Régularité d'une algèbre m-convexe à poids

A. El Kinani

Résumé

We prove that the space $L^p_\Omega(R^n)$, where $\Omega = \left\{\left(1+\|x\|^2\right)^s : s > \frac{n(p-1)}{2}\right\}$ and $p \in]1,+\infty[$, is a regular locally m-convex algebra. Others results are also obtained.

1 Préliminaires et introduction

Une algèbre localement multiplicativement convexe (*a.l.m.c.* en abrégé) est une algèbre localement convexe (E, τ) dont la topologie τ est définie par une famille $(|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$de semi-normes sous-multiplicatives ([1] et [5]). Pour $\lambda \in \Lambda$, on désigne par $E_\lambda = E/Ker\,|.|_\lambda$, où $Ker\,|.|_\lambda = \{x \in E : |x|_\lambda = 0\}$, l'algèbre quotient de E par $Ker\,|.|_\lambda$ et $\pi_\lambda : E \longrightarrow E/Ker\,|.|_\lambda$ la surjection canonique. Pour $x \in E$, la classe $\pi_\lambda(x)$ de x sera notée x_λ. On munit E_λ de la norme $\|.\|_\lambda$ définie par $\|x_\lambda\|_\lambda = |x|_\lambda$. Soit $\widehat{E_\lambda}$ l'algèbre complétée, pour $\|.\|_\lambda$, de E_λ. La norme de $\widehat{E_\lambda}$ sera encore notée $\|.\|_\lambda$. Si E est séparée et complète, alors E est algébriquement et topologiquement isomorphe à la limite projective d'algèbres de Banach $\widehat{E_\lambda}$. Dans toute la suite, on désigne par $\rho(x) = \sup\{|z| : z \in Spx\}$ le rayon spectral d'un élément x de E, où Spx est le spectre de x. Soit $\left(E, (|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ une *a.l.m.c.* complète commutative et semi-simple et soit $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble de ses caractères continus non nuls. On dit que $\left(E, (|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ est régulière si, pour tout $\chi_0 \in \mathcal{M}(E)$ et tout fermé F de $\mathcal{M}(E)$ tel que $\chi_0 \notin F$, il existe $x \in E$ tel que $\chi_0(x) = 1$ et $\chi(x) = 0$, pour tout $\chi \in F$.

Pour $1 < p < +\infty$, les espaces de Banach $L^p(R^n)$ ne sont pas des algèbres pour les produits ordinaire et de convolution. Dans la suite, nous ne ferons pas

Received by the editors June 2004.

Communicated by F. Bastin.

1991 *Mathematics Subject Classification :* Primary 46H20. 46E30.

Key words and phrases : Algèbre localement m-convexe commutative et semi-simple, produit de convolution, poids sur R^n, algèbre régulière.

de différence entre deux fonctions égales presque partout. Pour $f \in L^1(R^n)$, $\mathcal{F}f$ désignera la transformation de Fourier de f, i.e.

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{R^n} f(y)e^{-2\pi ixy}dy, \text{ pour tout } x \in R^n.$$

Un poids sur R^n est une fonction ω positive, mesurable et localement intégrable sur R^n. Pour $1 < p < +\infty$, posons $\omega_s(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^s$, pour $s > \frac{n(p-1)}{2}$ et $\Omega = \left\{\omega_s : s > \frac{n(p-1)}{2}\right\}$. On définit les espaces fonctionnels suivants

$$L_s^p(R^n) = \left\{f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega_s \in L^1(R^n)\right\}$$

et

$$L_\Omega^p(R^n) = \left\{f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega \in L^1(R^n), \text{ pour tout } \omega \in \Omega\right\}.$$

L' espace $L_s^p(R^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_s$ donnée par

$$\|f\|_s = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega_s(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } f \in L_s^p(R^n)$$

et son dual s'identifie à l'espace $L_{s'}^q(R^n)$, où $s' = -\frac{q}{p}s$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On munit $L_\Omega^p(R^n)$ de la topologie définie par la famille de normes $(\|.\|_s)_{\omega\in\Omega}$. L'espace $\left(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_{\omega\in\Omega}\right)$ devient ainsi un espace localement convexe complet.

Dans ce papier, nous considérons le produit de convolution dans les espaces $L_s^p(R^n)$ et $L_\Omega^p(R^n)$, $p \in]1, +\infty[$. Pour $s > \frac{n(p-1)}{2}$, on montre que $(L_s^p(R^n), \|.\|_s)$ est une algèbre de Banach. Nous prouvons aussi que l'espace $\left(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_{\omega\in\Omega}\right)$ est une *a.l.m.c.* complète régulière.

2 Spectre de Gelfand des algèbres $L_s^p(R^n)$, $s > \frac{n(p-1)}{2}$

Les poids $(\omega_s)_{s>\frac{n(p-1)}{2}}$ vérifient une propriété importante qui fait que les espaces $(L_s^p(R^n), \|.\|_s)$ sont des algèbres de Banach.

Proposition 2.1. Pour $p \in]1, +\infty[$ et $s > \frac{n(p-1)}{2}$, l'espace $(L_s^p(R^n), \|.\|_s)$ est une algèbre de Banach.

Preuve. Montrons d'abord qu'il existe une constante $c_s > 0$ telle que

$$\omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}} \leq c_s \omega_s^{\frac{1}{1-p}}. \tag{1}$$

En effet soient ϕ_s et ψ_s les fonctions définies, sur R_+, par $\phi_s(t) = (1 + t^2)^s$ et $\psi_s(t) = Log\phi_s(t)$. Pour tout $x \in R^n$, on a $\omega_s(x) = \phi_s(\|x\|)$. Soit θ_s la fonction définie, sur R^n, par $\theta_s(x) = \psi_s(\|x\|)$. Alors $\theta_s(y) \geq \theta_s(\frac{x}{2})$ si $\|y\| > \frac{\|x\|}{2}$ et $\theta_s(x-y) \geq \theta_s(\frac{x}{2})$

si $\|y\| < \frac{\|x\|}{2}$. Par suite

$$\begin{aligned}
\omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x) &= \int_{R^n} \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(y)\omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x-y)dy \\
&= \int_{R^n} e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(y)} e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(x-y)} dy \\
&\leq \left[\int_{\|y\|\leq \frac{\|x\|}{2}} e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(y)}dy + \int_{\|y\|>\frac{\|x\|}{2}} e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(x-y)}dy\right] e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Comme $t\psi_s'(t) = \frac{2t^2 s}{1+t^2} \leq 2s$, on a

$$\theta_s(x) - \theta_s(\frac{x}{2}) = \int_{\frac{\|x\|}{2}}^{\|x\|} \psi_s'(t)dt \leq \int_{\frac{\|x\|}{2}}^{\|x\|} \frac{2s}{t}dt = 2sLog2.$$

Par conséquent, pour tout $x \in R^n$, on a

$$\begin{aligned}
\omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x) &\leq \left[2\int_{R^n} e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(y)}dy\right] e^{\frac{1}{1-p}\theta_s(x)} e^{-\frac{1}{1-p}2sLog2} \\
&\leq \left[2^{1+\frac{2s}{1-p}} \int_{R^n} \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(y)dy\right] \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x) \leq c_s \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x), \text{ pour tout } x \in R^n,$$

où

$$c_s = 2^{1+\frac{2s}{1-p}} \int_{R^n} \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(y)dy < \infty$$

car la fonction $x \longmapsto \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{s}{1-p}}$ appartient à $L^1(R^n)$ vu que $s > \frac{n(p-1)}{2}$. Montrons maintenant que

$$\|f * g\|_s \leq c_s^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_s \|g\|_s, \text{ pour tous } f, g \in L_s^p(R^n).$$

Comme l'espace $\mathcal{K}(R^n)$ des fonctions continues à support compact dans R^n est dense dans $(L_s^p(R^n), \|.\|_s)$, il suffit de montrer que

$$\|f * g\|_s \leq c_s^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_s \|g\|_s, \text{ pour tous } f, g \in \mathcal{K}(R^n).$$

Soient $f, g \in \mathcal{K}(R^n)$ et $h = f * g$. En écrivant

$$h(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y) \left|\frac{\omega_s(x-y)\omega_s(y)}{\omega_s(x-y)\omega_s(y)}\right|^{\frac{1}{p}} dy$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|h(x)| \leq \left(\int_{R^n} |f(x-y)|^p \omega_s(x-y) |g(y)|^p \omega_s(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} W_s^{\frac{p-1}{p}}(x),$$

où $W_s = \omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
|\textstyle\int_{R^n} |h(x)|^p W_s^{1-p}(x)dx| &\leq \textstyle\int_{R^n} |f(x-y)|^p \omega_s(x-y)dx \int_{R^n} |g(y)|^p \omega_s(y)dy \\
&\leq \|f\|_s^p \|g\|_s^p.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $1-p<0$, l'inégalité (1) entraîne que $c_s^{1-p}\omega_s \leq W_s^{1-p}$. Donc

$$\|f*g\|_s = \left(\left|\int_{R^n} |h(x)|^p\, \omega_s(x)dx\right|\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_s^{\frac{p-1}{p}}\, \|f\|_s\, \|g\|_s\,.$$

Soit$\mathcal{M}_s$ l'ensemble des caractères non nuls de $L_s^p\left(R^n\right)$ et soit $\lambda \in R^n$. Pour toute $f \in L_s^p\left(R^n\right)$, posons

$$\sigma_\lambda(f) = \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{R^n} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx.$$

Il est clair que $\chi \in \mathcal{M}_s$ car

$$\sigma_\lambda(f*g) = (f*g)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathcal{F}(g)(\lambda) = \sigma_\lambda(f)\sigma_\lambda(g).$$

D'autre part, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\sigma_{\lambda_1} \neq \sigma_{\lambda_2}$, car il existe $\varphi \in \mathcal{D}\left(R^n\right) \subset \mathcal{F}\left(L_s^p\left(R^n\right)\right)$ telle que $\varphi\left(\lambda_1\right)=1$ et $\varphi\left(\lambda_2\right)=0$. Ainsi l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$ est une application injective de R^n sur $\mathcal{M}_s$. Cette application est une bijection bicontinue comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.2. Pour $p \in \left]1,+\infty\right[$ et $s > \frac{n(p-1)}{2}$, l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$ est un homéomorphisme de R^n sur $\mathcal{M}_s$. Par cette bijection, la transformation de Gelfand s'identifie avec la transformation de Fourier $\mathcal{F}$.

Preuve. Montrons d'abord que l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$ est surjective. Soit $\chi \in \mathcal{M}_s$. D'après la proposition 3.1 de [3], il existe une fonction $\beta \in L_{s'}^q\left(R^n\right)$, où $s' = -\frac{q}{p}s$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, vérifiant $\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y)$ et telle que

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)\beta(x)dx\,;\text{ pour tout } f \in L_s^p\left(R^n\right).$$

Comme les seules fonctions β de R^n vérifiant $\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y)$ sont de la forme $\beta(x)=e^{zx}$, pour $z \in C^n$, on a

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)e^{zx}dx\,;\text{ pour tout } f \in L_s^p\left(R^n\right).$$

Posons $z=a+ib$, a et $b \in R^n$. La fonction $x \longmapsto e^{zx}$ est alors dans $L_{s'}^q\left(R^n\right)$ si, et seulement, si $a=0$. Ainsi, pour tout $f \in L_s^p\left(R^n\right)$, on a

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)e^{ibx}dx = \sigma_\delta(f),\text{ où } \delta = \frac{-b}{2\pi}.$$

Pour la continuité de l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$, soit $\left(\lambda_m\right)_m$ une suite d'éléments, de R^n, qui converge vers $\lambda \in R^n$. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, la suite de nombres $\sigma_{\lambda_m}(f) = \int_{R^n} f(x)e^{-2\pi i\lambda_m x}dx$ converge vers $\int_{R^n} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx = \sigma_\lambda(f)$, pour toute $f \in \mathcal{K}\left(R^n\right)$. Donc $\left(\sigma_{\lambda_m}\right)_m$ converge vers σ_λ. Enfin soit $\left(\chi_m\right)_m$ une suite de caractères qui converge vers χ. Alors il existe $\left(\lambda_m\right)_m$ et λ dans R^n tels que $\sigma_{\lambda_m}=\chi_m$ et $\sigma_\lambda=\chi$. Il s'ensuit que, pour tout $f \in \mathcal{K}\left(R^n\right)$, $\mathcal{F}f(\lambda_m) \underset{m}{\longrightarrow} \mathcal{F}f(\lambda)$. D'où $\lambda_m \underset{m}{\longrightarrow} \lambda$ car la transformation de Fourier- Laplace sépare les points de C^n.

Remarque 2.3. Pour $f \in L_s^p\left(R^n\right)$, on a $\rho\left(f\right) = \sup\limits_{\lambda\in R^n}\left|\mathcal{F}f(\lambda)\right|$. De plus l'algèbre $L_s^p\left(R^n\right)$ est commutative. Elle est donc semi-simple.

3 Régularité de l'algèbre à poids $\left(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_{s>\frac{n(p-1)}{2}}\right)$

Soient $p \in]1,+\infty[$ et $s > \frac{n(p-1)}{2}$. D'après la proposition 2.1, il existe une constante $c_s > 0$ telle que $\omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}} \leq c_s \omega_s^{\frac{1}{1-p}}$. Ainsi $\Omega = \left\{\omega_s : s > \frac{n(p-1)}{2}\right\}$ est une famille m-convexe de poids sur R^n. Donc, d'après la proposition 2.1 de [3], l'espace $\left(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_{s>\frac{n(p-1)}{2}}\right)$ est une *a.l.m.c.* complète. Posons $E = L_\Omega^p(R^n)$ et, pour $s > \frac{n(p-1)}{2}$, désignons par E_s l'algèbre $L_\Omega^p(R^n)$ muni de la norme $\|.\|_s$. Soit $\widehat{E_s}$ l'algèbre complétée, pour $\|.\|_s$, de E_s. L'algèbre $\widehat{E_s}$ est exactement égale à $L_s^p(R^n)$. De plus la famille Ω est filtrante croissante ; et pour $s, t \in \left]\frac{n(p-1)}{2}, +\infty\right[$ tel que $s \leq t$, on a $L_s^p(R^n) \subset L_t^p(R^n)$. Soit $I_{s,t} : L_s^p(R^n) \longrightarrow L_t^p(R^n)$ l'injection canonique. Alors $\left(L_s^p(R^n), I_{s,t}\right)_{s,t>\frac{n(p-1)}{2}}$ est un système projectif d'algèbres de Banach. De plus, on a

$$\varprojlim_{s} L_s^p(R^n) = \bigcap_{s>\frac{n(p-1)}{2}} L_s^p(R^n) = L_\Omega^p(R^n).$$

Soit $\mathcal{M}_\Omega$ l'ensemble des caractères continus non nuls de $L_\Omega^p(R^n)$. En utilisant le lemma 6.3 de [4, p. 172], on obtient que $\mathcal{M}_\Omega = \varinjlim_{s} \mathcal{M}_s$. Par conséquent $\mathcal{M}_\Omega = \bigcup_{s>\frac{n(p-1)}{2}} \mathcal{M}_s$. Comme $\mathcal{M}_s \simeq R^n$ ($\mathcal{M}_s$ est homéomorphe à R^n), on a $\mathcal{M}_\Omega \simeq R^n$. Soit maintenant $0 < a < 1$. Alors, pour $s > \frac{n(p-1)}{2}$, on a

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{Log\omega_s(x)}{\|x\|^a} = \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{Log\left(1+\|x\|^2\right)^s}{\|x\|^a} = 0.$$

Donc, pour $s > \frac{n(p-1)}{2}$, il existe $A_s > 0$, tel que

$$\omega_s(x) \leq e^{\|x\|^a}, \text{ pour } \|x\| > A_s \tag{2}$$

Posons $\psi(x) = e^{\|x\|^a}$. Il est clair que ψ est un poids de Gevrey sur R^n tel que $\psi(x+y) \leq \psi(x)\psi(y)$, pour tous $x, y \in R^n$. Soit $L_\psi^p(R^n)$ l'espace fonctionnel défini par

$$L_\psi^p(R^n) = \left\{f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \psi \in L^1(R^n)\right\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\psi$ donnée par

$$\|f\|_\psi = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \psi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } f \in L_\psi^p(R^n).$$

En fait l'espace $\left(L_\psi^p(R^n), \|.\|_\psi\right)$ est une algèbre de Banach régulière comme le montre le résultat suivant.

Proposition 3.1. 1) L'espace $\left(L_\psi^p(R^n), \|.\|_\psi\right)$ est une algèbre de Banach.

2) Le spectre de Gelfand de $\left(L_\psi^p(R^n), \|.\|_\psi\right)$ est homéomorphe à R^n.

3) L'algèbre $\left(L_\psi^p(R^n), \|.\|_\psi\right)$ est régulière.

Preuve. 1) On va montrer qu'il existe une constante $c(a) > 0$ telle que

$$\psi^{\frac{1}{1-p}} * \psi^{\frac{1}{1-p}} \leq c(a)\, \psi^{\frac{1}{1-p}}\ ;$$

et comme dans la proposition 2.1, on obtient

$$\|f * g\|_{\psi} \leq c(a)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{\psi} \|g\|_{\psi}, \text{ pour tous } f, g \in L^p_{\psi}(R^n).$$

Ainsi il s'agit de montrer qu'il existe une constante $c(a) > 0$ telle que

$$\int_{R^n} e^{\frac{1}{1-p}(\|u\|^a + \|x-u\|^a - \|x\|^a)} du \leq c(a).$$

Comme $\|u\|^a \geq \|x\|^a$ pour tout $\|u\| \geq \|x\|$, on a

$$\int_{\|u\| \geq \|x\|} e^{\frac{1}{1-p}(\|u\|^a + \|x-u\|^a - \|x\|^a)} du \leq \int_{\|u\| \geq \|x\|} e^{\frac{1}{1-p}\|x-u\|^a} du \leq \int_{R^n} e^{\frac{1}{1-p}\|u\|^a} du < +\infty.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante $c_0(a) > 0$ telle que

$$\int_{\|u\| < \|x\|} e^{\frac{1}{1-p}(\|u\|^a + \|x-u\|^a - \|x\|^a)} du \leq c_0(a),$$

pour tout $x \in R^n$. Pour cela, posons $\|u\| = s$ et $\|x\| = t$ et montrons que

$$\sup_{t>0} \int_0^t e^{\frac{1}{1-p}(s^a + (t-s)^a - t^a)} s^{n-1} ds < +\infty$$

vu que $\|x - u\|^a \geq (\|x\| - \|u\|)^a = (t-s)^a$. Par raison de symétrie, on se ramène à intégrer sur $\left[0, \frac{t}{2}\right]$. De plus, en tenant compte du fait que

$$t^a - (t-s)^a < a s^a, \text{ pour } 0 < s < \frac{t}{2},$$

on obtient

$$\int_0^{\frac{t}{2}} e^{\frac{1}{1-p}(s^a + (t-s)^a - t^a)} s^{n-1} ds \leq \int_0^{\frac{t}{2}} e^{\frac{1-a}{1-p}s^a} s^{n-1} ds \leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{1-a}{1-p}s^a} s^{n-1} ds < +\infty.$$

Donc

$$\sup_{t>0} \left[\int_0^{\frac{t}{2}} e^{\frac{1}{1-p}(s^a + (t-s)^a - t^a)} s^{n-1} ds\right] < +\infty,$$

et par suite

$$\sup_{t>0} \left[\int_0^{t} e^{\frac{1}{1-p}(s^a + (t-s)^a - t^a)} s^{n-1} ds\right] < +\infty.$$

Ainsi il existe une constante $c(a) > 0$ telle que

$$\int_{R^n} e^{\frac{1}{1-p}(\|u\|^a + \|x-u\|^a - \|x\|^a)} du \leq c(a),$$

c'est à dire

$$\psi^{\frac{1}{1-p}} * \psi^{\frac{1}{1-p}} \leq c(a)\, \psi^{\frac{1}{1-p}}.$$

2) Soit $\mathcal{M}_\psi$ l'ensemble des caractères non nuls de $L^p_\psi(R^n)$. Il est clair que l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$ est une application injective de R^n sur $\mathcal{M}_\psi$. Montrons qu'elle est surjective. Soit $\chi \in \mathcal{M}_\psi$. Comme dans la proposition 2.2, il existe $z \in C^n$ telle que

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)e^{zx}dx \,;\text{ pour tout } f \in L^p_\psi(R^n)$$

et la fonction $x \longmapsto e^{zx}$ est dans $L^q_\theta(R^n)$, où $\theta = \psi^{-\frac{q}{p}}$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Posons $z = a+ib$, a et $b \in R^n$. La fonction $x \longmapsto e^{zx}$ est alors dans $L^q_\theta(R^n)$ si, et seulement, si $a = 0$. Ainsi $\chi = \sigma_\delta$, où $\delta = \frac{-b}{2\pi}$. De même, on montre que l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$ est un homéomorphisme de R^n sur $\mathcal{M}_\psi$.

3) On a

$$\int_{R^n} \frac{Log\psi(x)}{1+\|x\|^{n+1}}dx = \int_{R^n} \frac{\|x\|^a}{1+\|x\|^{n+1}}dx.$$

Comme

$$\int_{R^n} \frac{\|x\|^a}{1+\|x\|^{n+1}}dx \leq \int_{\|x\|<1} \frac{\|x\|^a}{1+\|x\|^{n+1}}dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{\|x\|^{n+1-a}}dx$$

et $a < 1$, on a

$$\int_{R^n} \frac{Log\psi(x)}{1+\|x\|^{n+1}}dx < +\infty \tag{3}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, soit Ψ_i la fonction définie, sur R, par $\Psi_i(x) = \psi(x_i)$, où x_i est la i-ème composante de x. Alors $\left(L^p_{\Psi_i}(R), \|.\|_{\Psi_i}\right)$ est une algèbre de Banach. Comme Ψ_i est une application continue strictement positive sur R avec $\Psi_i(x) \geq 1$ pour tout $x \in R$ et $\Psi_i(x+y) \leq \Psi_i(x)\Psi_i(y)$ pour tous $x, y \in R$, on montre comme dans le cas de $L^1_{\Psi_i}(R)$ que l'algèbre $\left(L^p_{\Psi_i}(R), \|.\|_{\Psi_i}\right)$ est régulière car, par (3), on a

$$\int_{R} \frac{Log\psi_i(x)}{1+\|x\|^{2}}dx < +\infty.$$

Il s'ensuit que l'algèbre $\left(L^p_\psi(R^n), \|.\|_\psi\right)$ est aussi régulière vu que l'espace $\otimes_{i=1}^n L^p_{\Psi_i}(R)$ des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$, où $g_i \in L^p_{\Psi_i}(R)$, est dense dans $L^p_\psi(R^n)$.

La régularité de l'algèbre $L^p_\psi(R^n)$ entraîne celle de $L^p_\Omega(R^n)$ comme le montre ce qui suit.

Proposition 3.2. L'algèbre à poids $\left(L^p_\Omega(R^n), (\|.\|_s)_{s>\frac{n(p-1)}{2}}\right)$ est une *a.l.m.c.* complète régulière.

Preuve. Tout d'abord, l'algèbre $L^p_\Omega(R^n)$ est commutative et semi-simple. Il reste donc à montrer que $\left(L^p_\Omega(R^n), (\|.\|_s)_{s>\frac{n(p-1)}{2}}\right)$ est régulière.
Comme $\mathcal{M}_\Omega = \bigcup_{s>\frac{n(p-1)}{2}} \mathcal{M}_s \simeq R^n$, il s'agit alors de montrer que, pour une partie fermée F de R^n et $t_0 \notin F$, il existe $f \in L^p_\Omega(R^n)$ telle que $\mathcal{F}f(t_0) = 1$ et $\mathcal{F}f(t) = 0$,

pour tout $t \in F$. Pour cela, remarquons tout d'abord que, pour tout $s > \frac{n(p-1)}{2}$, on a $L^p_\psi(R^n) \subset L^p_s(R^n)$ et l'injection est continue. En effet soit $f \in L^p_\psi(R^n)$. En écrivant

$$\omega_s(x)\,|f(x)|^p = \psi(x)\,|f(x)|^p\,\frac{\omega_s(x)}{\psi(x)}.$$

et en tenant compte de (2) et du fait que ω_s et ψ sont continues, il existe une constante $M_s > 0$ telle que $\omega_s(x) \leq M_s\psi(x)$, pour tout $x \in R^n$. Il s'ensuit que $L^p_\psi(R^n) \subset L^p_s(R^n)$ et $\|f\|_s \leq M_s^{\frac{1}{p}}\|f\|_\psi$, pour tout $f \in L^p_\psi(R^n)$. Par conséquent $L^p_\psi(R^n) \subset L^p_\Omega(R^n)$ et l'injection est continue. Ensuite, d'après la proposition 3.1, l'algèbre $\left(L^p_\psi(R^n), \|.\|_\psi\right)$ est une algèbre régulière et son spectre de Gelfand est homéomorphe à R^n. Il existe alors $f \in L^p_\psi(R^n)$ (et donc $f \in L^p_\Omega(R^n)$) telle que $\mathcal{F}f(t_0) = 1$ et $\mathcal{F}f(t) = 0$, pour tout $t \in F$.

Références

[1] R. Arens, Dense inverse limit rings, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.

[2] A. Benazzouz. Contribution à l'analyse harmonique des algèbres de Beurling généralisées, Thèse de 3ème cycle, Faculté des sciences de Rabat (1984).

[3] A. El Kinani et A. Benazzouz. Structure m-convexe dans l'espace à poids $L^p_\Omega(R^n)$. Bull. Belg. Math. Soc. 10 (2003), pp. 49-57.

[4] A. Mallios. Topological algebras, Selected topics, North -Holand, Amsterdam, 1986.

[5] E. A. Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. 11 (1952)

Ecole Normale Supérieure,
B. P. 5118-Takaddoum,
10105 Rabat, Maroc.
email : a_elkinani@ens-rabat.ac.ma.