

Dimension fractale d'attracteurs : cas du modèle de Hogg-Huberman

Nourredine Akroune

Danièle Fournier-Prunaret

Abstract

In this work, we deal with the fractal dimension D of a chaotic attractor which is generated by a bidimensional endomorphism (the Hogg-Huberman model). Using a modified box-counting method, we study the numerical behavior of D with respect to the number n of points of the considered set. One establishes an important relation $D=D(n)$ which is valid for other dynamical systems.

Abridged English version

Introduction

The fractal dimension D is among the characteristic properties of a chaotic attractor ([3]). In this context, we consider a typical bidimensional endomorphism (the Hogg-Huberman model [12]) given by the relation (1). The discrete dynamical system generated by this map presents a great complexity in its behavior. When parameters are varied, the limit sets of this system can consist of fixed points, periodic cycles of any period, closed continuous curves or chaotic attractors. We are interested in one of the last type, denoted by E (see *Fig. 1*).

Received by the editors November 2006.

Communicated by A. Bultheel.

2000 *Mathematics Subject Classification* : 37Exx, 37D45, 37L30, 28A80.

Key words and phrases : Dynamical system, Chaotic attractor, Fractal dimension.

The numerical determination of D

N. Akroune proposed in ([11]) a modified box-counting method to evaluate the fractal dimension D of any subset in the plane. Note that this modified method performs the numerical estimation of D using only one test on the points of E . Both sets of points given by the classical log – log plots ([6]) lie on a straight line with a high accuracy (*Fig. 2*).

The relation between D and $(n = \text{card}(E))$

The main purpose of this note is to study the variation of D related to the number n of points of the set E . Applying the already mentioned method, we obtained the points $(n, d_{\text{cap}}(n))$ for the capacity dimension and the points $(n, d_{\text{inf}}(n))$ for the information dimension. The associated fitting functions are then proposed and illustrated in (*Fig. 3* and *Fig. 4*). Their common expression is given by the equality (2).

It is noteworthy that many numerical experiments suggest that this equation is also valid for other models (*e.g.* the double logistic map [1]).

1 Introduction

La dimension fractale est l'une des principales caractéristiques d'un attracteur chaotique ([3], [6]). Ce travail est consacré au calcul numérique de la dimension fractale D d'attracteurs engendrés par des systèmes dynamiques discrets ([5], [4]). On s'intéresse notamment à la variation de la valeur calculée de D en fonction du nombre de points pris sur l'attracteur considéré.

Les systèmes dynamiques en question sont modélisés par des transformations ponctuelles bidimensionnelles non inversibles. Les attracteurs de ces systèmes peuvent être de différents types : points fixes, cycles, courbes fermées continues, chaotiques, ... etc. Des transformations ponctuelles (dépendant d'un ou plusieurs paramètres) qui donnent lieu à un comportement chaotique (via des structures de bifurcations successives), sont rencontrées dans divers domaines des sciences et techniques. Citons, à titre d'exemple, les travaux de Mira ([7]), Gardini et al ([1]) ainsi que Lopez-Ruiz et Perez-Garcia ([2]). Dans les télécommunications et traitement du signal, des transformations continues mais non différentiables ont aussi attiré l'attention de nombreux auteurs ([10], [8], [9]).

Dans ce qui suit, un attracteur de type chaotique, lié au modèle dit de "Hogg-Huberman" ([12]), est étudié du point de vue du calcul numérique de sa dimension fractale ([3]), en particulier de sa dimension de *capacité* (d_{cap}) ainsi que celle d'*information* (d_{inf}). Notons qu'il a été proposé dans ([11]), un procédé efficace de calcul numérique des dimensions (d_{cap} et d_{inf}) d'un sous-ensemble quelconque E du plan par la méthode des boîtes (ou "*box-counting*") dans lequel un seul et unique test est effectué sur les points dudit ensemble. A l'aide de cette variante, la dimension fractale D de l'attracteur de Hogg-Huberman est calculée, avec présentation des diagrammes logarithmiques obtenus. Des fonctions d'ajustement adaptées à l'allure des nuages $(n, D(n))$, où $n = \text{card}(E)$, sont proposées.

2 Le modèle de Hogg-Huberman

Hogg et Huberman ([12]) ont proposé et étudié un modèle $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, formé de deux applications non linéaires couplées et dépendant de deux paramètres. La transformation T est définie par

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ &= (a \cdot x \cdot (1 - x) + b \cdot (y - x), a \cdot y \cdot (1 - y) + b \cdot (x - y)) \end{aligned} \quad (1)$$

où les paramètres réels a et b sont pris tels que: $0 \leq a \leq 4$ et $0 \leq b \leq 1$.

Si le paramètre de couplage b est nul, les applications f_1 et f_2 sont toutes deux du genre "logistique"; de plus, il est clair que la droite ($x = y$) est invariante par T pour tout a et b .

Quand ces deux paramètres varient, le système dynamique engendré par T présente des comportements asymptotiques variés. On peut en effet observer des ensembles-limites du type : point fixe, cycles de différentes périodes, courbes fermées continues ainsi que des attracteurs chaotiques ([6]). On va considérer ci-après un cas relatif à ce dernier type.

Pour $(a, b) = (3.615, 0.06)$ et partant du point de départ ($x_0 = 0.7, y_0 = 0.9$), la suite des itérés $(x_{k+1}, y_{k+1}) = T(x_k, y_k)$ où $k \in \mathbb{N}$, converge vers un attracteur chaotique (noté E). Celui-ci est composé de quatre parties similaires et symétriques par rapport à la première bissectrice. Pour plus de clarté, seule l'une d'entre elles, formée de (10000) points, est dessinée en *Fig.1*

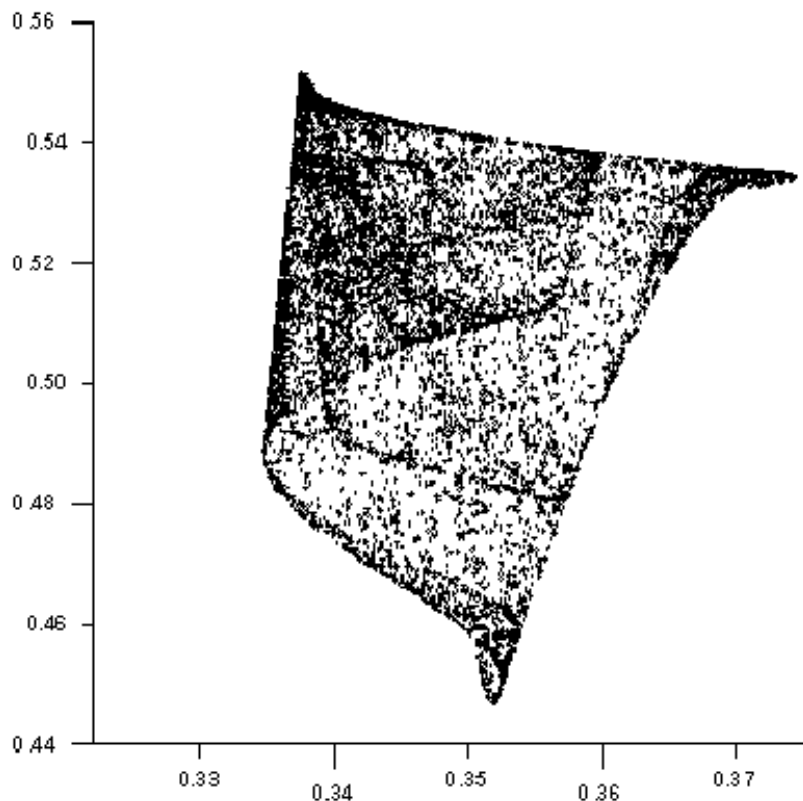


Figure 1: L'attracteur chaotique de T pour $(a, b) = (3.615, 0.06)$

3 Dimension fractale de l'attracteur chaotique E

La valeur numérique de d_{cap} (donnée par la variante citée plus haut) atteint une valeur constante lorsque ($card(E) \geq 4 \times 10^5$). En prenant 4×10^5 points sur E, on obtient (voir *Fig.2*) les diagrammes logarithmiques relatifs au calcul des deux dimensions (d_{cap} et d_{inf}). Chacun d'eux approche une droite avec une grande précision, et les pentes respectives sont $d_{cap} \approx 1.702$ et $d_{inf} \approx 1.658$.

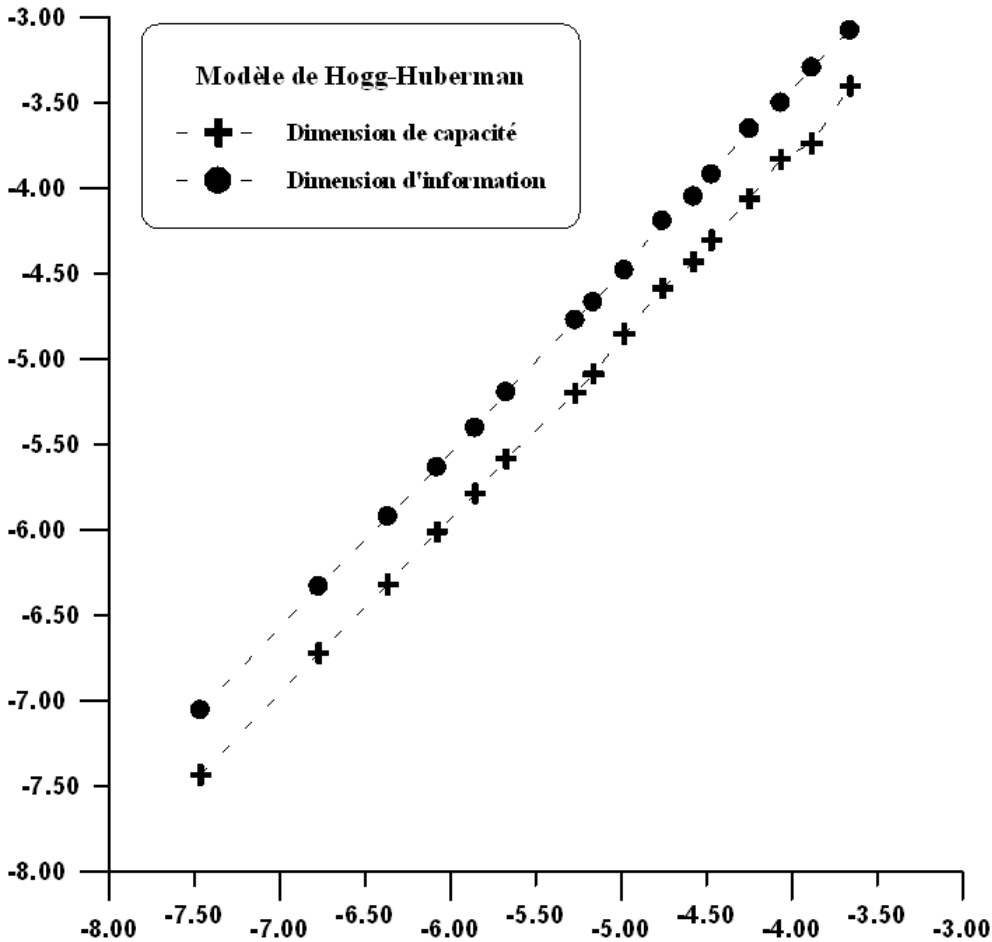


Figure 2: Les diagrammes logarithmiques de d_{cap} et d_{inf} .

Afin d'étudier la variation de ces dimensions en fonction du nombre n de points sur l'attracteur E, on a procédé au calcul des valeurs $d_{cap}(n)$ en faisant varier n de 10^4 à (4×10^5) par incrément de 10^4 . Le nuage de points $(n, d_{cap}(n))$ est présenté en (*Fig. 3*). La figure suivante (*Fig. 4*) concerne les valeurs numériques $(n, d_{inf}(n))$ obtenues pour la dimension d'information.

On remarque sur la (*Fig. 3*) que la valeur numérique de d_{cap} augmente avec n jusqu'à se stabiliser à partir de la valeur (4×10^5) , et la valeur limite est, comme indiqué plus haut, égale à 1.702. Par contre, on ne parle pas dans les valeurs de la

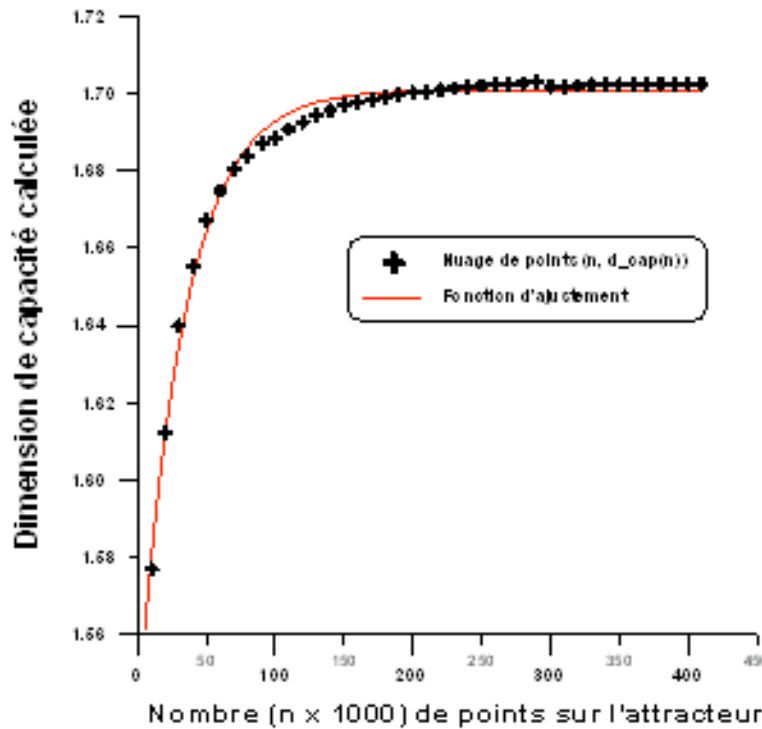


Figure 3: Les points $(n, d_{cap}(n))$ et la fonction d'ajustement f .

dimension d'information (*Fig. 4*) une tendance nette vers une limite, mais de très petites oscillations autour de celle-ci.

La fonction d'ajustement $y = f(x)$ adaptée à chacun des deux nuages de points $(n, d_{cap}(n))$ et $(n, d_{inf}(n))$ est de la même forme, c'est la suivante:

$$f(x) = \alpha + \beta \cdot (1 - \exp(-x/t_1)) + \gamma \cdot (1 - \exp(-x/t_2)) \quad (2)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, et on a bien $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha + \beta + \gamma$.

La courbe correspondante de f est tracée en même temps sur la (*Fig. 3*). On reporte dans le tableau ci-dessous les valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma, t_1$ et t_2 , ainsi que les valeurs du coefficient de détermination (r^2) et celle de la somme des carrés des résidus (SCR) se rapportant aux deux ajustements effectués.

Paramètre	Dimension de Capacité	Dimension d'Information
α	0.94666	0.10671
β	0.16255	0.0895
t_1	33.46721	29.82986
γ	0.59193	1.46003
t_2	0.02753	0.01079
—	—	—
r^2	99.29 %	96.98 %
SCR	1.91×10^{-4}	2.22×10^{-4}

Il est important de souligner que des expérimentations numériques similaires, concernant les attracteurs chaotiques du système dynamique engendré par la transformation double logistique (étudiée dans [1]), ont permis de relever que la dimension

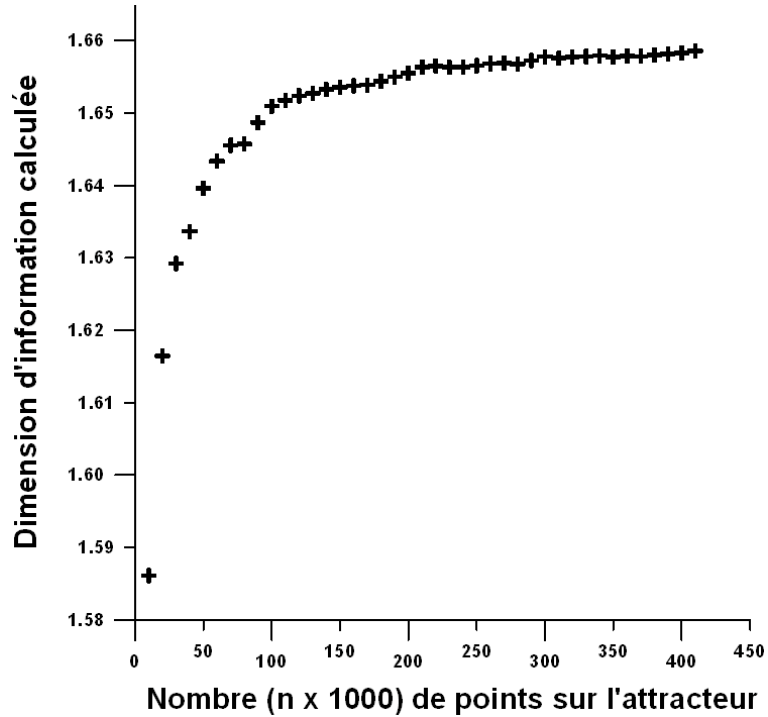


Figure 4: Le nuage de points $(n, d_{\text{inf}}(n))$ relatif à la dimension d_{inf} .

de capacité ($d_{\text{cap}} = d_{\text{cap}}(n)$) obéit à la même règle que celle donnée par la fonction f ci-dessus (expression (2)).

4 Conclusion

Le calcul numérique des dimensions de capacité et d'information à l'aide d'une variante de la méthode des boîtes a été effectué sur un attracteur chaotique issu du modèle de Hogg-Huberman. En augmentant le nombre n de points sur cet ensemble, il ressort que la valeur estimée de la dimension de capacité d_{cap} tend vers une valeur limite. Cette observation est un atout majeur de la variante utilisée, et est vérifiée pour d'autres modèles rencontrés dans la littérature.

References

- [1] L. GARDINI, R. ABRAHAM, R. RECORD, D. FOURNIER-PRUNARET, A double logistic map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 4, N° 1 (1994) 145-176
- [2] R. LOPEZ-RUIZ, C. PEREZ-GARCIA, Dynamics of maps with a global multiplicative coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 1, Issue 6, (1991) 511-528
- [3] J. D. FARMER, E. OTT, J. A. YORKE, The dimension of chaotic attractors. *Physica 7 D*, (1983) 153-180

- [4] I. GUMOWSKI, C. MIRA, Dynamique chaotique. Ed. Cépadues, Toulouse (1980)
- [5] P. COLLET, J. P. ECKMANN, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Birkhäuser Verlag, Elmsford, New York (1980)
- [6] C. TRICOT, Courbes et dimension fractale. 2^{ème} éd., Springer-Verlag, Berlin (1999)
- [7] C. MIRA, About two-dimensional piecewise continuous noninvertible maps. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, N° 5 (1996) 893-918
- [8] D. FOURNIER-PRUNARET, O. FEELY, I. TARALOVA-ROUX, Lowpass Sigma-Delta Modulation : an analysis by means of the critical lines tool. Non-linear Analysis, Vol. 47 (2001) 5343-5355
- [9] O. FEELY, D. FOURNIER-PRUNARET, I. TARALOVA-ROUX, Nonlinear dynamics of bandpass Sigma-Delta Modulation - an investigation by means of the critical lines tool. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 10, N° 2 (2000) 307-323
- [10] I. TARALOVA-ROUX, D. FOURNIER-PRUNARET, Dynamical study of a second-order DPCM transmission system modeled by a piecewise-linear function. IEEE Transactions on Circuits and Systems (Fundamental Theory and Applications) Vol. 49 , N° 11 (2002) 1592-1609
- [11] N. AKROUNE, Sur une variante de la méthode des boîtes pour la détermination numérique de la dimension fractale d'un sous-ensemble du plan. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Vol. 338, N° 11 (2004) 899-904
- [12] T. HOGG, B. A. HUBERMAN, Generic behavior of coupled oscillators. Phys. Rev. A, Vol. 29, N° 1 (1984) 275-281

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Université de Béjaïa 06000 - Algérie
E-Mail : akroune_n@yahoo.fr

INSA
Département de Génie Electrique et Informatique
135 avenue de Rangueil
31077 Toulouse cedex 4 - France
E-Mail : Daniele.Fournier@insa-toulouse.fr