

Spectres en diagramme dans les catégories modèles

Olivier Renaudin

Abstract

We extend the notion of diagram spectra of [MMSS] to general model categories to obtain a stabilization process with respect to any set of objects. Following [Ho2], we discuss the existence and some properties of diagram spectra, such as monoidal structures, invertibility, idempotency, homotopy invariance and functoriality. We end with some comparisons between categories of spectra associated to different diagrams.

La construction des spectres symétriques pour la S^1 -stabilisation des ensembles simpliciaux (et des espaces topologiques) de [HSS] a été étendue dans deux directions. D'une part, [Ho2] considère les spectres symétriques dans le contexte de la stabilisation relativement à un objet des catégories modèles générales. D'autre part, [MMSS] prolonge l'idée des spectres symétriques par celle des spectres en diagramme pour la S^1 -stabilisation des espaces, [MM] introduisant les spectres (en diagramme) orthogonaux pour la stabilisation des espaces équivariants relativement à un ensemble de "sphères de représentations".

Le principal but de ce travail est d'étudier les spectres en diagramme dans le contexte de la stabilisation des catégories modèles relativement à un ensemble d'objets.

Soit un ensemble d'objets $\{K_u\}_{u \in U}$ dans une catégorie modèle monoïdale symétrique $(\mathcal{V}, \otimes, \mathbf{1})$. On se donne une petite \mathcal{V} -catégorie monoïdale \mathcal{D} avec un foncteur $U \rightarrow \mathcal{D}$ et un foncteur monoïdal fort $\bar{K} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ tel que $\bar{K}(u) = K_u$. La catégorie des \mathcal{D} - \bar{K} -spectres $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ est alors la catégorie des \bar{K} -modules dans la catégorie des

Received by the editors December 2003.

Communicated by Y. Félix.

2000 *Mathematics Subject Classification* : 18G55, 55P42.

Key words and phrases : Catégories modèles, stabilisation, spectres.

\mathcal{V} -foncteurs de \mathcal{D} dans \mathcal{V} . Elle vient avec une adjonction $F_1 : \mathcal{V} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) : E_1$. Lorsque \mathcal{D} et \bar{K} sont symétriques, la catégorie des \mathcal{D} - \bar{K} -spectres et l'adjonction (F_1, E_1) sont monoïdales symétriques. Ces constructions sont détaillées dans la première section.

L'exemple important des spectres symétriques est obtenu avec $\mathcal{D} = \Sigma(U)$, la catégorie monoïdale symétrique libre engendrée par U . Si $MA(U)$ désigne le monoïde abélien libre engendré par U , un K -spectre symétrique de \mathcal{V} est décrit par :

- un $(\Sigma_{m_1} \times \cdots \times \Sigma_{m_l})$ -objet $X(\underline{v})$ de \mathcal{V} pour chaque $\underline{v} = v_1^{m_1} \cdots v_l^{m_l} \in MA(U)$
- un morphisme : $\sigma_{u, \underline{v}} : K_u \otimes X(\underline{v}) \longrightarrow X(u\underline{v})$ pour chaque $u \in U, \underline{v} \in MA(U)$

le tout soumis à certaines conditions d'équivariances.

Dans la deuxième section, la catégorie $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ est munie d'une structure de catégorie modèle "stable", sous certaines conditions, pour laquelle $F_1 : \mathcal{V} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) : E_1$ est une adjonction de Quillen. Si \mathcal{V} est une catégorie modèle combinatoire ou cellulaire, propre à gauche, certaines conditions sur \mathcal{D} et \bar{K} , toujours vérifiées par les spectres symétriques, assurent l'existence du modèle stable, qui est alors un modèle monoïdale symétrique dès que \mathcal{D} et \bar{K} sont symétriques et que les sources des cofibrations génératrices de \mathcal{V} sont cofibrantes.

Par ailleurs, on considère dans ces deux premières sections la functorialité de la construction $Sp^{\mathcal{D}}$. Il s'avère qu'elle transforme les adjonctions monoïdales symétriques de Quillen en adjonctions monoïdales symétriques de Quillen, et que les adjonctions fermées de Quillen induisent des adjonctions de Quillen. De telles adjonctions se rencontrent, par exemple, dans le cadre des "changements de groupes" en théorie de l'homotopie équivariante [MM, V.2], et dans le cadre des "changements de bases" en théorie \mathbb{A}^1 -homotopique des schémas [Hu, section 2]. D'autre part, la construction $Sp^{\mathcal{D}}$ est fonctorielle en le diagramme \mathcal{D} . Cela peut s'appliquer à la construction de "changements d'univers" en théorie de l'homotopie équivariante [MM, V.1].

Dans la troisième section, suivant d'assez près [Ho2], on vérifie quelques propriétés fondamentales de cette construction, sous certaines hypothèses. Tout d'abord, on vérifie que lorsque \mathcal{D} et \bar{K} sont symétriques, les objets $F_1(K_u)$ sont inversibles dans la catégorie homotopique $\text{Ho}(Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K))$. Ensuite, la construction est idempotente, en ce sens que si les objets K_u sont inversibles dans $\text{Ho}(\mathcal{V})$, l'adjonction (F_1, E_1) est une équivalence de Quillen. Enfin, un premier résultat d'invariance homotopique montre que, dans des conditions favorables, le type de Quillen de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ ne dépend des objets K_u qu'à équivalences faibles près.

Dans la quatrième section, on considère les spectres associés à un produit de diagrammes et on obtient quelques résultats de comparaison. En particulier, on a un second résultat d'invariance homotopique généralisant le premier lorsque \mathcal{D} et \bar{K} sont symétriques. Modulo certaines hypothèses d'existence, deux catégories modèles de spectres associées à un même ensemble d'objets et chacune obtenue à partir d'un diagramme symétrique et d'un foncteur symétrique sont Quillen-équivalentes. Ceci implique que, dans la théorie homotopique équivariante, les catégories des spectres symétriques et des spectres orthogonaux [MM] sont Quillen-équivalentes. Cela permet également de retrouver et généraliser certaines des équivalences de Quillen de [MMSS].

La lecture de ce papier requiert une certaine familiarité avec le langage des catégories enrichies [K], et avec celui des catégories modèles de Quillen [Ho1, Hi].

Remerciements. Je remercie Ib Madsen, Yves Félix et John Greenlees pour leur accueil chaleureux à Århus, Louvain-la-Neuve et Sheffield respectivement, dans le cadre du réseau européen “Modern Homotopy Theory” où ce papier a été écrit. Je remercie également Andrew Ranicki et Thomas Hüttermann pour l’aide qu’ils m’ont apportée.

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Aspects catégoriques | 4 |
| 1.1 | Catégories de diagrammes et structures monoïdales | 4 |
| 1.2 | Spectres | 5 |
| 1.3 | Fonctorialités | 7 |
| 1.4 | Exemples | 10 |
| 1.4.1 | Spectres | 10 |
| 1.4.2 | Spectres symétriques | 10 |
| 1.4.3 | Spectres saturés | 11 |
| 2 | Aspects homotopiques | 11 |
| 2.1 | Modèle projectif | 11 |
| 2.2 | Modèle stable | 14 |
| 2.3 | Fonctorialités | 15 |
| 3 | Propriétés | 18 |
| 3.1 | Inversibilité | 18 |
| 3.2 | Idempotence | 19 |
| 3.3 | Invariance homotopique | 20 |
| 4 | Stabilisations itérées et comparaisons | 21 |
| 4.1 | Factorisation produit | 21 |
| 4.2 | Stabilisations itérées | 22 |
| 4.3 | Comparaisons | 24 |
| 4.4 | Spectres symétriques et spectres orthogonaux équivariants | 26 |
| A | Appendices | 27 |
| A.1 | Trois rappels concernant les catégories modèles | 27 |
| A.2 | Adjonctions fermées | 28 |

1 Aspects catégoriques

Soit $(\mathcal{V}, \otimes, \mathbf{1}, F)$ une catégorie monoïdale symétrique fermée bicomplète. Soit \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie bicomplète (en particulier tensorisée et cotensorisée sur \mathcal{V}). De façon générale, on note $- * -$ et $\{-, -\}$ pour la tensorisation et la cotensorisation dans une catégorie enrichie. Soit \mathcal{D} une petite \mathcal{V} -catégorie. On note \mathcal{DM} la \mathcal{V} -catégorie des \mathcal{V} -foncteurs de \mathcal{D} dans \mathcal{M} .

Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ est un \mathcal{V} -foncteur entre petites \mathcal{V} -catégories, $f_!$ et f_* désignent les adjoints à gauche et à droite du foncteur “restriction” $f^* : \mathcal{D}'\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{DM}$. En particulier, le foncteur i_d de la \mathcal{V} -catégorie unité $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$ dans \mathcal{D} prenant pour valeur l’objet d , induit le foncteur “évaluation en d ” $i_d^* : \mathcal{DM} \rightarrow \mathcal{M}$. On notera E_d pour i_d^* , et F_d pour $i_{d!}$.

1.1 Catégories de diagrammes et structures monoïdales

Soit $(\mathcal{D}, \boxtimes, \mathbf{1})$ une petite \mathcal{V} -catégorie monoïdale. On rappelle d’abord la définition de la structure monoïdale de “convolution” de \mathcal{DV} . Le produit et le Hom externe :

$$-\bar{\otimes}- : \mathcal{DV} \otimes \mathcal{DV} \longrightarrow (\mathcal{D} \otimes \mathcal{D})\mathcal{V} \quad , \quad \bar{F}(-, -) : \mathcal{DV}^{op} \otimes (\mathcal{D} \otimes \mathcal{D})\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{DV}$$

sont définis par :

$$X\bar{\otimes}Y(d, e) = X(d) \otimes Y(e) \quad \text{et} \quad \bar{F}(Y, Z)(d) = \mathcal{DV}(Y, Z\langle d \rangle)$$

où $Z\langle d \rangle(e) = Z(d, e)$, avec $X, Y \in \mathcal{DV}$, $Z \in (\mathcal{D} \otimes \mathcal{D})\mathcal{V}$, et $d, e \in \mathcal{D}$. On a une \mathcal{V} -adjonction :

$$(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D})\mathcal{V}(X\bar{\otimes}Y, Z) \simeq \mathcal{DV}(X, \bar{F}(Y, Z))$$

L’extension de Kan à gauche du produit $-\boxtimes- : \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, se compose avec le produit externe $-\bar{\otimes}-$ pour définir un bifoncteur $-\wedge- : \mathcal{DV} \otimes \mathcal{DV} \longrightarrow \mathcal{DV}$, caractérisé par la propriété suivante. Pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{DV}$:

$$\mathcal{DV}(X \wedge Y, Z) \simeq (\mathcal{D} \otimes \mathcal{D})\mathcal{V}(X\bar{\otimes}Y, Z \circ \boxtimes)$$

On peut également exprimer $X \wedge Y$ comme une cofin :

$$(X \wedge Y)(d) = \int^{\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \ni (a, b)} \mathcal{D}(a \boxtimes b, d) \otimes X(a) \otimes Y(b)$$

On note \mathbb{I} le foncteur représenté par l’unité de \mathcal{D} : $\mathcal{D}(1, -)$, et on pose $\mathbb{F}(Y, Z) = \bar{F}(Y, Z \circ \boxtimes)$.

Proposition 1.1. *[Da][MMSS] Le quadruplet $(\mathcal{DV}, \wedge, \mathbb{I}, \mathbb{F})$ constitue une structure de \mathcal{V} -catégorie monoïdale fermée, symétrique si \mathcal{D} l’est.*

Proposition 1.2. *Si \mathcal{D} est une petite \mathcal{V} -catégorie monoïdale et \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie (resp. bitensorisée), la catégorie \mathcal{DM} est une \mathcal{DV} -catégorie (resp. bitensorisée).*

Démonstration. Le \mathcal{DV} -enrichissement de \mathcal{DM} est défini par : $\overline{\mathcal{DM}}(X, Y)(d) = \mathcal{DM}(X, Y(d \boxtimes -))$. La (co)tensorisation dans la \mathcal{DV} -catégorie \mathcal{DM} s’obtient à partir de la (co)tensorisation dans la \mathcal{V} -catégorie \mathcal{DM} (définie degré à degré) : $(X * Y)(d) = \int^{a, b} \mathcal{D}(a \boxtimes b, d) * X(a) * Y(b)$ et $\{X, Y\}(d) = \{X, Y(d \boxtimes -)\}$ ■

Lemme 1.3. *Pour tout $V \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{M}$, $d, e \in \mathcal{D}$, on a un isomorphisme naturel :*

$$F_d(V) * F_e(M) \simeq F_{d \boxtimes e}(V * M)$$

Démonstration. Cela découle du lemme de Yoneda et des isomorphismes, pour tout $a \in \mathcal{D}$ et $G \in \mathcal{DM}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{DM}}(F_d(V) * F_e(M), G)(a) &\simeq \mathcal{DV}(F_d(V), \overline{\mathcal{DM}}(F_e(M), G(a \boxtimes -))) \\ &\simeq \mathcal{DV}(V, \mathcal{DM}(F_e(M), G(a \boxtimes d \boxtimes -))) \\ &\simeq \mathcal{DV}(V, \mathcal{M}(M, G(a \boxtimes d \boxtimes e))) \\ &\simeq \mathcal{DM}(V * M, G(a \boxtimes d \boxtimes e)) \\ &\simeq \overline{\mathcal{DM}}(F_{d \boxtimes e}(V * M), G)(a) \end{aligned}$$

Les premier et deuxième isomorphismes découlent de la définition de $\overline{\mathcal{DM}}(-, -)$ et, respectivement, des adjonctions $(- * F_e(M), \overline{\mathcal{DM}}(F_e(M), -))$ et (F_d, E_d) . Le troisième isomorphisme est l'adjonction (F_e, E_e) et le quatrième isomorphisme l'adjonction $(- * M, \mathcal{M}(M, -))$. Enfin, le dernier isomorphisme provient de l'adjonction $(F_{d \boxtimes e}, E_{d \boxtimes e})$ et de la définition de $\overline{\mathcal{DM}}(-, -)$. ■

Concernant la functorialité de ces constructions, on a :

Proposition 1.4. *[IK] Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux petites catégories monoïdales (resp. symétriques) et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ un \mathcal{V} -foncteur monoïdal (resp. symétrique) fort. Alors l'adjonction $f_! : \mathcal{DV} \rightleftarrows \mathcal{D}'\mathcal{V} : f^*$ est monoïdale (resp. symétrique).*

En particulier, $f_!$ est alors monoïdal (resp. symétrique) fort. Appliquée au foncteur $i_1 : \mathcal{I}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{D}$, cette proposition montre que l'adjonction $F_1 : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{DV} : E_1$ est une adjonction monoïdale (resp. symétrique).

1.2 Spectres

On maintient les hypothèses de la section précédente. On vérifie facilement [MMSS, p. 61] :

Lemme 1.5. *La catégorie des monoïdes de \mathcal{DV} est isomorphe à la catégorie des foncteurs monoïdaux de \mathcal{D} dans \mathcal{V} . Si \mathcal{D} est symétrique, la catégorie des monoïdes commutatifs est isomorphe à celle des foncteurs monoïdaux symétriques de \mathcal{D} dans \mathcal{V} .*

Soit R un monoïde de \mathcal{DV} . On note $R - \mathcal{DM}$ la catégorie des R -modules à gauche, i.e. la \mathcal{DV} -catégorie des \mathcal{DV} -foncteurs de R dans \mathcal{DM} . De la manière habituelle, si R est commutatif, R peut être considéré comme catégorie monoïdale symétrique. Si \mathcal{D} est symétrique et R est commutatif, $R - \mathcal{DV}$ est munie d'une structure de catégorie monoïdale symétrique comme dans la section précédente.

On note \mathcal{D}_R la sous-catégorie monoïdale pleine image du foncteur

$$\mathcal{D} \xrightarrow{h} \mathcal{DV}^{op} \xrightarrow{R \wedge -} (R - \mathcal{DV})^{op}$$

composé de l'opposé du plongement de Yoneda et du foncteur “ R -module libre”. Pour $d, e \in \mathcal{D}$, on a :

$$\mathcal{D}_R(d, e) = R - \mathcal{D}\mathcal{V}(R \wedge h_e, R \wedge h_d) \simeq (R \wedge h_d)(e) \simeq \int^{\mathcal{D} \ni a} R(a) \otimes \mathcal{D}(d \boxtimes a, e)$$

Si \mathcal{D} est monoïdale symétrique et R commutatif, \mathcal{D}_R est une sous-catégorie de $(R - \mathcal{D}\mathcal{V})^{op}$ stable par produit et contenant l'unité, car h et $R \wedge -$ sont monoïdaux forts, ce qui munit \mathcal{D}_R de la structure monoïdale symétrique induite.

Théorème 1.6. *Soit R un monoïde de $\mathcal{D}\mathcal{V}$. Les \mathcal{V} -catégories $\mathcal{D}_R\mathcal{M}$ et $R - \mathcal{D}\mathcal{M}$ sont équivalentes. Si \mathcal{D} est monoïdale symétrique et R est commutatif, les catégories $\mathcal{D}_R\mathcal{V}$ et $R - \mathcal{D}\mathcal{V}$ sont équivalentes comme \mathcal{V} -catégories monoïdales symétriques.*

Démonstration. (cf. [MMSS, p.63]). Pour obtenir une équivalence (resp. monoïdale symétrique) dans le cas $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, il faut et suffit de montrer que les objets de la sous-catégorie \mathcal{D}_R constituent un ensemble de générateurs projectifs-petits dans $R - \mathcal{D}\mathcal{V}$ ([K], resp. [IK]). Or, ceci résulte de l'isomorphisme naturel $R - \mathcal{D}\mathcal{V}(R \wedge h_d, -) \simeq \mathcal{D}\mathcal{V}(h_d, o(-))$, où d est un objet de \mathcal{D} et o le foncteur oubli, du fait que les objets h_d forment un ensemble de générateurs projectifs-petits de $\mathcal{D}\mathcal{V}$ et du fait que le foncteur oubli préserve les colimites. Dans le cas général d'une \mathcal{V} -catégorie \mathcal{M} , on considère l'adjonction : $\iota_! : \mathcal{D}\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{D}_R\mathcal{M} : \iota^*$ induit par le foncteur $\iota : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_R$. On constate d'abord que la monade $\iota^* \circ \iota_!$ est isomorphe à la monade $R * -$. Ensuite, ι étant essentiellement surjectif, ι^* reflète les isomorphismes. Enfin, ι^* possédant un adjoint à droite ι_* , il préserve toutes colimites. Le foncteur ι^* est donc monadique et, par [BW], il s'en suit que $\mathcal{D}_R\mathcal{M}$ est équivalente à $R - \mathcal{D}\mathcal{M}$. ■

Soient un ensemble U et un foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$, i.e. un ensemble, indexé par U , d'objets K_u dans \mathcal{V} .

Définition 1.7 Soient $(\mathcal{D}, \boxtimes, 1)$ une petite \mathcal{V} -catégorie monoïdale et une factorisation : $U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$ du foncteur K telle que \bar{K} soit un foncteur monoïdal fort. La factorisation, ou la paire (\mathcal{D}, \bar{K}) , est dite symétrique lorsque la catégorie monoïdale \mathcal{D} et le foncteur monoïdal \bar{K} sont symétriques. On appelle catégorie des \mathcal{D} - \bar{K} -spectres, et on note $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, la catégorie $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$.

Suivant les observations précédentes, si la paire (\mathcal{D}, \bar{K}) est symétrique, $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ est une catégorie monoïdale symétrique et $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ une $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -catégorie. Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on a une \mathcal{V} -adjonction : $F_d : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) : E_d$.

Dans toute la suite, on notera, abusivement, (F_u, E_u) , l'adjonction associée à un objet de \mathcal{D} image de l'élément u de U , et de pour $d \boxtimes e$ dans \mathcal{D} .

Remarque 1.8 Un \mathcal{D} - \bar{K} -spectre de \mathcal{V} est donc un \bar{K} -module de $\mathcal{D}\mathcal{V}$, soit un \mathcal{V} -foncteur $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ doté de deux transformations naturels en $(d, e) \in \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$:

$$\sigma_{d,e} : \bar{K}(d) \otimes X(e) \rightarrow X(de) \quad \text{et} \quad \eta : \mathbf{1} \rightarrow \bar{K}(1)$$

vérifiant les axiomes d'associativité et d'unité :

$$\begin{array}{ccc} \bar{K}(d) \otimes \bar{K}(e) \otimes X(f) & \xrightarrow{\bar{K}(d) \otimes \sigma} & \bar{K}(d) \otimes X(ef) & \mathbf{1} \otimes X(d) & \xrightarrow{\eta \otimes X(d)} & \bar{K}(1) \otimes X(d) \\ \downarrow & & \downarrow \sigma & \downarrow \sim & & \sigma \downarrow \\ \bar{K}(de) \otimes X(f) & \xrightarrow{\sigma} & X(def) & X(d) & \xleftarrow{\sim} & X(1d) \end{array}$$

(où on néglige les isomorphismes d'associativité de la structure monoïdale de \mathcal{DV}).

Comme \bar{K} est un foncteur monoïdal fort, l'axiome d'associativité montre par récurrence que le morphisme : $\sigma_{u_1 u_2 \dots u_n, d} : \bar{K}(u_1 u_2 \dots u_n) \otimes X(d) \rightarrow X(u_1 u_2 \dots u_n d)$ où $u_i \in U$ et $d \in \mathcal{D}$, est isomorphe au morphisme composé :

$$\sigma_{u_1, u_2 \dots u_n d} \circ (K_{u_1} \otimes \sigma_{u_2, u_3 \dots u_n d}) \circ \dots \circ (K_{u_1} \otimes \dots \otimes K_{u_{n-1}} \otimes \sigma_{u_n, d})$$

Lorsque tout objet de \mathcal{D} est isomorphe à un produit d'objets de U , un \mathcal{D} - \bar{K} -spectre de \mathcal{V} est donc décrit par la donnée :

- pour tout $d \in \mathcal{D}$, d'un objet $X(d) \in \mathcal{V}$,
- pour tout $u \in U$, $d \in \mathcal{D}$, d'un morphisme : $\sigma_{u, d} : K_u \otimes X(d) \rightarrow X(ud)$

tels que les morphismes composés ci-dessus vérifient les conditions de naturalité correspondant à celle des morphismes $\sigma_{u_1 u_2 \dots u_n, d}$.

Quand la \mathcal{V} -catégorie \mathcal{D} est un coproduit de \mathcal{V} -catégories dont les catégories sous-jacentes sont des groupoïdes connexes, ces conditions de naturalité sont des conditions d'équivariance relativement aux monoïdes d'endomorphismes de \mathcal{D} .

1.3 Functorialités

On se fixe, pour cette section, un ensemble U , un foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$, et une factorisation comme ci-dessus. On considère d'abord la functorialité relative à la catégorie de base.

Si $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ est un foncteur monoïdal symétrique fort entre catégories monoïdales symétriques, on note $\Phi(K)$ pour le foncteur composé $\Phi \circ K : U \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, et on considère la factorisation de $\Phi(K) : U \rightarrow \Phi(\mathcal{D}) \xrightarrow{\Phi \circ \bar{K}} \mathcal{W}$. La \mathcal{W} -catégorie $\Phi(\mathcal{D})$ a même ensemble d'objets que \mathcal{D} , et pour morphismes $\Phi(\mathcal{D})(d, d') = \Phi(\mathcal{D}(d, d'))$. La composition est définie via celle de \mathcal{D} et la structure monoïdale de Φ . A l'occasion, pour alléger les notations, on notera \mathcal{D} pour $\Phi(\mathcal{D})$. En particulier, on notera $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{W}; \Phi(K))$ pour $Sp^{\Phi(\mathcal{D})}(\mathcal{W}; \Phi(K))$.

Proposition 1.9. *Soit \mathcal{V} une catégorie monoïdale symétrique fermée. Dans les assertions (2) et (3), on suppose que la paire (\mathcal{D}, \bar{K}) est symétrique.*

(1) *Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' des \mathcal{V} -catégories et $\Phi : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M}' : \Psi$ une \mathcal{V} -adjonction. Il existe une \mathcal{V} -adjonction :*

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'; K) : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$$

telle que $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \simeq \Phi \circ E_d$ et $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Psi) \simeq \Psi \circ E_d$.

(2) *Soient \mathcal{W} une catégorie monoïdale symétrique fermée et $\Phi : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{W} : \Psi$ une adjonction monoïdale symétrique. Il existe une adjonction monoïdale symétrique :*

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{W}; \Phi(K)) : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$$

telle que $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \simeq \Phi \circ E_d$ et $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Psi) \simeq \Psi \circ E_d$.

(3) Soient \mathcal{U} une catégorie monoïdale symétrique fermée et $\Gamma : \mathcal{U} \rightleftarrows \mathcal{V} : \Phi$ une adjonction telle que Φ soit un foncteur monoïdal symétrique fermé fort. Il existe une adjonction :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{U}; \Phi(K)) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) : Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)$$

telle que $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma) \simeq \Gamma \circ E_d$ et $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \simeq \Phi \circ E_d$.

On se référera à l'appendice A.2 pour traiter des foncteurs fermés forts.

Démonstration. (1) Le \mathcal{V} -foncteur $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}'$ s'obtient par post-composition : $X \mapsto \Phi \circ X$. Le \mathcal{V} -foncteur $Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$ s'obtient de même, ainsi que l'unité et la co-unité d'adjonction, si bien que les identités triangulaires sont immédiatement vérifiées par évaluation.

(2) D'après [K2, 5.1-2], l'adjonction monoïdale $\Phi : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{W} : \Psi$ donne une \mathcal{V} -adjonction $\Phi : \mathcal{V} \rightleftarrows \Psi(\mathcal{W}) : \Psi$. La première partie de cette proposition fournit une \mathcal{V} -adjonction $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\Phi(\mathcal{W}); \Phi(K)) : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$. Comme on a les équivalences de catégories [DK, 8] :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Psi(\mathcal{W}); \Phi(K)) = \mathcal{D}_{\bar{K}}\Psi(\mathcal{W}) \simeq \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{W} \simeq \Phi(\mathcal{D})_{\Phi \circ \bar{K}}\mathcal{W} = Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{W}; \Phi(K))$$

il ne reste plus qu'à vérifier que c'est une adjonction monoïdale. Cela découle, par [IK], de ce que la restriction de $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : \mathcal{D}_{\bar{K}}^{op} \rightarrow \mathcal{D}_{\bar{K}}\Psi(\mathcal{W})$, $d \mapsto \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, -))$, est un foncteur monoïdal fort.

(3) On utilise les remarques et notations de l'appendice A.2. En particulier, on note η et ε l'unité et la co-unité de l'adjonction (Γ, Φ) .

Soit X un objet de $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}$. On définit $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V} \rightarrow \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{U}$ sur les objets par $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)(d) = \Phi(X(d))$, les morphismes structuraux $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)_{d,d'} : \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})(d, d') \otimes Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)(d) \rightarrow Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)(d')$ étant définis par :

$$\Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d')) \otimes \Phi(X(d)) \xrightarrow{m_{\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d'), X(d)}} \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d') \otimes X(d)) \xrightarrow{\Phi(X_{d, d'})} \Phi(X(d'))$$

où $X_{d, d'} : \mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d') \otimes X(d) \rightarrow X(d')$ désigne le morphisme structurel de X . La compatibilité des morphismes $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)_{d, d'}$ avec compositions et identités découle facilement de celle des morphismes $X_{d, d'}$ et des propriétés associatives et unitaires de la structure monoïdale de Φ . On a donc obtenu un objet $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)$ de $\Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{U}$. Pour un morphisme $f \in \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}(X, Y)$, on a également $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(f)(d) = \Phi(f(d))$. La naturalité de $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(f)$ se déduit de celles de f et de m .

Soit Y un objet de $\Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{U}$. On définit $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma) : \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}$ sur les objets par $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(Y)(d) = \Gamma(Y(d))$, les morphismes structuraux $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(Y)_{d, d'} : \mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d') \otimes Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(Y)(d) \rightarrow Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(Y)(d')$ étant définis par :

$$\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d') \otimes \Gamma(Y(d)) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d'), Y(d)}^{-1}} \Gamma(\Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d')) \otimes Y(d)) \xrightarrow{\Gamma(Y_{d, d'})} \Gamma(Y(d'))$$

où $Y_{d, d'} : \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d')) \otimes Y(d) \rightarrow Y(d')$ désigne le morphisme structurel de Y . La compatibilité des morphismes $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(Y)_{d, d'}$ avec compositions et identités découle aisément de celle des morphismes $Y_{d, d'}$ et des propriétés associatives et unitaires de

la transformation naturelle π^{-1} . On a donc obtenu un objet $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(Y)$ de $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}$. La définition de $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)$ sur les morphismes est similaire à celle de $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)$.

Soient $X \in \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}$ et $Y \in \Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{U}$. On définit $\bar{\eta}_Y : Y \longrightarrow (Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma) \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi))(Y)$ et $\bar{\varepsilon}_X : (Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma))(X) \longrightarrow X$ par :

$$\bar{\eta}_Y(d) = \eta_{Y(d)} : Y(d) \longrightarrow \Phi\Gamma(Y(d)) \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}_X(d) = \varepsilon_{X(d)} : \Gamma\Phi(X(d)) \longrightarrow X(d)$$

La naturalité de η , ε et m implique que $\bar{\eta}_Y$ et $\bar{\varepsilon}_X$ sont naturels en d , donc un morphisme de $\Phi(\mathcal{D}_{\bar{K}})\mathcal{U}$ et de $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}$ respectivement. La naturalité en X et Y est claire. Les identités triangulaires pour $\bar{\eta}$ et $\bar{\varepsilon}$ se déduisent, par évaluation, de celles de η et ε , faisant de $\bar{\eta}$ et $\bar{\varepsilon}$ l'unité et la co-unité d'une adjonction $(Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma), Sp^{\mathcal{D}}(\Phi))$. ■

On s'intéresse maintenant à la functorialité relative au diagramme. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux petites catégories monoïdales (resp. symétriques) et une factorisation du foncteur K :

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\iota} \mathcal{D}' \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$$

telle que ι et \bar{K} soient des foncteurs monoïdaux (resp. symétriques) forts. On note $\bar{K}\iota$ pour $\bar{K} \circ \iota$.

Proposition 1.10. *Le foncteur $\iota : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ induit un foncteur $\bar{\iota} : \mathcal{D}_{\bar{K}\iota} \rightarrow \mathcal{D}'_{\bar{K}}$, qui est monoïdal symétrique fort si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et ι, \bar{K} sont symétriques.*

On a donc une \mathcal{V} -adjonction $\bar{\iota}_! : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^$. Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et ι, \bar{K} sont symétriques, il s'agit d'une adjonction monoïdale symétrique.*

Démonstration. Le foncteur $\bar{\iota} : \mathcal{D}_{\bar{K}\iota} \rightarrow \mathcal{D}'_{\bar{K}}$ coïncide avec le foncteur ι sur les objets, et, pour tout $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, on définit $\mathcal{D}_{\bar{K}\iota}(d_1, d_2) \rightarrow \mathcal{D}'_{\bar{K}}(\bar{\iota}(d_1), \bar{\iota}(d_2))$ par :

$$\int^{\mathcal{D}} \bar{K}\iota(a) \otimes_{\mathcal{D}}(d_1 a, d_2) \rightarrow \int^{\mathcal{D}} \bar{K}\iota(a) \otimes_{\mathcal{D}'}(\iota(d_1)\iota(a), \iota(d_2)) \rightarrow \int^{\mathcal{D}'} \bar{K}(b) \otimes_{\mathcal{D}'}(\iota(d_1)b, \iota(d_2))$$

où la première flèche est induite par le foncteur monoïdal (resp. symétrique) fort $\iota : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$, et la seconde flèche obtenue par propriété universelle. Une vérification de commutativité de diagramme routinière montre que $\bar{\iota}$ est, le cas échéant, un foncteur monoïdal symétrique. L'adjonction se déduit directement du foncteur $\bar{\iota}$ avec la proposition 1.4. ■

1.4 Exemples

Soient un ensemble U et un foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$. On note $M(U)$ et $MA(U)$ respectivement le monoïde libre et le monoïde abélien libre engendré par U :

$$M(U) = \coprod_{n \in \mathbb{N}} U^n \quad \text{et} \quad MA(U) = \coprod_{n \in \mathbb{N}} U^n / \Sigma_n$$

1.4.1 Spectres

La catégorie monoïdale libre engendrée par U , notée $\mathbb{N}(U)$, est la catégorie monoïdale dotée d'un foncteur $U \rightarrow \mathbb{N}(U)$ caractérisée par la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie monoïdale \mathcal{C} et pour tout foncteur $F : U \rightarrow \mathcal{C}$, il existe un unique foncteur monoïdal fort $F^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow F^{\mathbb{N}} & \\ \mathbb{N}(U) & & \end{array}$$

commute. C'est, à équivalence monoïdale près, la catégorie discrète ayant $M(U)$ pour ensemble d'objets.

Le foncteur monoïdal fort $K^{\mathbb{N}} : \mathbb{N}(U) \rightarrow \mathcal{V}$ est un monoïde de $\mathbb{N}(U)\mathcal{V}$. On appelle spectre (ou K -spectre) de \mathcal{M} un objet de la catégorie $Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}; K) = (\mathbb{N}(U)_{K^{\mathbb{N}}})\mathcal{M}$, équivalente à la catégorie des $K^{\mathbb{N}}$ -modules de $\mathbb{N}(U)\mathcal{M}$. Suivant la remarque 1.2, un K -spectre de \mathcal{V} est décrit par la donnée :

- pour tout $\underline{v} \in M(U)$, d'un objet $X(\underline{v}) \in \mathcal{V}$,
- pour tout $u \in U$, $\underline{v} \in M(U)$, d'un morphisme : $\sigma_{u, \underline{v}} : K_u \otimes X(\underline{v}) \longrightarrow X(u\underline{v})$.

1.4.2 Spectres symétriques

La catégorie monoïdale symétrique libre engendrée par U , notée $\Sigma(U)$, est la catégorie monoïdale symétrique dotée d'un foncteur $U \rightarrow \Sigma(U)$ caractérisée par la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie monoïdale symétrique \mathcal{C} et pour tout foncteur $F : U \rightarrow \mathcal{C}$, il existe un unique foncteur monoïdal symétrique fort F^{Σ} tel que :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow F^{\Sigma} & \\ \Sigma(U) & & \end{array}$$

commute. C'est, à équivalence monoïdale symétrique près, le groupoïde ayant $M(U)$ pour ensemble d'objets et pour morphismes :

$$Hom(\underline{u}, \underline{v}) = \begin{cases} \{\sigma \in \Sigma_n / \forall i = 1, \dots, n \quad v_i = u_{\sigma(i)}\} & \text{si } |\underline{u}| = |\underline{v}| = n, \\ \emptyset & \text{si } |\underline{u}| \neq |\underline{v}|. \end{cases}$$

où $|\underline{u}|$ désigne la longueur, p , du mot $\underline{u} = u_1 u_2 \dots u_p$ et Σ_n le groupe symétrique. C'est encore, à équivalence monoïdale symétrique près, le groupoïde ayant $MA(U)$ pour ensemble d'objets et pour morphismes :

$$\text{Hom}(\underline{u}, \underline{v}) = \begin{cases} \Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots \times \Sigma_{n_k} & \text{si } \underline{v} = \underline{u} = u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_k^{n_k}, \\ \emptyset & \text{si } \underline{v} \neq \underline{u}. \end{cases}$$

c'est-à-dire le groupoïde $\Sigma^{\text{Card}(U)}$, où $\Sigma = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

Le foncteur monoïdal symétrique fort $K^\Sigma : \Sigma(U) \rightarrow \mathcal{V}$ est un monoïde commutatif de $\Sigma(U)\mathcal{V}$. On appelle spectre symétrique (ou K -spectre symétrique) de \mathcal{M} un objet de la catégorie monoïdale symétrique $Sp^\Sigma(\mathcal{M}; K) = (\Sigma(U)_{K^\Sigma})\mathcal{M}$, équivalente à la catégorie des K^Σ -modules de $\Sigma(U)\mathcal{M}$. Suivant la remarque 1.2, un K -spectre symétrique de \mathcal{V} est décrit par la donnée :

- pour tout $\underline{v} = v_1^{m_1} \dots v_k^{m_k} \in MA(U)$, d'un $(\Sigma_{m_1} \times \dots \times \Sigma_{m_k})$ -objet $X(\underline{v})$ de \mathcal{V} ,
 - pour tout $u \in U$, $\underline{v} \in MA(U)$, d'un morphisme : $\sigma_{u, \underline{v}} : K_u \otimes X(\underline{v}) \rightarrow X(u\underline{v})$
- tels que les morphismes composés :

$$K_{u_1}^{\otimes n_1} \otimes K_{u_2}^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes K_{u_k}^{\otimes n_k} \otimes X(\underline{v}) \rightarrow X(u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_k^{n_k} \underline{v})$$

soient $(\Sigma_{n_1} \times \dots \times \Sigma_{n_k} \times \Sigma_{m_1} \times \dots \times \Sigma_{m_k})$ -équivalents, avec $\underline{v} = v_1^{m_1} \dots v_k^{m_k}$.

1.4.3 Spectres saturés

On note $S(K)$ la sous- \mathcal{V} -catégorie pleine monoïdale de \mathcal{V} engendrée par les objets K_u , $u \in U$. L'inclusion $K^S : S(K) \hookrightarrow \mathcal{V}$ est un \mathcal{V} -foncteur monoïdal symétrique fort, soit un monoïde commutatif de $S(K)\mathcal{V}$. On appelle spectre saturé (ou K -spectre saturé) un objet de la catégorie monoïdale symétrique $Sp^S(\mathcal{V}; K) = (S(K)_{K^S})\mathcal{V}$, équivalente à la catégorie des K^S -modules de $S(K)\mathcal{V}$. Comme le foncteur K^S est un plongement, ces catégories sont équivalentes à $S(K)\mathcal{V}$ [MMSS, Lem. 4.9].

2 Aspects homotopiques

Le but de cette section est de munir les catégories de spectres d'une structure de catégorie modèle (stable), et d'en indiquer les propriétés les plus immédiates.

Soit $(\mathcal{V}, \otimes, \mathbf{1}, F)$ une catégorie modèle monoïdale symétrique engendrée par cofibrations [Ho1]. Soit \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle engendrée par cofibrations [Ho1]. On note I (resp. J) l'ensemble des cofibrations (resp. triviales) génératrices de \mathcal{M} .

2.1 Modèle projectif

Dans cette section, on munit les catégories de spectres d'une structure de catégorie modèle "projective", dont on discute l'existence et la compatibilité avec les structures monoïdales et enrichies.

Soient \mathcal{D} une petite \mathcal{V} -catégorie et \mathcal{C} un ensemble d'objets de \mathcal{D} . Si \mathcal{C}^δ désigne la catégorie discrète associée à \mathcal{C} , le foncteur $\mathcal{C}^\delta \rightarrow \mathcal{D}$ induit une \mathcal{V} -adjonction

$F_C : \mathcal{C}^\delta \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{DM} : E_C$. La catégorie $\mathcal{C}^\delta \mathcal{M} = \prod_{|C|} \mathcal{M}$ est munie d'une structure de \mathcal{V} -catégorie modèle produit évidente, engendrée par cofibrations. On munit \mathcal{DM} d'une structure \mathcal{C} -projective en appelant équivalence faible (resp. fibration) un morphisme dont l'image par E_C est une équivalence faible (resp. fibration) de $\mathcal{C}^\delta \mathcal{M}$, et cofibration un morphisme ayant la propriété de relèvement à gauche relativement aux fibrations triviales.

On dit que \mathcal{M} vérifie l'axiome du monoïde [SS, 3.3, 3.5] si les $(\mathcal{V} * J)$ -cellules sont des équivalences faibles de \mathcal{M} , où $(\mathcal{V} * J)$ est la classe des morphismes $V * j$ où $V \in \mathcal{V}$ et $j \in J$. On dit que \mathcal{D} est à morphismes cofibrants si, pour tout $d, e \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}(d, e)$ est cofibrant dans \mathcal{V} .

On note $F_C(I)$ (resp. $F_C(J)$) l'ensemble des morphismes de la forme $F_C(i)$, où $i \in I$ (resp. $i \in J$) et $c \in \mathcal{C}$.

On rappelle ici quelques conditions d'existence du modèle projectif.

Théorème 2.1. *La structure \mathcal{C} -projective de \mathcal{DM} est une structure de \mathcal{V} -catégorie modèle engendrée par cofibrations, avec $F_C(I)$ (resp. $F_C(J)$) comme ensemble de cofibrations (resp. triviales) génératrices, si et seulement si :*

- (1) les ensembles $F_C(I)$ et $F_C(J)$ permettent l'argument du petit objet;
- (2) les $F_C(J)$ -cellules sont des \mathcal{C} -équivalences faibles.

Il suffit pour cela que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- \mathcal{M} vérifie l'axiome du monoïde et tout objet de \mathcal{M} est petit;
- L'unité $\mathbf{1}$ de \mathcal{V} est cofibrante et tout objet de \mathcal{M} est fibrant et petit;
- \mathcal{C} est à morphismes cofibrants.

Pour tout $c \in \mathcal{C}$, les adjonctions (F_c, E_c) sont alors des adjonctions de Quillen. De plus, lorsque \mathcal{C} est à morphismes cofibrants, les foncteurs E_c préservent les cofibrations.

Démonstration. La première équivalence résulte directement de [Hi, Th. 11.3.2].

Les éléments de $E_C(F_C(I))$ sont de la forme $\mathcal{D}(c, c') * i$, avec $i \in I$ et $c, c' \in \mathcal{C}$, et sont donc des cofibrations lorsque \mathcal{C} est à morphismes cofibrants, si bien qu'alors les foncteurs E_c préservent les cofibrations. Par [Hi, Th. 10.5.27], cela implique la condition (1), condition par ailleurs évidemment vérifiée lorsque tout objet de \mathcal{M} est petit.

Il reste à considérer la condition (2). Comme le foncteur E_C commute aux colimites, il suffit que les $E_C(F_C(J))$ -cellules soient des équivalences faibles. Cela revient à dire que les $\{\mathcal{D}(c, c') * J/c, c' \in \mathcal{C}\}$ -cellules sont des équivalences faibles. Il suffit pour cela que \mathcal{M} vérifie l'axiome du monoïde ou que \mathcal{C} soit à morphismes cofibrants.

On suppose enfin que tous les objets de \mathcal{M} sont fibrants et que l'unité $\mathbf{1}$ de \mathcal{V} est cofibrante. La factorisation "cofibration / fibration triviale" dans \mathcal{V} de la codiagonale $\mathbf{1} \amalg \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$ fournit un objet cylindre :

$$\mathbf{1} \amalg \mathbf{1} \rightarrow \text{Cyl}(\mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{1}$$

En appliquant le foncteur $\{-, X\}$, où $X \in \mathcal{DM}$, on obtient une factorisation de la diagonale $X \rightarrow X \times X$ en une \mathcal{C} -équivalence faible suivie d'une \mathcal{C} -fibration :

$$X \simeq \{\mathbf{1}, X\} \longrightarrow \{\text{Cyl}(\mathbf{1}), X\} \longrightarrow \{\mathbf{1} \amalg \mathbf{1}, X\} \simeq \{\mathbf{1}, X\} \times \{\mathbf{1}, X\} \simeq X \times X$$

En effet, comme X est fibrant, pour tout $c \in \mathcal{C}$, le foncteur $\{-, X\}(c) = \{-, X(c)\} : \mathcal{V}^{op} \rightarrow \mathcal{M}$ est un foncteur de Quillen à droite. On a ainsi un objet chemin pour chaque objet de \mathcal{DM} . En utilisant que tout objet est fibrant, on en déduit que les $F_{\mathcal{C}}(J)$ -cellules sont des \mathcal{C} -équivalences faibles exactement comme dans [SS, Lemma 2.3]. ■

Soit U un ensemble et un foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$ à valeurs cofibrantes. Soient $(\mathcal{D}, \boxtimes, 1)$ une petite \mathcal{V} -catégorie monoïdale (resp. symétrique) et une factorisation :

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$$

du foncteur K telle que \bar{K} soit un foncteur monoïdal (resp. symétrique) fort.

On note U^{\otimes} l'ensemble des objets de la sous-catégorie monoïdale de $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ engendrée par l'image de U . On munit la catégorie des \mathcal{D} - \bar{K} -spectres $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) = \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$ de la structure U^{\otimes} -projective.

Pour tout $d \in U^{\otimes}$, on a une adjonction de Quillen $F_d : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) : E_d$, pour le modèle U^{\otimes} -projectif.

Pour assurer l'existence du modèle U^{\otimes} -projectif sur la catégorie des \mathcal{D} - \bar{K} -spectres $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, il suffit que $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ soit à morphismes cofibrants, i.e. : pour tout $d, e \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, e) \simeq \int^a \mathcal{D}(ad, e) \otimes \bar{K}(a)$ est cofibrant. Cette propriété a également le mérite de faire du modèle U^{\otimes} -projectif sur $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ un modèle propre à gauche dès que \mathcal{M} l'est.

Lemme 2.2. *Si $(\mathcal{D}, \bar{K}) = (\mathbb{N}(U), K^{\mathbb{N}})$ ou $(\Sigma(U), K^{\Sigma})$, la catégorie $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ est à morphismes cofibrants.*

Démonstration. D'une part, pour tout mots $\underline{u}, \underline{v} \in M(U)$:

$$\mathbb{N}(U)_{K^{\mathbb{N}}}(\underline{u}, \underline{v}) = \int^{\mathbb{N}(U) \ni \underline{w}} \mathbb{N}(U)(\underline{w}\underline{u}, \underline{v}) \otimes K^{\mathbb{N}}(\underline{w}) \simeq \begin{cases} K^{\mathbb{N}}(\underline{w}) & \text{si } \underline{v} = \underline{w}\underline{u}, \\ \emptyset_{\mathcal{V}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\emptyset_{\mathcal{V}}$ est l'objet initial de \mathcal{V} , est cofibrant. D'autre part, d'après le lemme 4.2, on a l'équivalence de catégorie : $\Sigma(U)_{K^{\Sigma}} \simeq \otimes_{u \in U} \Sigma(\{u\})_{K_u^{\Sigma}}$. Or, on a $\Sigma(\{u\})_{K_u^{\Sigma}}(m, n) \simeq \Sigma_m \times_{\Sigma_{m-n}} K_u^{\otimes(m-n)}$ si $m \geq n$ ($\emptyset_{\mathcal{V}}$ sinon), qui est un coproduit de copies de $K_u^{\otimes(m-n)}$ indexées par Σ_m / Σ_{m-n} . ■

Concernant la compatibilité du modèle U^{\otimes} -projectif avec les structures monoïdales et enrichies, on a :

Proposition 2.3. *On suppose que les structures U^{\otimes} -projectives sur $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ et $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ constituent des catégories modèles et que la paire (\mathcal{D}, \bar{K}) est symétrique. Si l'unité $\mathbf{1}$ de \mathcal{V} est cofibrante ou si la catégorie $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ est à morphismes cofibrants, alors les catégories $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ et $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ sont respectivement une catégorie modèle monoïdale symétrique et une $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -catégorie modèle.*

L'adjonction $F_1 : \mathcal{V} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) : E_1$ est alors une adjonction monoïdale symétrique de Quillen.

Démonstration. L'axiome du produit amalgamé [Ho1, Def. 4.2.6-1] pour $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$ découle du même axiome pour \mathcal{V} et \mathcal{M} respectivement, via l'isomorphisme :

$F_d(f) \square F_e(g) \simeq F_{d \boxtimes e}(f \square g)$, où \square désigne le produit amalgamé [Ho1, Def. 4.2.1], et la forme des cofibrations (triviales) génératrices projectives. Par ailleurs, soient $\mathbf{1}^c \rightarrow \mathbf{1}$ une résolution cofibrante et X un objet cofibrant de $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$. Comme $F_1(M)(d) = \bar{K}(d) * M$, le fait que le foncteur $\bar{K} : U^\otimes \rightarrow \mathcal{V}$ soit à valeurs cofibrantes et l'axiome de l'unité [Ho1, Def. 4.2.6-2] pour \mathcal{V} impliquent que le morphisme $F_1(\mathbf{1}^c) \rightarrow F_1(\mathbf{1}) \simeq \mathbf{1}$ est une résolution cofibrante U^\otimes -projective. Comme $(F_1(V) * X)(d) = V * X(d)$, l'axiome de l'unité pour \mathcal{M} montre que le morphisme $F_1(\mathbf{1}^c) * X \rightarrow F_1(\mathbf{1}) * X \simeq X$ est aussi une équivalence projective, ce qui prouve l'axiome de l'unité pour $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$. ■

2.2 Modèle stable

On garde les notations de la section précédente et on munit maintenant les catégories de spectres d'une structure de catégorie modèle "stable", dont on considère les conditions d'existence et de compatibilité avec les structures monoïdales et enrichies.

Pour $d \in \mathcal{D}$, on note toujours (F_d, E_d) l'adjonction $\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$, on notera temporairement (F'_d, E'_d) l'adjonction $\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{DM}$. Ainsi, on a un isomorphisme naturel :

$$F_d(M) \simeq \bar{K} * F'_d(M) = \int^{a,b} \mathcal{D}(ab, -) * (\bar{K}(a) * F'_d(M)(b))$$

Soient $u \in U$, $d \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{M}$. On note $\zeta_{u,d}^C : F_{ud}(K_u * C) \rightarrow F_d(C)$, le morphisme de $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$ adjoint du morphisme composé :

$$\begin{aligned} K_u * C &\longrightarrow \bar{K}(u) * E'_d(F'_d(C)) \longrightarrow \mathcal{D}(ud, ud) * (\bar{K}(u) * F'_d(C)(d)) \\ &\longrightarrow \int^{a,b} \mathcal{D}(ab, ud) * (\bar{K}(a) * F'_d(C)(b)) = E_{ud}(F_d(C)) \end{aligned}$$

Définition 2.4 On appelle équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ un morphisme $\zeta_{u,d}^C$ où $d \in U^\otimes$ et C est une résolution cofibrante fixée de la source ou du but d'une cofibration génératrice de \mathcal{M} . La structure stable sur $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ est la localisation à la Bousfield de la structure U^\otimes -projective relativement aux équivalences stables élémentaires.

Dorénavant, sauf indication contraire, la catégorie $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ est munie de la structure stable.

Définition 2.5 Un spectre X est un Ω -spectre si X est fibrant projectif et, pour tout $u \in U$, $d \in U^\otimes$, l'adjoint du morphisme structurel : $\tilde{\sigma}_{u,d} : X(d) \rightarrow \{K_u, X(ud)\}$ est une équivalence faible de \mathcal{M} .

Proposition 2.6. *Les spectres fibrants stables coïncident avec les Ω -spectres si et seulement si les morphismes $\zeta_{u,d}^C$ sont des équivalences stables pour tout $d \in U^\otimes$ et tout C cofibrant de \mathcal{M} . Si \mathcal{M} est propre à gauche ou si les sources des cofibrations génératrices sont cofibrantes, alors les spectres fibrants stables coïncident avec les Ω -spectres.*

Démonstration. Cela découle des définitions, via les adjonctions (F_d, E_d) , où $d \in U^\otimes$, et $(K_u * -, \{K_u, -\})$, et la proposition [Ho2, Prop. 3.2] (cf. proposition A.2). ■

Définition 2.7 Une \mathcal{V} -catégorie modèle engendrée par cofibrations \mathcal{M} est dite \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable si la structure U^\otimes -projective sur $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$ est une structure de \mathcal{V} -catégorie modèle, si la localisation de Bousfield de cette structure, relativement à l'ensemble des équivalences stables élémentaires, existe, et si les spectres fibrants stables sont les Ω -spectres.

Une \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{M} est dite Σ -stabilisable (resp. \mathbb{N} -stabilisable) si elle est $\Sigma(U)$ - K^Σ -stabilisable (resp. $\mathbb{N}(U)$ - $K^\mathbb{N}$ -stabilisable) pour tout ensemble U et tout foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$ à valeurs cofibrantes.

Remarque 2.8 Les catégories modèles combinatoires propres à gauche sont \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisables dès que la petite \mathcal{V} -catégorie $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ est à morphismes cofibrants, via [Du1, p. 13]. Également, les catégories modèles cellulaires propres à gauche sont \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisables dès que la petite \mathcal{V} -catégorie $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ est à morphismes cofibrants, par la proposition A.3 et [Hi, Th. 4.1.1]. En particulier, ces catégories modèles sont Σ -stabilisables (resp. \mathbb{N} -stabilisables), par le lemme 2.2.

Théorème 2.9. *On suppose que \mathcal{V} et \mathcal{M} sont \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisables, que les sources de leurs cofibrations génératrices sont cofibrantes, et que la paire (\mathcal{D}, \bar{K}) est symétrique. Si l'unité $\mathbf{1}$ de \mathcal{V} est cofibrante ou si la catégorie $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ est à morphismes cofibrants, alors les catégories $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ et $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, munies de la structure stable, sont respectivement une catégorie modèle monoïdale symétrique et une $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -catégorie modèle.*

L'adjonction $F_1 : \mathcal{V} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) : E_1$ est alors encore une adjonction monoïdale symétrique de Quillen.

Démonstration. On note d'abord que ces propriétés sont vérifiées par les modèles U^\otimes -projectifs (Proposition 2.3). Comme les cofibrations stables sont les cofibrations projectives, l'axiome d'unité stable se déduit de sa version projective. De plus, dans la vérification de l'axiome du produit amalgamé, on peut supposer que les cofibrations qui ne sont pas triviales sont des cofibrations génératrices. Il suffit alors que les foncteurs $- * F_u(C) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) \rightarrow Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, où $u \in U$ et C est source ou but de cofibration génératrice de \mathcal{M} , soient des foncteurs de Quillen à gauche pour le modèle stable. Or, d'une part, ils sont Quillen à gauche pour le modèle projectif car C est cofibrant par hypothèse, et, d'autre part, ils envoient les équivalences stables élémentaires dans les équivalences stables. En effet, pour toute équivalence stable élémentaire $\zeta_{v,d}^{C'} : F_{vd}(K_v \otimes C') \rightarrow F_d(C')$, on a : $\zeta_{v,d}^{C'} * F_u(C) \simeq \zeta_{v,du}^{C' * C}$. ■

2.3 Functorialités

On considère ici la compatibilités des propriétés de functorialités de la section 1.3 avec les structures de catégorie modèle.

Théorème 2.10. *Soit \mathcal{V} une catégorie modèle monoïdale symétrique \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable telle que $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ soit une catégorie modèle monoïdale symétrique. Dans les assertions (2) et (3), on suppose que la paire (\mathcal{D}, \bar{K}) est symétrique.*

(1) Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux \mathcal{V} -catégories modèles \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisables. Soit $\Phi : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M}' : \Psi$ une \mathcal{V} -adjonction de Quillen. Il existe une adjonction de Quillen :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'; K) : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$$

telle que $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \simeq \Phi \circ E_d$ et $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Psi) \simeq \Psi \circ E_d$. Il s'agit d'une $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -adjonction de Quillen si $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'; K)$ sont des $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -catégories modèles.

(2) Soient \mathcal{W} une catégorie modèle monoïdale symétrique et $\Phi : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{W} : \Psi$ une adjonction monoïdale de Quillen. On suppose que \mathcal{W} est $\Phi(\mathcal{D})$ - $\Phi(\bar{K})$ -stabilisable telle que $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{W}; \Phi(K))$ soit une catégorie modèle monoïdale symétrique. Il existe une adjonction monoïdale de Quillen :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{W}; \Phi(K)) : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$$

telle que $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \simeq \Phi \circ E_d$ et $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Psi) \simeq \Psi \circ E_d$.

(3) Soit \mathcal{U} une catégorie modèle monoïdale symétrique et $\Gamma : \mathcal{U} \rightleftarrows \mathcal{V} : \Phi$ une adjonction de Quillen telle que Φ soit un foncteur monoïdal symétrique fermé fort. On suppose que \mathcal{U} est $\Phi(\mathcal{D})$ - $\Phi(\bar{K})$ -stabilisable telle que $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{U}; \Phi(K))$ soit une catégorie modèle monoïdale symétrique. Il existe une adjonction de Quillen :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{U}; \Phi(K)) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K) : Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)$$

telle que $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma) \simeq \Gamma \circ E_d$ et $E_d \circ Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) \simeq \Phi \circ E_d$.

De plus, lorsque les foncteurs E_d , $d \in U^{\otimes}$, préservent les cofibrations, si l'adjonction (Φ, Ψ) (resp. (Γ, Φ)) est une équivalence de Quillen, alors l'adjonction $(Sp^{\mathcal{D}}(\Phi), Sp^{\mathcal{D}}(\Psi))$ (resp. $(Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma), Sp^{\mathcal{D}}(\Phi))$) en est une également.

Démonstration. On remarque que, pour chacune des adjonctions considérées, les foncteurs constituant ces adjonctions commutent avec les foncteurs évaluations. Il en découle que si les adjonctions (Φ, Ψ) (resp. (Γ, Φ)) sont de Quillen, il en va de même pour les adjonctions $(Sp^{\mathcal{D}}(\Phi), Sp^{\mathcal{D}}(\Psi))$ (resp. $(Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma), Sp^{\mathcal{D}}(\Phi))$) pour le modèle projectif.

Pour avoir une adjonction de Quillen pour le modèle stable, il suffit que l'adjoint à gauche $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)$ (resp. $Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)$) envoie les équivalences stables élémentaires dans les équivalences stables. Or, si $\zeta_{u,d}^C : F_{ud}(K_u * C) \rightarrow F_d(C)$ désigne une équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, on a :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(\zeta_{u,d}^C) \simeq \zeta_{u,d}^{\Phi(C)} : F_{ud}(K_u * \Phi(C)) \rightarrow F_d(\Phi(C))$$

Si $\zeta_{u,d}^C : F_{ud}(K_u \otimes C) \rightarrow F_d(C)$ désigne une équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$, on a :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(\zeta_{u,d}^C) \simeq \zeta_{u,d}^{\Phi(C)} : F_{ud}(\Phi(K_u) \otimes \Phi(C)) \rightarrow F_d(\Phi(C))$$

Et si $\zeta_{u,d}^C : F_{ud}(\Phi(K_u) * C) \rightarrow F_d(C)$ désigne une équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{U}; \Phi(K))$, on a :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Gamma)(\zeta_{u,d}^C) \simeq \zeta_{u,d}^{\Gamma(C)} : F_{ud}(K_u * \Gamma(C)) \rightarrow F_d(\Gamma(C))$$

On suppose désormais que l'adjonction (Φ, Ψ) (resp. (Γ, Φ)) est une équivalence de Quillen. Pour montrer que l'adjonction

$$Sp^{\mathcal{D}}(\Phi) : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'; K) : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$$

est une équivalence de Quillen pour le modèle projectif, il faut et suffit de montrer que l'unité d'adjonction $: Id \rightarrow \mathbf{R}(Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)) \circ \mathbf{L}(Sp^{\mathcal{D}}(\Phi))$ est un isomorphisme, et que $\mathbf{R}(Sp^{\mathcal{D}}(\Psi))$ reflète les isomorphismes. Les situations (2) et (3) se traitent de façon similaire.

Le foncteur $\mathbf{R}(Sp^{\mathcal{D}}(\Psi))$ reflète les isomorphismes car $: \tilde{E}_d \circ \mathbf{R}(Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)) \simeq \mathbf{R}(\Psi) \circ \tilde{E}_d$, et les foncteurs \tilde{E}_d , $d \in U^{\otimes}$, reflètent collectivement les isomorphismes. Pour que $Id \rightarrow \mathbf{R}(Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)) \circ \mathbf{L}(Sp^{\mathcal{D}}(\Phi))$ soit un isomorphisme, il suffit que, pour tout cofibrant $X \in Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, l'unité d'adjonction $: X \rightarrow Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)(Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)^f)$ soit une équivalence faible U^{\otimes} -projective, où $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)^f$ dénote une résolution fibrante projective de $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)(X)$. En utilisant le fait que les foncteurs E_d , $d \in U^{\otimes}$, préservent résolutions fibrantes et cofibrantes, ceci se déduit de ce que, pour tout $d \in U^{\otimes}$, le morphisme $X(d) \rightarrow \Psi(\Phi(X(d))^f)$ est une équivalence faible car (Φ, Ψ) est une équivalence de Quillen.

Pour montrer que l'adjonction $(Sp^{\mathcal{D}}(\Phi), Sp^{\mathcal{D}}(\Psi))$ est une équivalence de Quillen pour le modèle stable, il suffit de montrer que $Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)$ reflète les fibrants stables, parmi les fibrants projectifs. Soit un fibrant projectif $Y \in Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'; K)$, tel que $Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)(Y)$ soit un fibrant stable, i.e. : pour tout $d \in U^{\otimes}$, $u \in U$, le morphisme $\tilde{\sigma}_{u,d} : Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)(Y)(d) \rightarrow \{K_u, Sp^{\mathcal{D}}(\Psi)(Y)(ud)\}$ est une équivalence faible. Ce dernier morphisme est isomorphe à $: \Psi(\tilde{\sigma}_{u,d}) : \Psi(Y(d)) \rightarrow \Psi(\{K_u, Y(ud)\})$, ce qui montre que Y est fibrant stable car Ψ reflète les équivalences faibles entre fibrants. ■

Remarque 2.11 Dans les contextes (1) et (2), si l'adjoint à gauche Φ préserve les équivalences faibles, il en va de même du foncteur $Sp^{\mathcal{D}}(\Phi)$.

On se replace maintenant dans le cadre de la proposition 1.10. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux petites catégories monoïdales (resp. symétriques) et une factorisation du foncteur K :

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\iota} \mathcal{D}' \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$$

telle que ι et \bar{K} soient des foncteurs monoïdaux (resp. symétriques) forts.

Proposition 2.12. *Soient \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{D} - $\bar{K}\iota$ -stabilisable et \mathcal{D}' - \bar{K} -stabilisable. La \mathcal{V} -adjonction $\bar{\iota}_1 : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ est une adjonction de Quillen.*

Démonstration. L'adjonction $\bar{\iota}_1 : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ étant induite par un foncteur $\bar{\iota} : \mathcal{D}_{\bar{K}\iota} \rightarrow \mathcal{D}'_{\bar{K}}$, l'adjoint à droite $\bar{\iota}^*$, précomposition par $\bar{\iota}$, préserve les équivalences faibles et fibrations U^{\otimes} -projectives et $(\bar{\iota}_1, \bar{\iota}^*)$ est donc une adjonction de Quillen pour le modèle U^{\otimes} -projectif.

Si $\zeta_{u,d}^C : F_{ud}(K_u * C) \rightarrow F_d(C)$ désigne une équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, on a $\bar{\iota}_1(\zeta_{u,d}^C) \simeq \zeta_{u,\iota(d)}^C : F_{u\iota(d)}(K_u * C) \rightarrow F_{\iota(d)}(C)$, qui est une équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K)$, ce qui démontre la proposition. ■

Remarque 2.13 Toute factorisation $U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$ donne lieu à un diagramme $: U \rightarrow U^{\otimes} \xrightarrow{\iota} \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$. La \mathcal{V} -adjonction $\bar{\iota}_1 : Sp^{U^{\otimes}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ est une équivalence de Quillen pour les modèles U^{\otimes} -projectifs, et donc pour les modèles stables.

3 Propriétés

Dans toute cette section, \mathcal{V} désigne une catégorie modèle monoïdale symétrique, et \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle.

3.1 Inversibilité

Soient un ensemble U et une factorisation d'un foncteur à valeurs cofibrantes $K : U \rightarrow \mathcal{V}$:

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$$

telle que \mathcal{D} soit une catégorie monoïdale *symétrique* et \bar{K} un foncteur monoïdal *symétrique* fort. En particulier, $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ est une $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -catégorie.

Définition 3.1 Les $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -endofoncteurs de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, décalage à droite s_u^- et décalage à gauche s_u^+ , où $u \in U$, sont définis respectivement par : $s_u^-(X) = \{F_u(\mathbf{1}), X\}$ et $s_u^+(X) = F_u(\mathbf{1}) * X$.

La pair de foncteurs (s_u^+, s_u^-) est une $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{V}; K)$ -adjonction. C'est en particulier une \mathcal{V} -adjonction, et les foncteurs s_u^+ et s_u^- commutent avec les foncteurs $K_v * -$ et $\{K_v, -\}$ respectivement.

Par le lemme 1.3, on a l'isomorphisme : $F_u(\mathbf{1}) * F_d(-) \simeq F_{ud}(\mathbf{1} * -) \simeq F_{ud}(-)$. On en déduit les isomorphismes : $s_u^+ \circ F_d \simeq F_{ud}$ et, par adjonction, $E_{ud} \simeq E_d \circ s_u^-$. Ceci montre que s_u^- est un foncteur de Quillen à droite pour le modèle projectif et que $s_u^+(\zeta_{d,v}^C) \simeq \zeta_{du,v}^C$, donc que (s_u^+, s_u^-) est une adjonction de Quillen pour le modèle stable.

Théorème 3.2. *On suppose que \mathcal{M} est \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable. Pour tout $u \in U$, les foncteurs $K_u * -$ et s_u^+ sont des équivalences de Quillen pour le modèle stable de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$. De plus, les foncteurs dérivés totaux $\mathbf{R}(s_u^-)$ et $\mathbf{L}(K_u * -)$ (resp. $\mathbf{R}(\{K_u, -\})$ et $\mathbf{L}(s_u^+)$) sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. Soit le morphisme $\zeta_{u,1}^1 : F_u(K_u) \rightarrow F_1(\mathbf{1}) = \bar{K}$ adjoint de l'isomorphisme $K_u \xrightarrow{\sim} E_u(\bar{K})$. En lui appliquant le foncteur $\{-, X\}$, où $X \in Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, on obtient :

$$X \simeq \{F_1(\mathbf{1}), X\} \rightarrow \{F_u(K_u), X\} \simeq \{K_u, s_u^-(X)\}$$

L'évaluation en $d \in \mathcal{D}$ donne : $X(d) \rightarrow \{K_u, E_d(s_u^-(X))\} \simeq \{K_u, X(ud)\}$, le morphisme adjoint du morphisme structurel. Il s'en suit que, si X est fibrant stable, le morphisme $X \rightarrow \{K_u, s_u^-(X)\}$ est une équivalence projective, a fortiori stable. On a donc un isomorphisme : $Id \rightarrow \mathbf{R}(\{K_u, -\}) \circ \mathbf{R}(s_u^-)$, et comme $\mathbf{R}(\{K_u, -\})$ et $\mathbf{R}(s_u^-)$ commutent, ils sont quasi-inverse l'un de l'autre, ce qui démontre le théorème. ■

3.2 Idempotence

Soient un ensemble U et une factorisation d'un foncteur à valeurs cofibrantes $K : U \rightarrow \mathcal{V}$:

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$$

telle que \mathcal{D} soit une catégorie monoïdale (resp. symétrique) et \bar{K} un foncteur monoïdal (resp. symétrique) fort.

On considère l'adjonction de Quillen $F_1 : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) : E_1$.

Théorème 3.3. *On suppose que la catégorie \mathcal{M} est \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable.*

(1) *Si, pour tout $u \in U$, l'unité d'adjonction de $\mathcal{M} : Id \rightarrow \mathbf{R}(\{K_u, -\}) \circ \mathbf{L}(K_u * -)$ est un isomorphisme, alors l'unité d'adjonction $\eta : Id \rightarrow \mathbf{R}(E_1) \circ \mathbf{L}(F_1)$ est également un isomorphisme.*

(2) *Si, pour tout $u \in U$, l'endofoncteur de $\mathcal{M} : \mathbf{R}(\{K_u, -\})$ reflète les isomorphismes, alors le foncteur $\mathbf{R}(E_1)$ reflète également les isomorphismes.*

*En particulier, si, pour tout $u \in U$, l'adjonction de $\mathcal{M} (K_u * -, \{K_u, -\})$ est une équivalence de Quillen, alors l'adjonction $F_1 : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) : E_1$ est une équivalence de Quillen.*

Démonstration. (1) Comme \bar{K} est monoïdal fort, on a, pour tout $u \in U$, $d \in \mathcal{D}$, un isomorphisme $K_u \otimes \bar{K}(d) \xrightarrow{\sim} \bar{K}(ud)$. Comme $F_1(M) = \bar{K} * M$, ceci donne un isomorphisme $K_u * F_1(M)(d) \xrightarrow{\sim} F_1(M)(ud)$. On suppose désormais que M est cofibrant, et on remarque que $F_1(M)(d)$ est cofibrant pour tout $d \in U^{\otimes}$. On note $F_1(M)^f$ une résolution fibrante projective de $F_1(M)$, et on rappelle que les foncteurs E_d préservent les fibrants projectifs. En composant l'isomorphisme précédent avec l'évaluation de la résolution fibrante, on obtient une équivalence faible $K_u * F_1(M)(d) \rightarrow F_1(M)^f(ud)$. Comme l'unité de l'adjonction $(\mathbf{L}(K_u * -), \mathbf{R}(\{K_u, -\}))$ est un isomorphisme, le morphisme adjoint $F_1(M)(d) \rightarrow \{K_u, F_1(M)^f(ud)\}$ est également une équivalence faible, ainsi, donc, que :

$$F_1(M)^f(d) \rightarrow \{K_u, F_1(M)^f(ud)\} = \{K_u, F_1(M)^f\}(ud)$$

Autrement dit, $F_1(M)^f$ est un Ω -spectre, c'est-à-dire un fibrant stable. Il en découle que l'équivalence faible composée $M \xrightarrow{\sim} E_1(F_1(M)) \rightarrow E_1(F_1(M)^f)$ modélise le morphisme $\eta_M : M \rightarrow (\mathbf{R}(E_1) \circ \mathbf{L}(F_1))(M)$ qui est donc un isomorphisme.

(2) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ tel que $\mathbf{R}(E_1)(f)$ soit un isomorphisme. On peut supposer que f est un morphisme entre fibrants stables, et on est ainsi amené à montrer que E_1 reflète les équivalences projectives entre Ω -spectres. Si $E_d(f) = f(d) : X(d) \rightarrow Y(d)$ est une équivalence faible de \mathcal{M} , alors, pour tout $u \in U$, $\{K_u, f(ud)\} : \{K_u, X(ud)\} \rightarrow \{K_u, Y(ud)\}$ est une équivalence faible, car X et Y sont des Ω -spectres. Le morphisme $f(ud) : X(ud) \rightarrow Y(ud)$ est donc une équivalence faible, car $\{K_u, -\}$ est l'adjoint à droite d'une équivalence de Quillen. On en déduit par récurrence que si $E_1(f)$ est une équivalence faible, f est une équivalence U^{\otimes} -projective. ■

3.3 Invariance homotopique

Soient $K, K' : U \rightarrow \mathcal{V}$ deux foncteurs à valeurs cofibrantes et une transformation naturelle $\varphi : K \rightarrow K'$. Soient une petite \mathcal{V} -catégorie monoïdale (resp. symétrique) \mathcal{D} et un foncteur $U \xrightarrow{\iota} \mathcal{D}$.

On suppose qu'il existe des foncteurs monoïdaux (resp. symétriques) forts $\bar{K}, \bar{K}' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ tels que $K = \bar{K} \circ \iota$ et $K' = \bar{K}' \circ \iota$, ainsi qu'une transformation naturelle monoïdale $\bar{\varphi} : \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \iota$.

Théorème 3.4. *Soit \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable et \mathcal{D} - \bar{K}' -stabilisable, dont les sources des cofibrations génératrices sont cofibrantes. On suppose que $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ et $\mathcal{D}_{\bar{K}'}$ sont à morphismes cofibrants. Si, pour tout $d, d' \in U^\otimes$, le morphisme :*

$$\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d') \simeq \int^a \mathcal{D}(ad, d') \otimes \bar{K}(a) \longrightarrow \int^a \mathcal{D}(ad, d') \otimes \bar{K}'(a) \simeq \mathcal{D}_{\bar{K}'}(d, d')$$

induit par $\bar{\varphi}$ est une équivalence faible, alors $\bar{\varphi}$ induit une équivalence de Quillen :

$$\bar{\varphi}_! : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K') : \bar{\varphi}^*$$

Démonstration. La transformation naturelle monoïdale $\bar{\varphi}$ correspond à un morphisme de monoïde dans $\mathcal{D}\mathcal{V}$ et induit ainsi une adjonction “extension/restriction” $\bar{\varphi}_! : \bar{K} - \mathcal{D}\mathcal{M} \rightleftarrows \bar{K}' - \mathcal{D}\mathcal{M} : \bar{\varphi}^*$, où $\bar{\varphi}_!(X) = \bar{K}' *_{\bar{K}} X$ et l'action sur $\bar{\varphi}^*(Y)$ est définie par $\bar{K} * Y \rightarrow \bar{K}' * Y \rightarrow Y$.

Il est clair que $\bar{\varphi}^*$ préserve les équivalences faibles et les fibrations U^\otimes -projectives et donc que $(\bar{\varphi}_!, \bar{\varphi}^*)$ est une adjonction de Quillen pour le modèle U^\otimes -projectif. On note (F_d, E_d) l'adjonction $\mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et (F'_d, E'_d) l'adjonction $\mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K')$. On a $E'_d \simeq E_d \circ \bar{\varphi}^*$ et donc $F'_d \simeq \bar{\varphi}_! \circ F_d$. Si $\zeta_{u,d}^C : F_{ud}(K_u * C) \rightarrow F_d(C)$ est une équivalence stable élémentaire de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, $\bar{\varphi}_!(\zeta_{u,d}^C)$ est la composée de $F'_{ud}(\varphi_u * C) : F'_{ud}(K_u * C) \rightarrow F'_{ud}(K_u * C')$ et de l'équivalence stable élémentaire $\zeta_{u,d}^C : F'_{ud}(K_u * C') \rightarrow F'_d(C)$. Comme $\varphi_u : K_u \rightarrow K'_u$ est une équivalence faible entre cofibrants, $F'_{ud}(C * \varphi_u)$ est une équivalence projective, et donc $\bar{\varphi}_!(\zeta_{u,d}^C)$ une équivalence stable. L'adjonction $(\bar{\varphi}_!, \bar{\varphi}^*)$ est donc une adjonction de Quillen pour le modèle stable.

Pour montrer que l'adjonction $\bar{\varphi}_! : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K') : \bar{\varphi}^*$ est une équivalence de Quillen pour le modèle projectif, il faut et suffit de montrer que l'unité d'adjonction : $Id \rightarrow \bar{\varphi}^* \circ \mathbf{L}(\bar{\varphi}_!)$ est un isomorphisme, et que $\bar{\varphi}^*$ reflète les isomorphismes. Ce dernier point découle de ce que $\bar{\varphi}^*$ reflète les équivalences faibles U^\otimes -projectives. Il suffit donc de montrer que pour tout cofibrant $X \in Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$, l'unité d'adjonction : $\eta_X : X \rightarrow \bar{\varphi}^*(\bar{\varphi}_!(X))$ est une équivalence faible U^\otimes -projective. On peut supposer que X est un $F_{U^\otimes}(I)$ -complexe, où I est l'ensemble des cofibrations génératrices de \mathcal{M} . Comme, pour $d \in U^\otimes$, les foncteurs $E'_d : \mathcal{D}_{\bar{K}'}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ préservent les cofibrations, on peut utiliser le lemme du cube, [Ho1, 5.2.6] ou [Hi, 16.9.10], ainsi que [Hi, 18.10.1], pour se ramener, par récurrence, au cas où X est source ou but d'élément de $F_{U^\otimes}(I)$. Il suffit donc de considérer les cas où $X = F_d(M) = \mathcal{D}_{\bar{K}}(d, -) * M$, avec M cofibrant de \mathcal{M} et $d \in U^\otimes$. Mais l'unité : $\eta_{F_d(M)}(d') : F_d(M)(d') \rightarrow \bar{\varphi}^*(\bar{\varphi}_!(F_d(M)))(d') \simeq \bar{\varphi}^*(F'_d(M))(d')$ n'est autre que le morphisme $\mathcal{D}_{\bar{K}}(d, d') * M \rightarrow \mathcal{D}_{\bar{K}'}(d, d') * M$.

Enfin, pour montrer que l'adjonction $(\bar{\varphi}_!, \bar{\varphi}^*)$ est une équivalence de Quillen pour le modèle stable, on vérifie que $\bar{\varphi}^*$ reflète les fibrants stables parmi les fibrants

projectifs. Soit un fibrant projectif $Y \in Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K')$ tel que $\bar{\varphi}^*(Y)$ soit fibrant stable. Pour tout $d \in U^{\otimes}$, $u \in U$, $\bar{\sigma}_{u,d} : Y(d) \rightarrow \{K_u, Y(ud)\}$ est composé de $\bar{\sigma}'_{u,d} : Y(d) \rightarrow \{K'_u, Y(ud)\}$, équivalence faible par hypothèse, et de $\{\varphi_u, Y(ud)\} : \{K'_u, Y(ud)\} \rightarrow \{K_u, Y(ud)\}$, équivalence faible car φ_u est une équivalence faible entre cofibrants. ■

La situation décrite au début de cette section apparaît naturellement avec les factorisations fonctorielles donnant lieu aux spectres et aux spectres symétriques : une transformation naturelle $\varphi : K \rightarrow K'$ induit une transformation naturelle monoïdale (resp. symétrique) $\varphi^{\mathbb{N}} : K^{\mathbb{N}} \rightarrow K'^{\mathbb{N}}$ (resp. $\varphi^{\Sigma} : K^{\Sigma} \rightarrow K'^{\Sigma}$) telle que $\varphi = \varphi^{\mathbb{N}} \circ \iota$ (resp. $\varphi = \varphi^{\Sigma} \circ \iota$).

Corollaire 3.5. *Soit \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle \mathbb{N} -stabilisable (resp. Σ -stabilisable), dont les sources des cofibrations génératrices sont cofibrantes. Si, pour tout $u \in U$, $\varphi_u : K_u \rightarrow K'_u$ est une équivalence faible, alors $\bar{\varphi}$ induit une équivalence de Quillen : $\bar{\varphi}_! : Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}; K') : \bar{\varphi}^*$ (resp. $\bar{\varphi}_! : Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K') : \bar{\varphi}^*$).*

Démonstration. Comme, pour tout $u_1, \dots, u_n \in U$, le morphisme $\bigotimes \varphi_{u_i} : \bigotimes K_{u_i} \rightarrow \bigotimes K'_{u_i}$ est une équivalence faible entre cofibrants, ce corollaire découle du théorème 3.4 et des calculs effectués dans la démonstration du lemme 2.2. ■

Remarque 3.6 Le théorème 4.5 fournit un autre résultat d'invariance homotopique.

4 Stabilisations itérées et comparaisons

Comme dans la section précédente, \mathcal{V} désigne une catégorie modèle monoïdale symétrique, et \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle.

4.1 Factorisation produit

Soient U, V deux ensembles et des foncteurs $K : U \rightarrow \mathcal{V}$ et $L : V \rightarrow \mathcal{V}$ à valeurs cofibrantes. Soient $(\mathcal{D}, \boxtimes, 1), (\mathcal{D}', \boxtimes', 1')$ deux petites \mathcal{V} -catégories monoïdales (resp. symétriques) et les factorisations de K et L respectivement :

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V} \quad \text{et} \quad V \rightarrow \mathcal{D}' \xrightarrow{\bar{L}} \mathcal{V}$$

telles que \bar{K} et \bar{L} soient des foncteurs monoïdaux (resp. symétriques) forts.

Le foncteur composé $\bar{K} \otimes \bar{L} : \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}' \xrightarrow{(K,L)} \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{V}$ est monoïdal (resp. symétrique) fort, avec : $\mathbf{1} \simeq \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \bar{K}(1) \otimes \bar{L}(1') = (\bar{K} \otimes \bar{L})(1, 1')$ et, pour tout $(d_1, d'_1), (d_2, d'_2) \in \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$:

$$\begin{aligned} (\bar{K} \otimes \bar{L})(d_1, d'_1) \otimes (\bar{K} \otimes \bar{L})(d_2, d'_2) &= \bar{K}(d_1) \otimes \bar{L}(d'_1) \otimes \bar{K}(d_2) \otimes \bar{L}(d'_2) \\ &\simeq \bar{K}(d_1) \otimes \bar{K}(d_2) \otimes \bar{L}(d'_1) \otimes \bar{L}(d'_2) \\ &\xrightarrow{\sim} \bar{K}(d_1 \boxtimes d_2) \otimes \bar{L}(d'_1 \boxtimes d'_2) \\ &= (\bar{K} \otimes \bar{L})(d_1 \boxtimes d_2, d'_1 \boxtimes d'_2) \end{aligned}$$

Les foncteurs $U \rightarrow \mathcal{D} \simeq \mathcal{D} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$ et $V \rightarrow \mathcal{D}' \simeq \mathcal{I}_{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$ définissent un unique foncteur $U \amalg V \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$. La précomposition de $\bar{K} \otimes \bar{L}$ par ce foncteur

coincide avec $K \amalg L$. On peut donc noter $\overline{K \amalg L}$ pour $\bar{K} \otimes \bar{L}$, et on a ainsi obtenu une factorisation produit de $K \amalg L$:

$$U \amalg V \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}' \xrightarrow{\overline{K \amalg L}} \mathcal{V}$$

telle que $\overline{K \amalg L}$ soit un foncteur monoïdal (resp. symétrique) fort.

Lemme 4.1. *Les catégories $\mathcal{D}_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}}$ et $(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')_{\overline{K \amalg L}}$ sont isomorphes. Si, de plus, les paires (\mathcal{D}, \bar{K}) et (\mathcal{D}', \bar{L}) sont symétriques, elles sont isomorphes comme catégories monoïdales symétriques.*

Démonstration. Les deux catégories ont le même ensemble d'objets. Soient $(d_1, d'_1), (d_2, d'_2) \in \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$. On a les isomorphismes naturels :

$$(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')_{\overline{K \amalg L}}((d_1, d'_1), (d_2, d'_2)) \simeq [(\bar{K} \otimes \bar{L}) \wedge (\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')((-, -), (d_2, d'_2))] (d_1, d'_1)$$

$$\mathcal{D}_{\bar{K}}(d_1, d_2) \simeq [\bar{K} \wedge \mathcal{D}(-, d_2)] (d_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'_{\bar{L}}(d'_1, d'_2) \simeq [\bar{L} \wedge \mathcal{D}'(-, d'_2)] (d'_1)$$

La description du produit de convolution \wedge en terme de cofin donne l'isomorphisme :

$$(\bar{K} \otimes \bar{L}) \wedge [(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')((-, -), (d_2, d'_2))] \simeq \bar{K} \wedge \mathcal{D}(-, d_2) \otimes \bar{L} \wedge \mathcal{D}'(-, d'_2)$$

et on obtient ainsi un isomorphisme :

$$(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')_{\overline{K \amalg L}}((d_1, d'_1), (d_2, d'_2)) \simeq \mathcal{D}_{\bar{K}}(d_1, d_2) \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}}(d'_1, d'_2)$$

compatible avec les structures monoïdales. ■

Lemme 4.2. *Soient les factorisations “canoniques” $U \rightarrow \Sigma(U) \xrightarrow{K^\Sigma} \mathcal{V}$ et $V \rightarrow \Sigma(V) \xrightarrow{L^\Sigma} \mathcal{V}$. La factorisation produit $U \amalg V \rightarrow \Sigma(U) \otimes \Sigma(V) \xrightarrow{\overline{K \amalg L}} \mathcal{V}$ est isomorphe, de façon monoïdale symétrique, à la factorisation “canonique” $U \amalg V \rightarrow \Sigma(U \amalg V) \xrightarrow{(K \amalg L)^\Sigma} \mathcal{V}$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $U \amalg V \rightarrow \Sigma(U) \otimes \Sigma(V)$ vérifie la propriété universelle définissant $U \amalg V \rightarrow \Sigma(U \amalg V)$ (cf. 1.4.2). Soient \mathcal{C} une catégorie monoïdale symétrique et un foncteur $F \amalg G : U \amalg V \rightarrow \mathcal{C}$. Le foncteur composé $\Sigma(U) \otimes \Sigma(V) \xrightarrow{(F^\Sigma, G^\Sigma)} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$ est monoïdal symétrique fort. Sa précomposition par $U \amalg V \rightarrow \Sigma(U) \otimes \Sigma(V)$ coïncide avec $F \amalg G$. Enfin, l'unicité d'un tel prolongement résulte de ce que tout objet (resp. morphisme) de $\Sigma(U) \otimes \Sigma(V)$ est produit d'objets (resp. morphismes) de la forme $(\underline{u}, 1)$ et $(1, \underline{v})$, où $\underline{u} \in \Sigma(U), \underline{v} \in \Sigma(V)$. ■

4.2 Stabilisations itérées

On conserve ici les notations de la section précédente.

Proposition 4.3. *On suppose que la \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{M} est \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable et $(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')$ - $(\bar{K} \amalg \bar{L})$ -stabilisable. La catégorie modèle $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ est \mathcal{D}' - \bar{L} -stabilisable*

et il existe une équivalence entre les \mathcal{V} -catégories modèles $Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K); L)$ et $Sp^{\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K \amalg L)$ faisant correspondre l'adjonction composée :

$$F'_1 \circ F_1 : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K); L) : E_1 \circ E'_1$$

avec l'adjonction $F_{(1,1)} : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K \amalg L) : E_{(1,1)}$. Lorsque les paires (\mathcal{D}, \bar{K}) et (\mathcal{D}', \bar{L}) sont symétriques, et $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, il s'agit également d'une équivalence de catégories monoïdales symétriques.

Démonstration. D'après le lemme 4.1, on a un isomorphisme de catégories (resp. monoïdales symétriques) : $\mathcal{D}_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}} \simeq (\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')_{\bar{K} \amalg \bar{L}}$.

D'après [K, p.61], le \mathcal{V} -foncteur $(\mathcal{D}_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}})\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}'_{\bar{L}}(\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M})$, $X \mapsto (d' \mapsto X(-, d'))$ est une équivalence de catégories. Si $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et \bar{K}, \bar{L} sont symétriques, un simple calcul de cofin montre que le foncteur est monoïdal symétrique fort, et donc que l'équivalence est monoïdale symétrique.

Il est clair que, par cette équivalence, la structure $(U \amalg V)^{\otimes}$ -projective de $(\mathcal{D}_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}})\mathcal{M}$ correspond à la structure V^{\otimes} -projective de $\mathcal{D}'_{\bar{L}}(\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M})$, où $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$ est elle-même munie de la structure U^{\otimes} -projective.

On utilise les foncteurs $F_d : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$, $F'_{d'} : \mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}'_{\bar{L}}(\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M})$ et $F_{(d,d')} : \mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{D}_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}})\mathcal{M}$, où $d \in U^{\otimes}$ et $d' \in V^{\otimes}$. La structure stable de $\mathcal{D}'_{\bar{L}}(\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M})$ est la localisation de Bousfield de la structure $(U \amalg V)^{\otimes}$ -projective par l'ensemble des morphismes de la forme :

$$F'_{d'}(\zeta_{u,d}^C) : F'_{d'}(F_{ud}(K_u * C)) \rightarrow F'_{d'}(F_d(C))$$

$$\text{et } \zeta_{v,d'}^{F_d(C)} : F'_{vd'}(K_v * F_d(C)) \rightarrow F'_{d'}(F_d(C))$$

où $u \in U$, $v \in V$, et $\zeta_{u,d}^C$ et $\zeta_{v,d'}^{F_d(C)}$ sont les équivalences stables élémentaires de $\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M}$ et $\mathcal{D}'_{\bar{L}}(\mathcal{D}_{\bar{K}}\mathcal{M})$ respectivement. Ce sont, via l'équivalence de catégorie, les morphismes :

$$\zeta_{(u,1)(d,d')}^C : F_{(ud,d')}(K_u * C) \rightarrow F_{(d,d')}(C)$$

$$\text{et } \zeta_{(1,v)(d,d')}^C : F_{(d,vd')}(C * K_v) \rightarrow F_{(d,d')}(C)$$

soit précisément les équivalences stables élémentaires de $(\mathcal{D}_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{L}})\mathcal{M}$. ■

Corollaire 4.4. *On suppose que la \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{M} est Σ -stabilisable. Il existe une équivalence entre les \mathcal{V} -catégories modèles $Sp^{\Sigma}(Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K); L)$ et $Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K \amalg L)$ faisant correspondre l'adjonction composée :*

$$F'_1 \circ F_1 : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\Sigma}(Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K); L) : E_1 \circ E'_1$$

avec l'adjonction $F_1 : \mathcal{M} \rightleftarrows Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K \amalg L) : E_1$. Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, il s'agit également d'une équivalence de catégories monoïdales symétriques.

Démonstration. Ceci résulte directement de la proposition 4.3 et du lemme 4.2. ■

4.3 Comparaisons

Soient deux ensembles U et V , et les factorisations des foncteurs à valeurs cofibrantes $K : U \rightarrow \mathcal{V}$ et $L : V \rightarrow \mathcal{V}$:

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V} \quad \text{et} \quad V \rightarrow \mathcal{D}' \xrightarrow{\bar{L}} \mathcal{V}$$

telles que \mathcal{D} et \mathcal{D}' soient des catégories monoïdales (resp. symétriques) et \bar{K} et \bar{L} des foncteurs monoïdaux (resp. symétriques) forts. On a le résultat d'invariance homotopique suivant :

Théorème 4.5. *On se place dans la situation décrite ci-dessus et on suppose que la \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{M} est \mathcal{D} - \bar{K} -stabilisable, \mathcal{D}' - \bar{L} -stabilisable et $(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')$ - $(\bar{K} \amalg \bar{L})$ -stabilisable. On suppose, de plus, que tout objet K_u , $u \in U$, est isomorphe dans la catégorie homotopique $\text{Ho}(\mathcal{M})$ à un objet L_v , $v \in V$, et réciproquement.*

(1) *On suppose que, pour tout $u \in U$ et $v \in V$, les adjonctions $(K_u * -, \{K_u, -\})$ et $(L_v * -, \{L_v, -\})$ sont des équivalences de Quillen de $\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et de $\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L)$ respectivement. Alors, les \mathcal{V} -catégories modèles $\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et $\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L)$ sont Quillen-équivalentes.*

(2) *On suppose que les paires (\mathcal{D}, \bar{K}) et (\mathcal{D}', \bar{L}) sont symétriques. Alors, les \mathcal{V} -catégories modèles $\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et $\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L)$ sont Quillen-équivalentes. Si $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, et si ces catégories sont des catégories modèles monoïdales symétriques, alors elles sont Quillen-équivalentes comme telles.*

Démonstration. D'après la proposition 4.3, les \mathcal{V} -catégories modèles :

$$\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K); L) \quad \text{et} \quad \text{Sp}^{\mathcal{D}}(\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L); K)$$

sont équivalentes. L'assertion (1) se déduit alors du théorème 3.3, qui indique que les adjonctions :

$$\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows \text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K); L) \quad \text{et} \quad \text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L) \rightleftarrows \text{Sp}^{\mathcal{D}}(\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L); K)$$

sont des équivalences de Quillen.

L'assertion (2) découle de l'assertion (1), en notant que lorsque les paires (\mathcal{D}, \bar{K}) et (\mathcal{D}', \bar{L}) sont symétriques, le théorème 3.2 assure que, pour tout $u \in U$ et $v \in V$, les adjonctions $(K_u * -, \{K_u, -\})$ et $(L_v * -, \{L_v, -\})$ sont des équivalences de Quillen de $\text{Sp}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et de $\text{Sp}^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; L)$ respectivement. ■

Remarque 4.6 Le théorème 4.5 s'applique à la situation où $V = U$ et $L = K$, c'est-à-dire à la comparaison des catégories de spectres obtenues à partir de deux factorisations d'un même foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$.

Il s'applique également à la situation où $V = U$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, donc en particulier à la situation du théorème d'invariance homotopique 3.4.

Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux petites catégories monoïdales (resp. symétriques) et une factorisation du foncteur K :

$$U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\iota} \mathcal{D}' \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$$

telle que ι et \bar{K} soient des foncteurs monoïdaux (resp. symétriques) forts.

Théorème 4.7. *On se place dans la situation décrite ci-dessus et on suppose que la \mathcal{V} -catégorie modèle \mathcal{M} est $\mathcal{D}\text{-}\bar{K}\iota$ -stabilisable, $\mathcal{D}'\text{-}\bar{K}$ -stabilisable, $(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}')\text{-}(\bar{K}\iota \amalg \bar{K})$ -stabilisable et $(\mathcal{D}' \otimes \mathcal{D}')\text{-}(\bar{K} \amalg \bar{K})$ -stabilisable.*

(1) *On suppose que, pour tout $u \in U$, l'adjonction $(K_u * -, \{K_u, -\})$ est une équivalence de Quillen de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et de $Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K)$. Alors, la \mathcal{V} -adjonction $\bar{\iota}_1 : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ est une équivalence de Quillen.*

(2) *On suppose que les catégories \mathcal{D} et \mathcal{D}' , et les foncteurs ι et \bar{K} , sont symétriques. Alors, la \mathcal{V} -adjonction $\bar{\iota}_1 : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ est une équivalence de Quillen. Si, de plus, $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ et ces catégories sont des catégories modèles monoïdales symétriques, il s'agit d'une équivalence de Quillen monoïdale symétrique.*

Démonstration. Le foncteur $1' \otimes Id$ est le composé des foncteurs $1 \otimes Id$ et $\bar{\iota} \otimes Id$:

$$\mathcal{D}'_{\bar{K}} \simeq \mathcal{I}_{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{K}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\bar{K}\iota} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{K}} \longrightarrow \mathcal{D}'_{\bar{K}} \otimes \mathcal{D}'_{\bar{K}}$$

Par la proposition 4.3, les adjonctions induites par $1 \otimes Id$ et $1' \otimes Id$ sont respectivement équivalentes aux adjonctions :

$$Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K); K) \quad \text{et} \quad Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K); K)$$

Par le théorème 3.3, ce sont des équivalences de Quillen dès que, pour tout $u \in U$, l'adjonction $(K_u * -, \{K_u, -\})$ est une équivalence de Quillen de $Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K)$. Il s'en suit que l'adjonction induite par $\bar{\iota} \otimes Id$ est une équivalence de Quillen. Cette adjonction est équivalente à l'adjonction :

$$Sp^{\mathcal{D}'}(\bar{\iota}_1) : Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K); K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K); K) : Sp^{\mathcal{D}'}(\bar{\iota}^*)$$

obtenue à partir de l'adjonction $\bar{\iota}_1 : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ comme dans la proposition 1.9(1). Si, pour tout $u \in U$, l'adjonction $(K_u * -, \{K_u, -\})$ est une équivalence de Quillen de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ et de $Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K)$, les adjonctions :

$$Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K); K) \quad \text{et} \quad Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K); K)$$

le sont également. On en déduit alors que $\bar{\iota}_1 : Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}; K) : \bar{\iota}^*$ est une équivalence de Quillen. ■

Remarque 4.8 Lorsque la pair (\mathcal{D}, \bar{K}) est symétrique, le théorème 4.7 s'applique en particulier à la \mathcal{V} -adjonction $Sp^{\Sigma}(\mathcal{M}; K) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; K)$ associée au foncteur monoidal symétrique fort “canonique” : $\Sigma(U) \rightarrow \mathcal{D}$.

Remarque 4.9 Si \mathcal{M} est une \mathcal{V} -catégorie modèle, combinatoire ou cellulaire, propre à gauche, alors \mathcal{M} est $\mathcal{D}\text{-}\bar{K}$ -stabilisable pour toute factorisation $U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{K}} \mathcal{V}$ telle que $\mathcal{D}_{\bar{K}}$ soit à morphismes cofibrants, et en particulier Σ -stabilisable. De plus, deux catégories de spectres associées à de telles factorisations symétriques du foncteur $K : U \rightarrow \mathcal{V}$ sont Quillen-équivalentes, et en particulier Quillen-équivalentes aux K -spectres symétrique. En effet, les hypothèses des théorèmes 4.5 et 4.7 sont vérifiées, en notant que le produit de deux \mathcal{V} -catégories à morphismes cofibrants est encore à morphismes cofibrants.

Ceci s'applique, pour toute factorisation symétrique, dans le cas où tout objet de \mathcal{V} est cofibrant, donc à la catégorie des ensembles simpliciaux, et plus généralement à toute localisation de Bousfield du modèle injectif d'une catégorie de préfaisceaux (ou de faisceaux) sur un site, à valeur dans les ensembles simpliciaux (e.g. : certains modèles de la théorie \mathbb{A}^1 -homotopique des schémas [MV]).

4.4 Spectres symétriques et spectres orthogonaux équivariants

Soient G un groupe de Lie compact et \mathcal{T} la catégorie modèle monoïdale symétrique combinatoire des espaces topologiques Δ -engendrés pointés [S, Du2]. On notera $(\mathcal{T}^G, \wedge, S^0, F)$ la catégorie monoïdale symétrique fermée des G -espaces pointés.

C'est une catégorie modèle combinatoire monoïdale symétrique, où les équivalences faibles (resp. fibrations) sont les morphismes $f : X \rightarrow Y$ tel que, pour tout sous-groupe fermé $H \subset G$, le morphisme $f^H : X^H \rightarrow Y^H$ est une équivalence faible (resp. fibration) de \mathcal{T} [MM]. Les cofibrations (triviales) génératrices sont de la forme $(G/H)_+ \wedge i$, où H est un sous-groupe fermé, et i est une cofibration (triviale) génératrice de \mathcal{T} , et sont donc de sources cofibrantes.

Soit U un ensemble de G -représentations orthogonales irréductibles contenant la représentation triviale.

On rappelle ici quelques définitions de [MM]. On note \tilde{U} l'univers "engendré par U ", c'est-à-dire la somme d'un ensemble dénombrable de copies de chaque élément de U . On note $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\tilde{U})$ l'ensemble de toutes les G -représentations orthogonales isomorphes à une sous-représentation finie d'un élément de \tilde{U} .

Soit la \mathcal{T}^G -catégorie $\mathcal{S} = \mathcal{S}_G^{\mathcal{V}}$ dont \mathcal{V} est l'ensemble des objets et telle que le G -espace des morphismes de V dans V' est l'espace $\mathcal{O}_G(V, V')_+$ des isomorphismes isométriques linéaires, sur lequel G agit par conjugaison, augmenté d'un point de base disjoint. C'est une \mathcal{T}^G -catégorie monoïdale symétrique avec la somme orthogonale des G -représentations.

On a un foncteur monoïdal symétrique fort $S = S_G^{\mathcal{V}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}^G$, $V \mapsto S^V$, où S^V est la compactification d'Alexandroff de la G -représentation V . On note S_U la composée $U \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{S} \mathcal{T}^G$.

Définition 4.10 Un U - G -spectre orthogonal est un $\mathcal{S}_G^{\mathcal{V}}\text{-}S_G^{\mathcal{V}}$ -spectre au sens de la section 1.2. On note $Sp^{\mathcal{O}}(\mathcal{T}^G; S_U)$ la \mathcal{T}^G -catégorie des U - G -spectres orthogonaux.

Plus généralement, soit une factorisation de $S_U : U \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\tilde{S}_U} \mathcal{T}^G$ où \mathcal{D} est une \mathcal{T}^G -catégorie monoïdale symétrique et \tilde{S}_U un foncteur monoïdal symétrique fort. Par la propriété universelle de $U \rightarrow \Sigma(U)$ (cf. 1.4.2), le foncteur $U \rightarrow \mathcal{D}$ se factorise en $U \rightarrow \Sigma(U) \rightarrow \mathcal{D}$, tel que le foncteur composé $\Sigma(U) \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}^G$ coïncide avec S_U^{Σ} .

Théorème 4.11. *On suppose que les G -espaces de morphismes de la \mathcal{T}^G -catégorie $\mathcal{D}_{\tilde{S}_U}$ ont un point de base non dégénéré. La catégorie \mathcal{T}^G est $\mathcal{D}\text{-}\tilde{S}_U$ -stabilisable et l'adjonction : $Sp^{\Sigma}(\mathcal{T}^G; S_U) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{T}^G; S_U)$ est une équivalence de Quillen monoïdale symétrique.*

En particulier, quand $G = 1$ et $U = \{\mathbb{R}\}$, on retrouve les résultats de comparaisons de [MMSS] dans les cas où \mathcal{D} est symétrique.

Démonstration. L'existence du modèle projectif sur $\mathcal{D}\mathcal{T}^G$ est donné par la deuxième condition du théorème 2.1. C'est un modèle monoïdale symétrique combinatoire, propre à gauche grâce à la non-dégénérescence des points de base (cf. [MMSS, Th. 6.5]), ce qui assure que \mathcal{T}^G est $\mathcal{D}\text{-}\tilde{S}_U$ -stabilisable. En notant que les G -espaces

cofibrants ont un point de base non dégénéré et que cette dernière propriété est stable par le produit smash, on voit donc que les spectres en diagramme à point de base non dégénéré vérifient les diverses hypothèses de stabilisabilité requises par le théorème 4.7. ■

Remarque 4.12 La structure de catégorie modèle stable de $Sp^{\mathcal{D}}(\mathcal{T}^G; S_U)$ définie en section 2.2 coïncide bien avec les structures de catégorie modèle stable définie dans [MMSS] et [MM]. Cela résulte de la définition de la localisation de Bousfield et de [MMSS, Def. 8.3, Def. 9.1] d'une part, [MM, Def. III.4.1, Th. III.6.1] d'autre part.

Corollaire 4.13. *L'adjonction : $Sp^{\Sigma}(\mathcal{T}^G; S_U) \rightleftarrows Sp^{\mathcal{O}}(\mathcal{T}^G; S_U)$ est une équivalence de Quillen monoïdale symétrique.*

Démonstration. Cela résulte du théorème 4.11 car les G -espaces de morphisme de la \mathcal{T}^G -catégorie \mathcal{I}_S ont un point de base non dégénéré [MM, p. 41]. ■

A Appendices

A.1 Trois rappels concernant les catégories modèles

On rappelle ici trois résultats. Le premier concerne les relations entre les adjonctions et équivalences de Quillen, et les localisations de Bousfield.

Théorème A.1. *[Hi, 3.3.20][Ho2, Th. 2.2, Prop. 2.3] Soit $\Phi : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M}' : \Psi$ une adjonction de Quillen. Soient S et S' des ensembles de morphismes de \mathcal{M} et \mathcal{M}' respectivement, tels que la S -localisation de Bousfield de \mathcal{M} et la S' -localisation de Bousfield de \mathcal{M}' existent.*

(1) *Le foncteur Φ est un foncteur de Quillen à gauche pour les modèles localisés si et seulement si, pour toute résolution cofibrante s^c de $s \in S$, $\Phi(s^c)$ est une S' -équivalence.*

(2) *Si l'adjonction original (Φ, Ψ) est une équivalence de Quillen et Φ un foncteur de Quillen à gauche pour les modèles localisés, alors l'adjonction (Φ, Ψ) est une équivalence de Quillen pour les modèles localisés si et seulement si, pour tout S -local $X \in \mathcal{M}$, il existe un S' -local $Y \in \mathcal{M}'$ tel que X soit faiblement équivalent à $\Psi(Y)$. Cette dernière condition est vérifiée dès que tout fibrant $Y \in \mathcal{M}'$ tel que $\Psi(Y)$ est S -local, est S' -local.*

Toute catégorie homotopique d'une catégorie modèle est enrichie sur la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux $\text{Ho}(\mathcal{S})$. On note $\text{Map}(-, -)$ le "Hom" enrichi.

Proposition A.2. *[Ho2, Prop. 3.2] Soit \mathcal{M} une catégorie modèle engendrée par cofibrations, I désignant l'ensemble des cofibrations génératrices. On suppose que \mathcal{M} est propre à gauche ou que les sources des éléments de I sont cofibrantes. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{M} est une équivalence faible si et seulement si $\text{Map}(C, f) : \text{Map}(C, X) \rightarrow \text{Map}(C, Y)$ est un isomorphisme de $\text{Ho}(\mathcal{S})$ pour tout C source ou but d'un élément de I .*

Le résultat suivant, et sa démonstration, se trouvaient dans une version préliminaire de [Hi], auquel on renvoie pour la notion de catégorie modèle cellulaire. La structure de catégorie modèle \mathcal{C} -projective est définie en section 2.1.

Proposition A.3. *Soient \mathcal{V} une catégorie modèle monoïdale, \mathcal{M} une \mathcal{V} -catégorie modèle, \mathcal{D} une petite \mathcal{V} -catégorie et \mathcal{C} un ensemble d'objets de \mathcal{D} . Si \mathcal{M} est une catégorie modèle cellulaire et \mathcal{D} est à morphismes cofibrants, alors la structure de catégorie modèle \mathcal{C} -projective sur \mathcal{DM} est cellulaire.*

Démonstration. L'existence de la structure de catégorie modèle \mathcal{C} -projective est assurée par le théorème 2.1. Comme \mathcal{D} est à morphismes cofibrants, les foncteurs évaluations E_d , $d \in \mathcal{D}$, préservent les cofibrations. Cela montre que les cofibrations \mathcal{C} -projectives sont des monomorphismes effectifs. En utilisant les adjonctions (F_d, E_d) , $d \in \mathcal{D}$, et [Hi, Th. 10.5.27], cela montre également que les sources des cofibrations triviales génératrices \mathcal{C} -projectives sont petites par rapport aux cofibrations génératrices \mathcal{C} -projectives. Enfin, les adjonctions (F_d, E_d) , $d \in \mathcal{D}$, impliquent que les sources et buts des cofibrations génératrices \mathcal{C} -projectives sont compactes si et seulement si les sources et buts des cofibrations génératrices de \mathcal{M} sont compactes relativement à l'ensemble des évaluations des cofibrations génératrices de \mathcal{DM} . Or, ceci résulte de [Hi, Th. 11.4.9], en notant que, par [Hi, Th. 11.4.7], il s'agit d'un ensemble de cofibrations entre cofibrants. ■

A.2 Adjonctions fermées

Usant du théorème de cohérence [M], et pour plus de lisibilité, on se permet de négliger les isomorphismes d'associativité.

Soit $\Gamma : \mathcal{U} \rightleftarrows \mathcal{V} : \Phi$ une adjonction entre catégories monoïdales fermées. La donnée d'une structure monoïdale sur le foncteur Φ :

$$m_{X,Y} : \Phi(X) \otimes \Phi(Y) \longrightarrow \Phi(X \otimes Y) \quad \text{et} \quad e : \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \rightarrow \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{V}})$$

est équivalente à la donnée d'une structure fermée

$$f_{X,Y} : \Phi(F(X, Y)) \longrightarrow F(\Phi(X), \Phi(Y)) \quad \text{et} \quad e : \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \rightarrow \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{V}})$$

Si le foncteur Φ possède un adjoint à gauche Γ , la donnée de tels morphismes (resp. isomorphismes) $f_{X,Y}$ est équivalente à la donnée des morphismes (resp. isomorphismes) de projection dans \mathcal{U} :

$$\pi_{X,Y} : \Gamma(\Phi(X) \otimes Y) \longrightarrow X \otimes \Gamma(Y) \quad \text{et} \quad e : \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \rightarrow \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{V}})$$

Lorsque ces morphismes sont des isomorphismes, le foncteur Φ est dit fermé fort. Si on note η et ε l'unité et la co-unité de l'adjonction (Γ, Φ) , le composé :

$$\Gamma(\Phi(X) \otimes Y) \xrightarrow{\Phi(X) \otimes \eta_Y} \Gamma(\Phi(X) \otimes \Phi\Gamma(Y)) \xrightarrow{\Gamma(m_{X,\Gamma(Y)})} \Gamma\Phi(X \otimes \Gamma(Y)) \xrightarrow{\varepsilon_{X \otimes \Gamma(Y)}} X \otimes \Gamma(Y)$$

définit le morphisme de projection $\pi_{X,Y}$ associé à la structure monoïdale $m_{X,Y}$ de Φ .

Les morphismes structuraux de Φ vérifient les axiomes d'associativité et d'unité exprimés par la commutativité des diagrammes suivants [M] :

$$\begin{array}{ccc}
\Phi(X) \otimes \Phi(Y) \otimes \Phi(Z) & \xrightarrow{m_{X,Y} \otimes \Phi(Z)} & \Phi(X \otimes Y) \otimes \Phi(Z) & \mathbf{1}_U \otimes \Phi(X) & \xrightarrow{e \otimes \Phi(X)} & \Phi(\mathbf{1}_V) \otimes \Phi(X) \\
\downarrow \Phi(X) \otimes m_{Y,Z} & & \downarrow m_{X \otimes Y, Z} & \downarrow \sim & & \downarrow m_{\mathbf{1}_V, X} \\
\Phi(X) \otimes \Phi(Y \otimes Z) & \xrightarrow{m_{X, Y \otimes Z}} & \Phi(X \otimes Y \otimes Z) & \Phi(X) & \xleftarrow{\sim} & \Phi(\mathbf{1}_V \otimes X)
\end{array}$$

Lorsque Φ est fermé fort, on vérifie (assez fastidieusement) que les axiomes d'associativité et d'unité de la structure monoïdale de Φ , et diverses naturalités, impliquent la comutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes Y \otimes \Gamma(Z) & \xrightarrow{X \otimes \pi_{Y,Z}^{-1}} & X \otimes \Gamma(\Phi(Y) \otimes Z) & \mathbf{1}_V \otimes \Gamma(X) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X) \\
\downarrow \pi_{X \otimes Y, Z}^{-1} & & \downarrow \pi_{X, \Phi(Y) \otimes Z}^{-1} & \downarrow \pi_{\mathbf{1}_V, X}^{-1} & & \uparrow \sim \\
\Gamma(\Phi(X \otimes Y) \otimes Z) & \xleftarrow{\Gamma(m_{X, Y \otimes Z})} & \Gamma(\Phi(X) \otimes \Phi(Y) \otimes Z) & \Gamma(\Phi(\mathbf{1}_V) \otimes X) & \xrightarrow{\Gamma(e^{-1} \otimes Y)} & \Gamma(\mathbf{1}_U \otimes Y)
\end{array}$$

qui sont utilisés dans la section 1.3.

References

- [BW] M. Barr, C. Wells. *Toposes, triples and theories*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 278. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Da] B.J. Day. *On closed categories of functors*. 1970 Reports of the Midwest Category Seminar, IV pp. 1–38. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 137. Springer, Berlin.
- [DK] B.J. Day, G.M. Kelly. *Enriched functor categories*. 1969 Reports of the Midwest Category Seminar, III pp. 178–191. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 106. Springer, Berlin.
- [Du1] D. Dugger. *Universal homotopy theories*. Adv. Math. 164 (2001), no. 1, 144–176.
- [Du2] D. Dugger. *Notes on Delta-generated spaces*.
<http://math.uoregon.edu/~ddugger>
- [Ho1] M. Hovey. *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [Ho2] M. Hovey. *Spectra and symmetric spectra in general model categories*. J. Pure Appl. Algebra 165 (2001), no. 1, 63–127.
- [HSS] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith. *Symmetric spectra*. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 1, 149–208.

- [Hi] P.S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Mathematical Surveys and Monographs, 99. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Hu] P. Hu. *Base change functors in the \mathbb{A}^1 -stable homotopy category*. Homology, Homotopy and Appl. 3, no 2 (2001), 417–451.
- [IK] G.B. Im, G.M. Kelly. *A universal property of the convolution monoidal structure*. J. Pure Appl. Algebra 43 (1986), no. 1, 75–88.
- [K] G.M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 64. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.
- [K2] G.M. Kelly. *Adjunction for enriched categories*. 1969 Reports of the Midwest Category Seminar, III pp. 166–177. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 106. Springer, Berlin.
- [M] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [MM] M. A. Mandell, J. P. May. *Equivariant orthogonal spectra and S-modules*. Mem. Amer. Math. Soc. 159 (2002), no. 755.
- [MMSS] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede, B. Shipley. *Model categories of diagram spectra*. Proc. London Math. Soc. (3) 82 (2001), no. 2, 441–512.
- [MV] F. Morel, V. Voevodsky. *\mathbb{A}^1 -homotopy theory of schemes*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 90, (1999), 45–143.
- [SS] S. Schwede, B.E. Shipley. *Algebras and modules in monoidal model categories*. Proc. London Math. Soc. (3) 80 (2000), no. 2, 491–511.
- [S] J.H. Smith. Exposé à l’Institut Newton, Cambridge, septembre 2002.

7, allée Charles Bonnet
78290 Croissy sur Seine
France