition (4) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson, on obtient

$$\begin{aligned}
[x^\lambda, [P, P]_S]_S &= 2[[x^\lambda, P]_S, P]_S \\
&= 2[\gamma(x)^\lambda - (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), P]_S \\
&= 2([\gamma^2(x)]^\lambda - (\Lambda^3 \rho_B)(\psi(\gamma(x))) \\
&\quad -[(\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), P]_S), \forall x \in T_e B.
\end{aligned}$$

D'où

$$[x^\lambda, [P, P]_S]_S = 2([\gamma^2(x)]^\lambda - (\Lambda^3 \rho_B)(\psi(\gamma(x))) - [(\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), P]_S).$$

Ainsi, en évaluant cette égalité en l'identité $e$ dans $B$, sachant que $P(e) = 0$ et $\rho_B$ s'annule en $e$, on trouve

$$[x^\lambda, [P, P]_S]_S(e) = 2\gamma^2(x), \forall x \in T_e B.$$

Par ailleurs, de la condition (3) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson et en utilisant la définition de la dérivée de Lie, on a

$$\begin{aligned}
[x^\lambda, [P, P]_S]_S(e) &= -2[x^\lambda, \Lambda^3 \rho_B(\psi)]_S(e) = -2(L_{x^\lambda} \Lambda^3 \rho_B(\psi))(e) \\
&= -2\frac{d}{dt}|_{t=0}((\Lambda^3 \rho_B(\psi)(exptx))exp(-tx)) \\
&= -2\frac{d}{dt}|_{t=0}((\Lambda^3(\rho_{exp(-tx)} \circ \sigma_{exptx}))_*(\psi))
\end{aligned}$$

où $\sigma_a(g) = \sigma(a, g), \forall a \in B, \forall g \in G$. Comme $\psi \in \Lambda^3(T_e B)^*$ et $(\sigma_e)_* = 0$, la règle de dérivation de la composition des applications prouve que $[x^\lambda, [P, P]_S]_S(e) = 0$. De ce qui précède, il s'ensuit que $\gamma^2(x) = 0, \forall x \in T_e B$; d'où $\gamma^2 = 0$.
2) En utilisant la relation (4) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson et la relation $[x^\lambda, y^\lambda] = \rho_B(\psi(x, y)) + (\mu(x, y))^\lambda$ sachant que $\rho_B$ s'annule en $e$, on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu(x, y)) &= (L_{\mu(x,y)^\lambda} P)(e) \\
&= (L_{[x^\lambda, y^\lambda]} P)(e) - (L_{\rho_B(\psi(x,y))} P)(e) \\
&= (L_{x^\lambda} L_{y^\lambda} P)(e) - (L_{y^\lambda} L_{x^\lambda} P)(e) \\
&= [x^\lambda, [y^\lambda, P]](e) - [y^\lambda, [x^\lambda, P]](e) \\
&= [x^\lambda, \gamma(y)^\lambda](e) - [x^\lambda, (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(y))](e) \\
&\quad -[y^\lambda, \gamma(x)^\lambda](e) + [y^\lambda, (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x))](e) \\
&= \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)).
\end{aligned}$$

D'où
$$\gamma(\mu(x,y)) = \mu(\gamma(x),y) + \mu(x,\gamma(y)), \qquad \forall x,y \in T_\varepsilon B.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■
**Remarques :** La relation $\gamma^2 = 0$ signifie que $\gamma$ est un co-crochet de Lie sur $T_eB$ ou encore un crochet de Lie sur $(T_eB)^* \cong T_eG$ qu'on va identifier avec le crochet de Lie de $T_eG$. Ainsi l'invariance de $< .,. >$ prouve que

$$\xi^x = ad_x^{*\mu}\xi, \qquad x^\xi = -ad_\xi^{*\gamma}x.$$

La relation (2) de la proposition exprime le fait que $\gamma$ est une dérivation par rapport à $\mu$. En termes de grand crochet, les deux relations s'écrivent respectivement comme suit [13]
$$[\gamma,\gamma] = 0$$
$$[\gamma,\mu] = [\mu,\gamma] = 0.$$

Le résultat suivant établit une correspondance entre les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson locaux et les bigèbres quasi-Lie.

**Théorème 5.** *L'espace tangent en l'identité à la boucle de Lie de tout quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local $(B,m,G,\sigma,P,\alpha,\chi,< .,. >)$ est muni d'une structure de bigèbre quasi-Lie $(\mathbf{F},\mu,\gamma,\psi)$, où $\mathbf{F} = T_eB$, $\mu$ est le crochet commutateur défini à partir de la loi de composition $m$, $\gamma = d_eP$ la linéarisation de $P$ en l'identité et $\psi$ le crochet commutateur associé à l'application $\alpha$.*

*Inversement, à toute bigèbre quasi-Lie réelle $(\mathbf{F},\mu,\gamma,\psi)$, il correspond un unique quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local à isomorphisme près, dont la bigèbre quasi-Lie tangente coïncide avec la bigèbre quasi-Lie donnée.*

*Démonstration :* Soit $(B,m,G,\sigma,P,\alpha,\chi,< .,. >)$ un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local. Soit $\mathbf{F} = T_eB$ ; soient $\mu$ et $\psi$ les crochets commutateurs associés à $m$ et $\alpha$ respectivement. Comme $P(e) = 0$, on peut considérer la linéarisation de $P$ en $e$ et désignons-la par $\gamma$, i.e $\gamma(x) = (L_{x^\lambda}P)(e)$. D'après la proposition 4, $\gamma$ est un co-crochet de Lie sur $\mathbf{F}$ et une dérivation par rapport à $\mu$.
Considérons à présent la relation (1) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson

$$m(m(a,b),c) = m(\sigma(a,\alpha(b,c)),m(b,c)), \forall a,b,c \in B.$$

Alors en effectuant localement un développement limité d'ordre 3 au voisinage de zéro des deux membres de cette égalité en utilisant la proposition 1, on obtient pour tous $x,y,z \in \mathbf{F}$

$$\begin{aligned}&3\mu(\mu(x,y),z) + \mu(x,\mu(y,z)) + \mu(y,\mu(x,z)) + y^{\psi(x,z)} + x^{\psi(y,z)} - 3z^{\psi(x,y)} = \\ &= 3\mu(x,\mu(y,z)) + \mu(y,\mu(z,x)) + \mu(z,\mu(y,x)) + y^{\psi(z,x)} + 3x^{\psi(y,z)} + z^{\psi(y,x)}.\end{aligned}$$

En utilisant l'antisymétrie des applications $\mu$ et $\psi$, on obtient

$$\sum_{\circlearrowleft} \mu(\mu(x,y),z) = \sum_{\circlearrowleft} x^{\psi(y,z)}.$$

Mais l'invariance de $< .,. >$ prouve que

$$x^{\psi(y,z)} = -ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)}x;$$

en effet $\forall x, y, z \in \mathbf{F}, \xi \in T_eG$, on a

$$< x^{\psi(y,z)}, \xi >=< \gamma(\psi(y,z), \xi), x >= - < ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)}x, \xi >;$$

ce qui prouve l'affirmation. D'où

$$\sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x,y),z) = -\sum_{\bigcirc} ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)}x, \qquad \forall x, y, z \in \mathbf{F}.$$

Par transposition, on trouve que cette égalité est équivalente à

$$(Alt(\mu^t \otimes Id)\mu^t)(\xi) = (\delta_\gamma \psi)(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbf{F}^*.$$

En effet $\forall x, y, z \in \mathbf{F}, \xi \in T_eG$, on a

$$\sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x,y),z) = -\sum_{\bigcirc} ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)}x$$

$$\Leftrightarrow < \sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x,y),z), \xi >= - < \sum_{\bigcirc} ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)}x, \xi >$$

$$\Leftrightarrow < \sum_{\bigcirc} \mu(x, \mu(y,z)), \xi >=< \sum_{\bigcirc} ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)}x, \xi >$$

$$\Leftrightarrow < (\mu(Id \otimes \mu)) \sum_{\bigcirc}(x \otimes y \otimes z), \xi >= \sum_{\bigcirc} < \gamma(\xi, \psi(x,y)), z >$$

$$\Leftrightarrow < (\mu(Id \otimes \mu))(Alt(x \otimes y \otimes z)), \xi >= -\sum_{\bigcirc} < \psi(x,y), ad^{*\gamma}_{\xi}z >$$

$$\Leftrightarrow < (\mu(Id \otimes \mu))(Alt(x \otimes y \otimes z)), \xi >= - < \psi, \sum_{\bigcirc}(x \otimes y \otimes ad^{*\gamma}_{\xi}z) > .$$

Par transposition, on trouve

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &< (Alt(\mu^t \otimes Id)\mu^t)(\xi), x \otimes y \otimes z >= \\ &< (ad^{\gamma}_{\xi} \otimes Id \otimes Id + Id \otimes ad^{\gamma}_{\xi} \otimes Id + Id \otimes Id \otimes ad^{\gamma}_{\xi})(\psi), x \otimes y \otimes z >\end{aligned}$$

$$< (Alt(\mu^t \otimes Id)\mu^t)(\xi), x \otimes y \otimes z >=< (\delta_\gamma \psi)(\xi), x \otimes y \otimes z > \qquad \forall x, y, z \in \mathbf{F}.$$

La non dégénérescence de $< .,. >$ prouve que

$$(Alt(\mu^t \otimes Id)\mu^t)(\xi) = (\delta_\gamma \psi)(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbf{F}^*.$$

Enfin, considérons la relation (2) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson

$$\alpha(a,b)\alpha(m(a,b),c) = \chi(a, \alpha(b,c))\alpha(\sigma(a, \alpha(b,c)), m(b,c)), \forall a, b, c \in B;$$

comme précédemment, en effectuant localement un développement limité d'ordre 3 au voisinage de zéro des deux membres de cette égalité en utilisant la proposition 1, on obtient

$$\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z) = \sum_{\bigcirc} \psi(y,z)^x, \qquad \forall x,y,z \in \mathbf{F}.$$

L'invariance de $< .,. >$ prouve que

$$\psi(y,z)^x = ad_x^{*\mu}\psi(y,z);$$

en effet $\forall x,y,z,u \in \mathbf{F}$, on a

$$< \psi(y,z)^x, u >=< \psi(y,z), \mu(u,x >= - < \psi(y,z), \mu(x,u >=< ad_x^{*\mu}\psi(y,z), u >;$$

ce qui prouve l'affirmation. D'où

$$\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z) = \sum_{\bigcirc} ad_x^{*\mu}\psi(y,z), \qquad \forall x,y,z \in \mathbf{F}.$$

Par transposition, on trouve que cette dernière égalité est équivalente à

$$(Alt(\mu^t \otimes Id \otimes Id))(\psi) = 0.$$

En effet $\forall x,y,z,u \in \mathbf{F}$, considérant la somme sur les permutations circulaires de $x,y,z$ on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z) = \sum_{\bigcirc} ad_x^{*\mu}\psi(y,z) \\
\Leftrightarrow &< \sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z), u >=< \sum_{\bigcirc} ad_x^{*\mu}\psi(y,z), u > \\
\Leftrightarrow &< \sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z) - \sum_{\bigcirc} ad_x^{*\mu}\psi(y,z), u >= 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x,y),z,u) + < \sum_{\bigcirc} \psi(y,z), ad_x^{\mu}u >= 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{\bigcirc} \psi(x,u,\mu(y,z)) + < \sum_{\bigcirc} \psi(y,z), \mu(x,u) >= 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{\bigcirc} \psi(x,u,\mu(y,z)) + \sum_{\bigcirc} \psi(x,y,\mu(z,u)) = 0 \\
\Leftrightarrow &< \psi, (Id \otimes Id \otimes \mu)(Alt(x \otimes y \otimes z \otimes u)) >= 0.
\end{aligned}$$

Par transposition, on trouve

$$< Alt(\mu^t \otimes Id \otimes Id)(\psi), x \otimes y \otimes z \otimes u >= 0 \qquad \forall x,y,z,u \in \mathbf{F}.$$

La non dégénérescence de $< .,. >$ montre que

$$(Alt(\mu^t \otimes Id \otimes Id))(\psi) = 0.$$

En définitive, $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ est une bigèbre quasi-Lie.

Inversement soit $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ une bigèbre quasi-Lie ; d'après le théorème 4, il lui correspond une structure d'algèbre de Lie quasi-double sur $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ laissant invariant le produit scalaire canonique. Soit $(D, G, B)$ le groupe de Lie quasi-double local correspondant à $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ décrit par le théorème 2. $\forall a, b \in B$, $\forall g \in G$, posons

$$m(a,b) = \Pi_B(ab), \alpha(a,b) = \Pi_G(ab), \sigma(a,g) = \Pi_B(ag), \chi(a,g) = \Pi_G(ag).$$

Il est clair que $\sigma$ est une action à droite de $G$ sur $B$ et $\chi$ est une action à gauche $\alpha$-tordue. De la relation d'associativité dans $D$, $(a(bc)_D)_D = ((ab)_D c)_D, \forall a, b, c \in B$, on obtient les relations (1) et (2) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson.
Par ailleurs, d'après [13], par la donnée de la bigèbre quasi-Lie $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$, $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ est munie d'une structure de quasi-bigèbre de Lie quasitriangulaire $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, M, \Gamma, \psi)$, où $M$ est la structure d'algèbre de Lie sur $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ décrite par le théorème 4, $\Gamma$ est le co-crochet sur $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ défini par le cobord de l'élément $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\Pi_{\mathbf{F}^*} - \Pi_{\mathbf{F}})$ par rapport au crochet d'algèbre de Lie $M$, i.e $\Gamma = \delta_M \mathbf{r}$ ; explicitement

$$\mathbf{r}(\xi, x) = \frac{1}{2}(-x, \xi)$$

et

$$\Gamma(x, \xi) = \gamma(x) - \mu^t(\xi) - \psi(x) \in \Lambda^2(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*)$$

où $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}$, $\mu^t : \mathbf{F}^* \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}^*$ (transposition), $\psi : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}^*$.
De la théorie des quasi-bigèbres de Lie et groupes de Lie quasi-Poisson [13], on sait que cette structure sur $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ s'intègre en une structure de groupe de Lie quasi-Poisson sur $D$ notée par $(D, P, \psi)$, où

• $P$ est un champ de bivecteurs multiplicatif [16, 15, 13] sur le groupe de Lie $D$, c'est-à-dire $P(gh) = (L_g)_* P(h) + (R_h)_* P(g), \forall g, h \in D$, où $(L_g)_*$ (resp. $(R_h)_*$) désigne l'application linéaire tangente de la translation à gauche (resp. à droite) de $D$ par $g$ (resp. par $h$) ;
• $\frac{1}{2}[P, P]_S = \psi^R - \psi^L$, où $[.,.]_S$ désigne le crochet de Schouten des champs de multivecteurs sur $D$ [11, 13] et $\psi^L$ (respectivement $\psi^R$) désigne le champ de trivecteurs invariant à gauche (respectivement à droite) sur $D$ associé à $\psi$ ;
• $[P, \psi^L]_S = [P, \psi^R]_S = 0$.

Considérons à présent l'image directe par $\Pi_B : D \longrightarrow B$ du champ de bivecteurs $P$ et notons-la par $P_B$, c'est-à-dire

$$P_B(\Pi_B(d)) = (\Lambda^2 T_d \Pi_B)(P(d)), \qquad \forall d \in D.$$

$P_B$ est bien un champ de bivecteurs défini sur $B$ avec $P_B(e) = 0$, à cause du caractère multiplicatif de $P$. Par ailleurs, prenant l'image directe par $\Pi_B$ des deux membres de l'égalité

$$\frac{1}{2}[P, P]_S = \psi^R - \psi^L,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}[P_B, P_B]_S = (\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^R) - (\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^L).$$

Mais $(\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^R) = 0$ car $\psi \in \Lambda^3(T_eB)^*$ et $\Pi_B \circ R_a = \rho_a \circ \Pi_B$ par construction de la structure du groupe de Lie quasi-double $(D, G, B)$ ; d'autre part

$$(\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^L) = (\Lambda^3\rho_B)(\psi).$$

D'où

$$\frac{1}{2}[P_B, P_B]_S = -(\Lambda^3\rho_B)(\psi).$$

Enfin d'après [16, 15, 13], comme $D$ est connexe, la multiplicativité de $P$ est équivalente aux conditions suivantes : $P(e) = 0$ et $L_{X^L}P$ est invariant à gauche, c'est-à-dire

$$L_{X^L}P = [(L_{X^L}P)(e)]^L, \forall X \in T_eD = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*,$$

où $X^L$ désigne le champ de vecteurs invariant à gauche sur $D$ associé à $X$. Mais de ce qui précède, $(L_{X^L}P)(e) = \Gamma(X) = (\gamma - \mu^t - \psi)(X), \forall X \in T_eD = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$. Considérons la relation ci-dessus avec $X = x \in \mathbf{F}$, c'est-à-dire

$$L_{x^L}P = [\Gamma(x)]^L = [\gamma(x) - \psi(x)]^L;$$

comme $\psi(x) \in \Lambda^2\mathbf{F}^*$, en prenant l'image directe par $\Pi_B$ des deux membres de cette égalité, on obtient

$$L_{x^\lambda}P_B = [\gamma(x)]^\lambda - (\Lambda^2\rho_B)(\psi(x)) = [(L_{x^\lambda}P_B)(\varepsilon)]^\lambda - (\Lambda^2\rho_B)(\psi(x)).$$

Pour la forme bilinéaire invariante non dégénérée, il suffit de prendre pour $< ., . >$ la restriction à $\mathbf{F} \times \mathbf{F}^*$ du produit scalaire canonique défini sur $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$.
En définitive, $(B, m, G, \sigma, P_B, \alpha, \chi, < ., . >)$ est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local dont la bigèbre quasi-Lie tangente est bien celle de départ. ∎

**Corollaire 3.** *Soit* $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ *une bigèbre de quasi-Lie et soit* $(B, m, G, \sigma, P_B, \alpha, \chi, < ., . >)$ *le quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local correspondant décrit par le théorème précédent ; soit* $(D, G, B)$ *le groupe de Lie quasi-double local correspondant à* $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ *décrit par le théorème 2. Alors le champ de bivecteurs* $P_B$ *sur* $B$ *satisfait la relation*

$$L_{\rho_B(\xi)}P_B = -(\Lambda^2\rho_B)(\mu^t(\xi)), \qquad \forall \xi \in T_eG.$$

*Démonstration :* En effet, par définition

$$P_B(\Pi_B(d)) = (\Lambda^2 T_d\Pi_B)(P(d)), \qquad \forall d \in D.$$

D'après le théorème précédent, $P$ satisfait la relation

$$L_{X^L}P = [\Gamma(X)]^L, \forall X \in T_eD = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*,$$

où $X^L$ désigne le champ de vecteurs invariant à gauche sur $D$ associé à $X$ et $\Gamma(X) = (\gamma - \mu^t - \psi)(X)$.
Pour $X = \xi \in T_eG = (T_eB)^*$, prenant l'image directe par $\Pi_B$ des deux membres de la relation précédente sachant que $(\Pi_B)_*(\xi^L) = \rho_B(\xi)$, $\mu^t(\xi) \in \Lambda^2T_eG$, $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}$, et $\psi : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2\mathbf{F}^*$, on obtient la relation annoncée. ∎

**Remarques :**
a) Si $\alpha(a,b) = e, \forall a,b \in B$ et si le groupe de Lie $G$ est connexe, la relation énoncée dans le corollaire précédent traduit de manière équivalente le fait que $\sigma$ est une action de Poisson [16].
b) Dans [1, 4], le couple $(B, P_B)$ vérifiant la condition (3) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson et la relation énoncée dans le corollaire précédent, est appelé un $G-$espace quasi-Poisson, où $G$ est muni de sa structure de groupe de Lie quasi-Poisson induite par celle de $D$. Dans [1], une construction similaire du champ de bivecteurs $P_B$ est donnée sur l'ensemble $D/G$ des classes à gauche, et l'action de $G$ sur $D/G$ est une action à gauche ; d'où l'apparition de différences de signes par rapport à la nôtre, notamment dans l'expression de $P_B$ et de son carré par rapport au crochet de Schouten.

**Exemple 7.** *Tout groupe de Lie-Poisson $(G, P)$ est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson ; il suffit de considérer le groupe de Lie-Poisson dual $G^*$ avec lequel ils agissent l'un sur l'autre [16] et de prendre $\psi = 0$.*

**Exemple 8.** *Considérons la décomposition polaire du groupe de Lie réel $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices complexes $2 \times 2$ de déterminant $1$,*

$$SL(2,\mathbb{C}) = SU(2) \times SH(2).$$

*Soit*

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

*la base canonique de $sh(2)$, l'espace tangent à $SH(2)$ en l'identité, et*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*la base duale de $su(2)$ relativement à la forme bilinéaire invariante non dégénérée $< .,. >$ définie sur $su(2) \oplus sh(2)$ par*

$$< \xi, \xi' >= 0, \quad , < x, x' >= 0, \quad < \xi, x >= Im(trace(x\xi)),$$

*$\forall x, x' \in sh(2), \forall \xi, \xi' \in su(2)$.*
*Par rapport au crochet de Lie de $sl(2,\mathbb{C})$, nous avons les relations de commutation suivantes dans les deux bases*

$$[e_1, e_2] = -\sqrt{2}\varepsilon_3, \qquad [e_1, e_3] = \sqrt{2}\varepsilon_2, \qquad [e_2, e_3] = -\sqrt{2}\varepsilon_1$$

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \sqrt{2}\varepsilon_3, \qquad [\varepsilon_1, \varepsilon_3] = -\sqrt{2}\varepsilon_2, \qquad [\varepsilon_2, \varepsilon_3] = \sqrt{2}\varepsilon_1$$

$$[e_1, \varepsilon_2] = \sqrt{2}e_3, \qquad [e_1, \varepsilon_3] = -\sqrt{2}e_2, \qquad [e_2, \varepsilon_1] = -\sqrt{2}e_3,$$

$$[e_2, \varepsilon_3] = \sqrt{2}e_1, \qquad [e_3, \varepsilon_1] = \sqrt{2}e_2, \qquad [e_3, \varepsilon_2] = -\sqrt{2}e_1,$$

$$[e_i, \varepsilon_i] = 0, \qquad \forall i = 1, 2, 3.$$

*Pour tous $a, b \in SH(2)$ et tous $g \in SU(2)$, posons*

$$m(a,b) = \Pi_{SH(2)}(ab) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}}, \qquad \alpha(a,b) = \Pi_{SU(2)}(ab) = (ab)(ba^2b)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sigma(a,g) = \Pi_{SH(2)}(ag) = (g^{-1}a^2g)^{\frac{1}{2}}, \quad \chi(a,g) = \Pi_{SU(2)}(ag) = (ag)(g^{-1}a^2g)^{-\frac{1}{2}}.$$

*Considérons le champ de bivecteurs sur $SH(2)$ défini par*

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} e_i^{\lambda} \wedge \rho_{SH(2)}(\varepsilon_i),$$

*où $e_i^{\lambda}$ est le champ de vecteurs translaté à gauche (par rapport à la loi m) associé à $e_i$ et $\rho_{SH(2)}$ est l'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à $\sigma$, l'action de $SU(2)$ sur $SH(2)$. Alors $(SH(2), m, SU(2), \sigma, P, \alpha, \chi, < .,. >)$ est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson dont la bigèbre quasi-Lie tangente est $(sh(2), 0, \gamma, \psi)$, où $\gamma$ est le crochet de Lie sur $su(2)$ et $\psi$ la restriction du crochet de $sl(2,\mathbb{C})$ aux éléments de $sh(2)$. Le groupe de Lie quasi-Poisson dual est $(SU(2), 0, \psi)$.*

En effet, les conditions (1) et (2) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson sont évidentes, elles s'obtiennent par un calcul direct utilisant les définitions des différentes applications ; il est clair aussi que $P(e) = 0$ par définition de $P$, $e$ étant la matrice identité d'ordre 2. Par ailleurs, les calculs utilisant les relations de commutation entre les éléments des deux bases, montrent que

$$\frac{1}{2}[P,P]_S = -(\Lambda^3\rho_{SH(2)})(\psi) = 0,$$

où $\psi$ considéré comme élément de $\Lambda^3 su(2) \cong \Lambda^3(sh(2))^*$ est égal à $-\sqrt{2}(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)$ d'après les relations de commutation ; ce qui nous donne la condition (3) de la définition. Vérifions à présent la condition (4) ; en effet par un calcul direct utilisant les relations de commutation ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} L_{e_1^{\lambda}}P &= \sqrt{2}(e_2 \wedge e_3)^{\lambda} + \sqrt{2}(\Lambda^2\rho_{SH(2)})(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \\ &= [(L_{e_1^{\lambda}}P)(e)]^{\lambda} - (\Lambda^2\rho_{SH(2)})(\psi(e_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{e_2^{\lambda}}P &= -\sqrt{2}(e_1 \wedge e_3)^{\lambda} - \sqrt{2}(\Lambda^2\rho_{SH(2)})(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3) \\ &= [(L_{e_2^{\lambda}}P)(e)]^{\lambda} - (\Lambda^2\rho_{SH(2)})(\psi(e_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{e_3^{\lambda}}P &= \sqrt{2}(e_1 \wedge e_2)^{\lambda} + \sqrt{2}(\Lambda^2\rho_{SH(2)})(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) \\ &= [(L_{e_3^{\lambda}}P)(e)]^{\lambda} - (\Lambda^2\rho_{SH(2)})(\psi(e_3)). \end{aligned}$$

En définitive, $(SH(2), m, SU(2), \sigma, P, \alpha, \chi, < .,. >)$ est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson.

**Remarques :** Dans cet exemple, $P$ est Poisson mais n'est pas multiplicatif au sens de [16, 15, 13], car $\alpha(a,b)$ n'est pas la matrice identité d'ordre 2 pour tous $a, b \in SH(2)$ ; une telle structure définit un quasi-groupe de Lie-Poisson. Plus généralement, si $(\Lambda^3\rho_B)(\psi) = 0$ avec $\psi \neq 0$, on dit que $(B, m, G, \sigma, P_B, \alpha, \chi, < .,. >)$ est un quasi-groupe de Lie-Poisson.

La construction de la structure définie ci-dessus sur $SH(2)$ s'étend naturellement à $SH(n)$ pour $n \geq 3$.

**Remerciements :** L'auteur remercie sincèrement Y. Kosmann-Schwarzbach pour ses remarques et suggestions sur le contenu du travail. Les remerciements vont également à la Section Mathématiques de Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP, Trieste, Italie) pour l'hospitalité et le soutien financier, sans lesquels la réalisation du présent document n'aurait pas été possible. Enfin, l'auteur remercie le Réseau Africain de Géométrie et d'Algèbre Appliquées au Développement (RAGAAD) pour avoir financé son voyage à travers CIMPA/SARIMA.

## Références

[1] A. Alekseev and Y. Kosmann-Schwarzbach, *Manin pairs and moment maps*, J. Differential Geometry, 56 (2000) 133-165.

[2] R. Aminou et Y. Kosmann-Schwarzbach, *Bigèbres de Lie, doubles et carrés*, Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49 (4), (1988), 461-478.

[3] M. Bangoura and Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. Math. Physics, 28 (1993) 13-29.

[4] H. Bursztyn and M. Crainic, *Quasi-Poisson theory via Dirac geometry*, Lecture given at the Summer School and Conference on Poisson Geometry, ICTP, Trieste, Italy (2005).

[5] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet. Math. Dokl. 27 (1983), 68-71.

[6] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. 1 (6) (1990), 1419-1457.

[7] J.-P. Dufour, *Introduction aux tissus*, séminaire GETODIM, Université de Montpellier, 1990-1991, 55-76.

[8] R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[9] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[10] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Second Edition, Progress in Mathematics, Volume 140, Birkhäuser, 2002.

[11] J.-L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série (1985), 257-271.

[12] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Quasi-bigèbres de Lie et groupes de Lie quasi-Poisson*, Compte rendus Acad. Sci. Paris, Série I, 312 (1991), 391-394.

[13] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, in M. Gotay, J. E. Marsden, and V. Moncrief (eds), Mathematical Aspects of Field Theory (Proc. Seattle 1991), Contemporary Mathematics 132, Amer. Math. Soc. Providence, 1992, 459-489.

[14] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, *Poisson Lie groups and complete integrability I, Drinfeld bialgebras, dual extensions and their canonical representation*, Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49 (4) (1988), 433-460.

[15] J.-H. Lu, *Multiplicative and affine Poison structures on Lie Groups*, Ph. D. Thesis, Univ. Calif. Berkeley, 1990.

[16] J.-H. Lu and A. Weinstein, *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat décompositions*, J. Diff. Geometry, 31 (1990) , 501-526.

[17] S. Majid, *Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equation*, Pacific J. Math., 141 (1990), No 2, 311-332.

[18] L. V. Sabinin, *Smooth quasi-groups and loops*, Mathematics and Its Applications, Volume 492, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1999.

[19] L. V. Sabinin and P. O. Mikhéev, *On the infinitesimal theory of local analytic loops*, Soviet. Math. Dokl. 36 (1988), 545-548.

[20] L. V. Sabinin and P. O. Mikhéev, *Quasigroups and differential geometry*, in Quasigroups and loops. Theory and applications, O. Chen, H. O. Pflugfelder, J. D. Smith (eds), Heldermann Verlag, Berlin, 1990, Chap. 12.

[21] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geometry 18 (1983), 523-557.

Département de Mathématiques, Université de Conakry,
BP 1147, République de Guinée
email :bangm59@yahoo.fr, angoura@gn.refer.org