# Une note sur les formes quadratiques voisines en caractéristique 2

Ahmed Laghribi    Pasquale Mammone*

**Abstract**

The aim of this note is to discuss in characteristic 2 some conditions under which an anisotropic quadratic form is a Pfister neighbor when its anisotropic part over its own function field is defined over the base field. In this sense, we give a result which reduces the situation to the characterization of Pfister neighbors having a 2-dimensional nonsingular part.

## 1 Introduction

Soit $F$ un corps commutatif. Pour une forme quadratique $\varphi$ sur $F$, on note $\dim\varphi$ sa dimension et $F(\varphi)$ son corps de fonctions. En théorie des corps de fonctions, une classe importante des formes quadratiques est celle des formes voisines de Pfister. Rappelons qu'en caractéristique $\neq 2$, une forme quadratique $\varphi$ est dite voisine d'une forme de Pfister $\pi$ lorsque $2\dim\varphi > \dim\pi$ et $a\varphi$ est une sous-forme de $\pi$ pour un certain scalaire $a \in F^*$ (i.e., $\pi \simeq a\varphi \perp \psi$ pour une certaine forme quadratique $\psi$, où $\simeq$ et $\perp$ désignent l'isométrie et la somme orthogonale des formes quadratiques). En caractéristique 2, cette définition se modifie légèrement en remplaçant la relation de sous-forme par la relation de domination (voir section 2 pour la définition de la relation de domination). Un résultat classique et important sur les formes quadratiques voisines en caractéristique $\neq 2$ est dû à Knebusch et Hoffmann [5,

*Les auteurs ont été soutenus par le projet Européen HPRN-CT-2002-00287 "Algebraic $K$-Theory, Linear Algebraic Groups and Related Structures".

Received by the editors October 2005.

Communicated by M. Van den Bergh.

2000 *Mathematics Subject Classification :* 11E04, 11E81.

*Key words and phrases :* Formes quadratiques, Formes de Pfister, Voisines de Pfister, Corps de fonctions d'une forme quadratique.

Th. 7.13], [2, Prop. 3]. Il affirme qu'une forme quadratique $\varphi$ anisotrope est voisine d'une forme de Pfister si et seulement si la partie anisotrope $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur $F$, i.e., $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \psi_{F(\varphi)}$ pour une certaine forme quadratique $\psi$ définie $F$. Ce résultat ne se généralise pas complètement à la caractéristique 2. Par exemple, une forme quadratique $\varphi$ anisotrope et totalement singulière (i.e., $\varphi$ coincide avec sa partie quasi-linéaire $\mathrm{ql}(\varphi)$ ; voir section 2) n'est jamais une voisine de Pfister [6, Prop. 3.1], mais la forme $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est toujours définie sur $F$ [8, Lem. 2.1]. Dans [7, Prop. 5.12], [3, Exam. 6.4], on a construit d'autres exemples de formes quadratiques $\varphi$ anisotropes non voisines dont la forme $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur $F$.

La particularité de tous les exemples donnés est qu'ils utilisent des formes quadratiques $\varphi$ qui satisfont à la condition $\dim\varphi \leq 2\dim\mathrm{ql}(\varphi)$. A ce propos, le premier auteur et Hoffmann conjecturent ce qui suit :

**Conjecture 1.** *([3, Conj. 6.5]) Une forme quadratique anisotrope $\varphi$ est une voisine de Pfister dès que* $\dim\varphi > 2\dim\mathrm{ql}(\varphi)$ *et* $(\varphi_{F(\varphi)})_{an}$ *est définie sur $F$.*

Ils ont prouvé cette conjecture lorsque $\dim\mathrm{ql}(\varphi) \leq 4$ ou $\mathrm{ql}(\varphi)$ est une quasi-voisine de Pfister de dimension 5 [3, Th. 6.6].

*Pour la suite de cette note, on suppose que $F$ est de caractéristique* 2.

Mise à part la condition $\dim\varphi > 2\dim\mathrm{ql}(\varphi)$ évoquée dans la conjecture 1, on ne connat pas d'autres conditions qui permettent de dire qu'une forme anisotrope $\varphi$ est une voisine de Pfister dès que $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur $F$. De plus, on n'a pas d'informations sur le cas $\dim\varphi \leq 2\dim\mathrm{ql}(\varphi)$ où certaines formes $\varphi$ le vérifiant pourraient être des voisines de Pfister dès que $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur $F$ (voir la proposition 1 et le corollaire 1). La question suivante se pose alors :

**Question 1.** *Soit $\varphi$ une forme quadratique anisotrope non totalement singulière. On suppose que $(\varphi_{F(\varphi)})_{an}$ est définie sur $F$. Sous quelles conditions la forme $\varphi$ est-elle une voisine de Pfister ?*

Le but de cette note est de traiter cette question d'un point de vue indépendant de la conjecture 1. Plus précisément, pour $\varphi$ comme dans la question 1 et si on pose $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \psi_{F(\varphi)}$ pour une certaine forme $\psi$ définie sur $F$, on va montrer que $\varphi$ est une voisine de Pfister si et seulement si il en est de même pour une forme quadratique qui provient de $\varphi$ et $\psi$. Voici le théorème qu'on va prouver :

**Théorème 1.** *Soit $\varphi$ une forme quadratique anisotrope non totalement singulière telle que $(\varphi_{F(\varphi)})_{an} \simeq \psi_{F(\varphi)}$ pour une certaine forme quadratique $\psi$ définie sur $F$. Posons $\varphi = \mu \perp \mathrm{ql}(\varphi)$, $\psi = \nu \perp \mathrm{ql}(\psi)$ avec $\mu$ et $\nu$ des formes non singulières de dimensions respectives $2r$ et $2k$. Soit $s = \dim\mathrm{ql}(\varphi)$ et $s' = \dim\mathrm{ql}(\psi)$. On a :*
**(1)** *$s = s'$, et si $\varphi$ est voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister, alors nécessairement* $\dim\varphi > 2^n = r + s + k$.
**(2)** *Supposons* $\dim\varphi > 2^n = r + s + k$ *pour un certain entier $n \geq 1$. Alors, on a les assertions suivantes :*
**(a)** *$\varphi \perp \nu$ est anisotrope.*
**(b)** *$\varphi$ est isotrope sur $F(\varphi \perp \nu)$.*
**(c)** *$((\varphi \perp \nu)_{F(\varphi\perp\nu)})_{an} \simeq \mathrm{ql}(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi\perp\nu)}$ $(\simeq \mathrm{ql}(\varphi)_{F(\varphi\perp\nu)})$.*
**(d)** *Soit $\varphi'$ une forme quadratique dominée par $\varphi \perp \nu$ telle que* $\dim\varphi' \geq r+k+s+1$.

*Alors, $\varphi$ est voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister $\pi$ si et seulement si $\varphi'$ est voisine de $\pi$. En particulier, $\varphi$ est une voisine de Pfister si et seulement si $\varphi \perp \nu$ est aussi une voisine de Pfister.*

Pour prouver ce résultat on se basera sur le théorème "des dimensions séparées par une puissance de 2" qui a été prouvé récemment par le premier auteur et Hoffmann [4, Th. 1.1]. Le théorème 1 permet d'avoir deux conséquences. D'une part, on réduit la question 1 à la question 2 (voir section 3) qui consiste à caractériser les voisines de Pfister $\varphi$ telles que $\dim\varphi = \dim \mathrm{ql}(\varphi)+2$ et $\dim \mathrm{ql}(\varphi)+1$ est une puissance de 2. D'autre part, en combinant la conjecture 1 et l'assertion (c) du théorème 1, on obtient la proposition suivante qui donne des conditions sous lesquelles des formes quadratiques $\varphi$ anisotropes vérifiant $\dim\varphi \leq 2\dim \mathrm{ql}(\varphi)$ deviennent des voisines de Pfister dès que la forme $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur $F$. De manière plus précise, on obtient :

**Proposition 1.** *Soit $\varphi$ une forme quadratique anisotrope non totalement singulière telle que $(\varphi_{F(\varphi)})_{an} \simeq \psi_{F(\varphi)}$ pour une certaine forme quadratique $\psi$ définie sur $F$. Posons $s = \dim \mathrm{ql}(\varphi)$, $\dim\varphi = 2r + s$ et $\dim\psi = 2k + s$. Supposons qu'on ait les trois conditions suivantes :*
**(1)** *$r + s + k = 2^n$ pour un certain entier $n \geq 1$.*
**(2)** $\dim\varphi > 2^n$.
**(3)** $\dim\varphi + 2k > 2\dim \mathrm{ql}(\varphi)$.
*Si la conjecture 1 est vraie pour les formes de dimension $\dim\varphi + 2k$ et de partie quasi-linéaire de dimension $\dim \mathrm{ql}(\varphi)$, alors $\varphi$ est une voisine de Pfister.*

Voici un cas non conjectural et non connu auparavant d'une forme $\varphi$ vérifiant $\dim\varphi \leq 2\dim \mathrm{ql}(\varphi)$ où cette proposition s'applique :

**Corollaire 1.** *Soit $\varphi$ une forme quadratique anisotrope de dimension 9 telle que $\mathrm{ql}(\varphi)$ soit une quasi-voisine de Pfister de dimension 5 et que $(\varphi_{F(\varphi)})_{an}$ soit définie sur $F$. Alors, $\varphi$ est une voisine de Pfister.*

## 2 Preuves

On suppose le lecteur familier avec la théorie des corps de fonctions des formes quadratiques en caractéristique 2. Pour plus de détails sur certaines notions utilisées, on renvoie aux articles [3], [4], [6]. Rappelons tout de même qu'une forme quadratique est dite non singulière (*resp.* totalement singulière) si elle est isométrique à une somme orthogonale de formes quadratiques de type $[a,b] := ax^2+xy+by^2$ (*resp.* de formes quadratiques de type $[a] := ax^2$). Pour toute forme quadratique $\varphi$, on a une décomposition $\varphi \simeq R \perp S$ où $R$ est non singulière et $S$ est totalement singulière. La forme $S$ est unique à isométrie près, on la note $\mathrm{ql}(\varphi)$ et on l'appelle la partie quasi-linéaire de $\varphi$. Pour toute forme quadratique $\varphi$ non totalement singulière, on note $i_W(\varphi)$ son indice de Witt. Deux formes quadratiques $\varphi$ et $\psi$ sont dites équivalentes, et on note $\varphi \sim \psi$, s'il existe des entiers $m, n \geq 0$ tels que $\varphi \perp m\times[0,0] \simeq \psi \perp n\times[0,0]$. On dit qu'une forme quadratique $(V,\varphi)$ domine une autre forme $(W,\psi)$, et on note $\psi \prec \varphi$, s'il existe une application $F$-linéaire injective $\sigma : W \longrightarrow V$ telle que : $\varphi(\sigma(w)) = \psi(w)$ pour tout $w \in W$. Une description équivalente de la relation de domination est donnée dans [3, Lem. 3.1]. Une $(n+1)$-forme de Pfister est une forme isométrique à $B \otimes [1,a]$ pour certains $a \in F$ et $B$ une $n$-forme bilinéaire de Pfister, où $\otimes$ désigne l'action de module de l'anneau de Witt des formes bilinéaires symétriques sur le groupe de Witt des formes quadratiques non singulières [1]. Une 1-forme de Pfister est une forme de type $[1,a]$. Rappelons qu'une forme de Pfister isotrope est hyperbolique, et que si $\varphi$ est voisine d'une forme de Pfister $\pi$, alors $\pi$ est unique et que $\varphi$ est isotrope si et seulement si $\pi$ est isotrope.

### 2.1 Preuve du théorème 1

On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème. Par unicité de la partie quasi-linéaire, on a $\mathrm{ql}(\varphi)_{F(\varphi)} \simeq \mathrm{ql}(\psi)_{F(\varphi)}$, et donc on peut supposer que $\mathrm{ql}(\varphi) \simeq \mathrm{ql}(\psi)$. En particulier, $s = s'$. Pour la suite de la preuve, on pose $\mathrm{ql}(\varphi) = \zeta$.

**(1)** Supposons que $\varphi$ soit voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister. Alors, $\dim \varphi > 2^n$. On sait que la forme complémentaire $\varphi^c$ de $\varphi$ vérifie $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \varphi^c_{F(\varphi)}$ et $\dim \varphi + \dim \varphi^c = 2^{n+1}$ [3, Section 6]. Ainsi, $\dim \varphi^c = \dim \psi$ et donc $2r + 2s + 2k = 2^{n+1}$. D'où, $\dim \varphi > 2^n = r + s + k$.

**(2)** Supposons $r + s + k = 2^n$ et $\dim \varphi > 2^n$ pour un certain entier $n \geq 1$.

**(a)** Supposons que $\varphi \perp \nu$ soit isotrope. Ainsi,

$$\varphi \perp \nu \simeq \delta \perp l \times [0,0] \perp \zeta \tag{1}$$

avec $l \geq 1$, $\delta$ une forme non singulière, et $\delta \perp \zeta$ anisotrope. La condition $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \psi_{F(\varphi)}$ implique que $i_W(\varphi_{F(\varphi)}) = r - k$. Puisque $\nu \perp \nu \simeq 2k \times [0,0]$, on déduit

$$(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi)} \simeq (r + k) \times [0,0] \perp \zeta_{F(\varphi)} \tag{2}$$

Les isométries (1) et (2), et la simplification de Witt impliquent

$$(\delta \perp \zeta)_{F(\varphi)} \simeq (r + k - l) \times [0,0] \perp \zeta_{F(\varphi)} \tag{3}$$

et donc $i := i_W((\delta \perp \zeta)_{F(\varphi)}) = r + k - l$. Soit $\gamma$ une forme dominée par $\delta \perp \zeta$, de dimension $\dim(\delta \perp \zeta) - i + 1 = r + k + s - l + 1$. On sait que $\gamma_{F(\varphi)}$ est isotrope [4, Lem. 2.11]. Puisque $l \geq 1$, on a $\dim \gamma \leq r + k + s = 2^n < \dim \varphi$, et donc $\gamma_{F(\varphi)}$ est anisotrope par [4, Th. 1.1], une contradiction.

**(b)** Supposons que $\varphi$ soit anisotrope sur $F(\varphi \perp \nu)$. Puisque $\varphi \perp \nu$ est isotrope sur $F(\varphi)$, l'extension $F(\varphi)(\varphi \perp \nu)/F(\varphi)$ est transcendante pure [6, Cor. 3.4]. Ainsi,

$$\left(\varphi_{F(\varphi)(\varphi\perp\nu)}\right)_{\mathrm{an}} \simeq \psi_{F(\varphi)(\varphi\perp\nu)} \tag{4}$$

Comme $F(\varphi)(\varphi \perp \nu) = F(\varphi \perp \nu)(\varphi)$ et $\dim \varphi > 2^n = r + s + k$, on applique l'assertion (a) sur le corps $F(\varphi \perp \nu)$ pour avoir l'anisotropie de $(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi)(\varphi\perp\nu)}$, une contradiction.

**(c)** On a $\mathrm{ql}(\varphi \perp \nu) \simeq \zeta$. De la condition $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \psi_{F(\varphi)}$, on déduit que $(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi)} \sim \zeta_{F(\varphi)}$. Puisque $\varphi_{F(\varphi\perp\nu)}$ est isotrope, l'extension $F(\varphi \perp \nu)(\varphi)/F(\varphi \perp \nu)$ est transcendante pure. Ainsi, $(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi\perp\nu)} \sim \zeta_{F(\varphi\perp\nu)}$. Comme $\zeta_{F(\varphi\perp\nu)}$ est anisotrope [6, Cor. 3.3], on a $((\varphi \perp \nu)_{F(\varphi\perp\nu)})_{\mathrm{an}} \simeq \zeta_{F(\varphi\perp\nu)}$.

**(d)** Soit $\varphi'$ une forme quadratique dominée par $\varphi \perp \nu$, de dimension $\geq r + k + s + 1$. D'une part, on a que $\varphi_{F(\varphi')}$ est isotrope puisque $\varphi_{F(\varphi\perp\nu)}$ est aussi isotrope et

$\varphi' \prec \varphi \perp \nu$. D'autre part, puisque $(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi)} \simeq (r+k) \times [0,0] \perp \zeta_{F(\varphi)}$ (par (2)), on déduit que toute forme dominée par $\varphi \perp \nu$ de dimension $\geq \dim(\varphi \perp \nu) - (r+k) + 1 = r+k+s+1$ est isotrope sur $F(\varphi)$ [4, Lem. 2.11]. En particulier, $\varphi'_{F(\varphi)}$ est isotrope. Puisque $\dim \varphi > 2^n$ et $\dim \varphi' \geq r+k+s+1 > 2^n$, on déduit de [6, Prop. 3.1] que $\varphi$ est voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister $\pi$ si et seulement si $\varphi'$ est voisine de $\pi$.

### 2.2 Preuve de la proposition 1

Soit $\varphi$ une forme quadratique anisotrope non totalement singulière telle que $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \psi_{F(\varphi)}$ pour une certaine forme $\psi$ définie sur $F$. Posons $\dim \mathrm{ql}(\varphi) = s$, $\dim \varphi = 2r + s$ et $\psi = \nu \perp \mathrm{ql}(\psi)$ avec $\dim \nu = 2k$. Puisque $2^n = r + k + s$ pour un certain entier $n \geq 1$, et $\dim \varphi > 2^n$, on obtient par le théorème 1 que $\varphi \perp \nu$ est anisotrope et $((\varphi \perp \nu)_{F(\varphi \perp \nu)})_{\mathrm{an}} \simeq \mathrm{ql}(\varphi \perp \nu)_{F(\varphi \perp \nu)}$. Puisque $\dim(\varphi \perp \nu) > 2 \dim \mathrm{ql}(\varphi) = 2 \dim \mathrm{ql}(\varphi \perp \nu)$, la conjecture 1 implique que $\varphi$ est une voisine de Pfister.

### 2.3 Preuve du corollaire 1

La conjecture 1 est vraie pour les formes quadratiques dont la partie quasi-linéaire est une quasi-voisine de Pfister de dimension 5. Pour $\varphi$ comme dans le corollaire, on a nécessairement $\dim(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} = 7$ [4, Lem. 4.1]. Ainsi, on peut bien appliquer la proposition 1 avec $r = 2$, $k = 1$, $s = 5$ et $n = 3$.

## 3 Une question

L'assertion (d) du théorème 1 ramène la question 1 à celle qui consiste à savoir si une forme quelconque $\varphi'$ dominée par $\varphi \perp \nu$, de dimension $\geq r+k+s+1$ est une voisine de Pfister. En particulier, il suffit de considérer une forme $\varphi'$ dominée par $\varphi \perp \nu$, de dimension $r+k+s+1$ et de partie quasi-linéaire de dimension maximale. Alors, une telle forme $\varphi'$ vérifie $\dim \varphi' = \dim \mathrm{ql}(\varphi') + 2 = 2^n + 1$ puisque l'assertion (d) utilise l'hypothèse $r + k + s = 2^n$. Voici donc la question à laquelle on se réduit :

**Question 2.** *Soit $\varphi$ une forme quadratique anisotrope. On suppose qu'on a* $\dim \varphi = \dim \mathrm{ql}(\varphi) + 2 = 2^n + 1$ *pour un certain entier* $n \geq 1$. *Sous quelles conditions $\varphi$ est-elle une voisine de Pfister ?*

Concernant cette question, il n'y a pas de conditions à donner lorsque $n = 1$ puisque toute forme de dimension 3 non totalement singulière est une voisine de Pfister. Pour le cas $n = 2$, une réponse est donnée dans [6, Prop. 3.2]. Par contre, on n'a pas de réponse pour $n \geq 3$.

## Références

[1] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings,* Lect. Notes Math. vol. **655**, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1978.

[2] D. W. Hoffmann, *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric*, Math. Z. **220** (1995), 461–476.

[3] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic* 2*.* Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4019-4053.

[4] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic* 2. J. Algebra **295** (2006), 362–386.

[5] M. Knebusch, *Generic splitting of quadratic forms II,* Proc. London Math. Soc. **34** (1977), 1–31.

[6] A. Laghribi, *Certaines formes quadratiques de dimension au plus* 6 *et corps des fonctions en caractéristique* 2*,* Israel J. Math. **129** (2002), 317-361.

[7] A. Laghribi, *On the generic splitting of quadratic forms in characteristic* 2*,* Math. Z. **240** (2002), 711-730.

[8] A. Laghribi, *On splitting of totally singular quadratic forms,* Rend. Circ. Mat. Palermo. **53** (2004), 325-336.

Laboratoire de Mathématiques de Lens, EA 2462
Faculté des Sciences Jean Perrin,
rue Jean Souvraz SP-18,
F-62307 Lens, France
laghribi, mammone@euler.univ-artois.fr