Sur les points extrémaux dans un ordre cubique

Ouafae Lahlou Ahmed Farhane

Résumé

Dans cet article, on améliore la proposition 2.2.3 énoncée par B. Adam[1] ce qui nous permet de réduire de huit à cinq au maximum le nombre de choix d'un point extrémal adjacent à 1 de deuxième espèce pour toute les formes d'écriture du vecteur isotrope d'une forme quadratique.
On donne également le développement par l'algorithme de Voronoi de la première famille paramétrée infinie de corps de nombres cubiques introduite par C. Levesque et G. Rhin [3] et on obtient ainsi l'unité fondamentale de ces corps.

Abstract

In this paper, we improve the proposition 2.2.3 studied by B. Adam [1], which allows to reduce from eight to five at most the number of choices for a minimal point adjacent to 1 of second kind for all forms of writing an isotropic vector of a quadratic form.
We also give the Voronoi algorithm expansion of the first infinite family of cubic number fields introduced by C. Levesque and G. Rhin [3] and so we obtain a fundamental unit of these fields.

1 Introduction

Il est en général difficile, de déterminer effectivement un système fondamental d'unités d'un corps de nombres K qui permet de calculer le régulateur R_K de K. On connaît certains algorithmes qui apportent des réponses partielles à ce problème, plus précisément :
On sait que l'algorithme des fractions continues a les propriétés suivantes :
- Le développement en fraction continue d'un nombre réel α est périodique si

Received by the editors May 2002 - In revised form in January 2004.
Communicated by M. Van den Bergh.

et seulement si α est quadratique.
- L'algorithme des fractions continues fournit l'unité fondamentale de tout corps de nombres quadratique réel.
De nombreuses tentatives ont été faites dans le but de généraliser l'algorithme des fractions continues.
L'une des généralisations les plus classiques est l'algorithme de Jacobi-Perron (1907 [4]) noté (AJP).
- Mais on ne connaît aucune condition nécessaire et suffisante pour qu'un développement par cet algorithme soit périodique. E. Dubois [2] a montré l'existence dans tout corps de nombres réels d'une base dont le développement est périodique. Par contre G. Rhin [5] a calculé le développement par l'AJP de $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{16})$ jusqu'à l'ordre 1954 sans faire apparaître de période.
- Lorsque le développement par l'AJP d'une base d'un corps de nombres réels est périodique, il fournit une unité de ce corps mais cette unité n'appartient pas nécessairement à un système fondamental d'unités.
Une autre généralisation bien connue de l'algorithme des fractions continues est l'algorithme de Voronoi (1896 [6]) pour les corps cubiques.
Le développement par l'algorithme de Voronoi est purement périodique et fournit un système fondamental d'unités de tout corps de nombres algébriques de degré 3. Mais le calcul explicite de la suite des points extrémaux du développement par cet algorithme peut être difficile. Pour ce calcul, la méthode développée par B. Adam (1995 [1]) qui utilisant un vecteur isotrope d'une forme quadratique montre que pour déterminer le point suivant il suffit, sous certaines conditions de considérer 8 points explicitement définis.
On généralise ainsi le travail de B. Adam [1] et on montre que pour obtenir le point suivant il suffit de ne considérer que 5 points explicitement définis. On donne aussi une illustration de ces résultats, notamment on détermine Le développement par l'algorithme de Voronoi d'une famille de corps cubiques et on obtient l'unité fondamental de ces corps.

2 Méthode de recherche de points extrémaux

On décrit ici une méthode qui permet dans certains cas de déterminer une suite croissante de points extrémaux adjacents de deuxième espèce. On sait que pour déterminer une telle suite il suffit de savoir construire le point extrémal adjacent à 1 de deuxième espèce dans un réseau réduit $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ de K, avec $K \subset \mathbb{R}$ un corps de nombres cubique à conjugués complexes.
Ainsi on cherche un élément $\psi = x + y\lambda_1 + z\lambda_2$ de L tel que

$$\psi > 1,\ |\sigma(\psi)| < 1 \,\text{et}\, \psi \text{ minimum.}$$

où σ est un plongement complexe de K dans $\mathbb{C}$.
Pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ on pose $F(u, v, w) = |u + v\sigma(\lambda_1) + w\sigma(\lambda_2)|^2$. F définit une forme quadratique à trois variables u, v, w à coefficients réels, positive de rang 2. On va dans ce paragraphe énoncer des propositions qui, utilisant un vecteur isotrope de cette forme quadratique, nous permet de restreindre à cinq au maximum le nombre de choix pour un point extrémal adjacent à 1.
On supposera dans la suite du paragraphe que $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ est un vecteur isotrope de F avec $\gamma_1 \in \mathbb{R}^*$ et $\gamma_2 \in \mathbb{R}^*$.

Lemme 2.1. *Si* $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ *est un vecteur isotrope de* F *dans* $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ *alors :*
1) $(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2)$ *est un vecteur isotrope de* F *dans* $L =< 1, -\lambda_1, \lambda_2 >$ *avec* $\tilde{\gamma}_1 = -\gamma_1$ *et* $\tilde{\gamma}_2 = -\gamma_2$.
2) $(w_1, w_2, 1)$ *est un vecteur isotrope de* F *dans* $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ *avec* $w_1 = \gamma_1/\gamma_2$ *et* $w_2 = 1/\gamma_2$.
3) $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, 1)$ *est un vecteur isotrope de* F *dans* $L =< 1, \lambda_1, -\lambda_2 >$ *avec* $\tilde{w}_1 = -w_1$ *et* $\tilde{w}_2 = -w_2$.

Preuve. $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ est un vecteur isotrope de F dans $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ équivalent à $F(\gamma_1, 1, \gamma_2) = 0 = |\gamma_1 + \sigma(\lambda_1) + \gamma_2\sigma(\lambda_2)|^2$ équivalent à $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ vérifie la formule suivante :
(i) $\gamma_1 + Re\sigma(\lambda_1) + \gamma_2 Re\sigma(\lambda_2) = 0$ et $Im\sigma(\lambda_1) + \gamma_2 Im\sigma(\lambda_2) = 0$
où $Re\,z$ et $Im\,z$ désignent les parties réelle et imaginaire d'un élément z de $\mathbb{C}$.
Si $(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2)$ est un vecteur isotrope de F dans $L =< 1, -\lambda_1, \lambda_2 >$ alors de même que précédemment $(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2)$ vérifie la formule suivante :
(ii) $\tilde{\gamma}_1 - Re\sigma(\lambda_1) + \tilde{\gamma}_2 Re\sigma(\lambda_2) = 0$ et $-Im\sigma(\lambda_1) + \tilde{\gamma}_2 Im\sigma(\lambda_2) = 0$.
Donc $\tilde{\gamma}_2 = \frac{Im\sigma(\lambda_1)}{Im\sigma(\lambda_2)} = -\gamma_2$ et $\tilde{\gamma}_1 = -\gamma_1$ puisque $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ vérifie la formule (i).
Réciproquement, une vérification facile montre que $(-\gamma_1, 1, -\gamma_2)$ vérifie la formule (ii).
Les démonstrations des parties (2) et (3) sont analogues à celle de la partie (1).

Lemme 2.2. *Soit* F *une forme quadratique à trois variables* x, y, z *à coefficients réels, positive de rang 2 telle que* $F(1, 0, 0) = 1$.
i) Si $F(0, 0, 1) > 1$ *et* F *admet un vecteur isotrope* $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ *alors* F *s'écrit :*
1) $F(x, y, z) = a(z - \gamma_2 y)^2 + 2b(z - \gamma_2 y)(x - \gamma_1 y) + (x - \gamma_1 y)^2$
2) $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - \gamma_1 y)^2 + \frac{1}{2}(x - \gamma_1 y + 2b(z - \gamma_2 y))^2 + (a - 2b^2)(z - \gamma_2 y)^2$
3) $F(x, y, z) = \frac{a}{2}(z - \gamma_2 y)^2 + \frac{a}{2}(z - \gamma_2 y + \frac{2b}{a}(x - \gamma_1 y))^2 + (1 - \frac{2b^2}{a})(x - \gamma_1 y)^2$
avec $a > 1$ *et* $a > b^2$.
ii) Si $F(0, 1, 0) > 1$ *et* F *admet un vecteur isotrope* $(w_1, w_2, 1)$ *alors* F *s'écrit :*
4) $F(x, y, z) = d(y - w_2 z)^2 + 2c(y - w_2 z)(x - w_1 z) + (x - w_1 z)^2$
avec $d > 1$ *et* $d > c^2$.

Preuve. Soit M la matrice de la forme polaire associée à F.
M s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

avec $a_{33} > 1$.
On a

$$\begin{cases} a_{12} = -\gamma_1 - \gamma_2 a_{13} \\ a_{22} = \gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 a_{13} + a_{33}\gamma_2^2 \\ a_{23} = -a_{13}\gamma_1 - a_{33}\gamma_2 \end{cases}$$

car $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ est un vecteur isotrope de F.
En posant : $a = a_{33}$ et $b = a_{13}$ on obtient les formules du lemme.
F étant une forme positive de rang 2, on a $b^2 < a$.
La démonstration de la partie (ii) est analogue à celle de la partie (i).

Remarque 2.1. *Le lemme 2.1 permet de réduire à la moitié le nombre de possibilités pour un vecteur isotrope* $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$. *On se limite à des vecteurs isotropes* $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ *vérifiant* $\gamma_1 > 0$ *et* $\gamma_2 \in \mathbb{R}^*$. *Les autres situations se ramènent à cette situation en échangeant* λ_1 *par* $-\lambda_1$ *dans le réseau considèré. Ainsi on va distinguer deux situations différentes :*
A) $\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^*$ *et* $a = F(0,0,1) > 1$.
B) $\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^*$ *et* $d = F(0,1,0) > 1$.

On supposera dans la suite du paragraphe que $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ est un vecteur isotrope de F dans un réseau réduit $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ avec $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 \in \mathbb{R}^*$.

A) Cas où $\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^*$ et $a = F(0,0,1) > 1$.
Pour tout $y \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$\begin{array}{lll}
\psi_{1,y} = [\gamma_1 y] - 1 + y\lambda_1 + [\gamma_2 y]\lambda_2, & \psi_{1,1} = \phi_4 & \psi_{9,y} = [\gamma_1 y] + 1 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+1)\lambda_2 \\
\psi_{2,y} = [\gamma_1 y] - 1 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+1)\lambda_2, & \psi_{2,1} = \phi_5 & \psi_{10,y} = [\gamma_1 y] + 1 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+2)\lambda_2 \\
\psi_{3,y} = [\gamma_1 y] + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]-1)\lambda_2, & \psi_{3,1} = \phi_3 & \psi_{11,y} = [\gamma_1 y] + 2 + y\lambda_1 + [\gamma_2 y]\lambda_2 \\
\psi_{4,y} = [\gamma_1 y] + y\lambda_1 + [\gamma_2 y]\lambda_2, & \psi_{4,1} = \phi_1 & \psi_{12,y} = [\gamma_1 y] + 2 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+1)\lambda_2 \\
\psi_{5,y} = [\gamma_1 y] + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+1)\lambda_2, & \psi_{5,1} = \phi_2 & \psi_{13,y} = [\gamma_1 y] + 2 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]-1)\lambda_2 \\
\psi_{6,y} = [\gamma_1 y] + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+2)\lambda_2 & & \psi_{14,y} = [\gamma_1 y] + 2 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+2)\lambda_2 \\
\psi_{7,y} = [\gamma_1 y] + 1 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]-1)\lambda_2 & \psi_{7,1} = \phi_7 & \psi_{15,y} = [\gamma_1 y] - 1 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]-1)\lambda_2 \\
\psi_{8,y} = [\gamma_1 y] + 1 + y\lambda_1 + [\gamma_2 y]\lambda_2 & \psi_{8,1} = \phi_6 & \psi_{16,y} = [\gamma_1 y] - 1 + y\lambda_1 + ([\gamma_2 y]+2)\lambda_2
\end{array}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.
On pose $Q_1 = ([\gamma_1], 1, [\gamma_2])$, $Q_2 = ([\gamma_1], 1, [\gamma_2]+1)$, $Q_3 = ([\gamma_1], 1, [\gamma_2]-1)$
$Q_4 = ([\gamma_1]-1, 1, [\gamma_2])$ et $Q_5 = ([\gamma_1]-1, 1, [\gamma_2]+1)$.

Remarque 2.2. *Si* $0 < \lambda_2 < 1$ *on a*

$$\begin{cases}
\psi_{1,y} < \psi_{2,y} < \psi_{4,y}; \qquad \psi_{1,y} < \psi_{3,y} < \psi_{4,y} \\
\psi_{4,y} < \psi_{5,y} < \psi_{6,y} < \psi_{12,y}; \qquad \psi_{4,y} < \psi_{11,y} < \psi_{12,y} \\
\psi_{4,y} < \psi_{7,y} < \psi_{8,y} < \psi_{9,y} < \psi_{10,y} < \psi_{12,y} \\
\psi_{5,y} < \psi_{8,y} < \psi_{9,y} < \psi_{10,y} < \psi_{12,y}; \qquad \psi_{5,y} < \psi_{11,y} < \psi_{12,y}
\end{cases}$$

Théorème 2.1. *Si* $\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_2 < 1$ *et*
$a > \max(1, 2b^2, 2|b|)$ *on a :*
1) Si $F(Q_1) > 1, F(Q_2) < 1$ *et* $\phi_1 > 1$
i) si $b < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* ϕ_2, ϕ_3 *ou* ϕ_4
ii) si $b \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* ϕ_2 *ou* ϕ_5.
2) Si $F(Q_1) < 1$
i) si $b < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* ϕ_1, ϕ_3 *ou* ϕ_4
ii) si $b \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* ϕ_1 *ou* ϕ_5.

Preuve. On note $\psi = x + y\lambda_1 + z\lambda_2$ le point extrémal adjacent à 1 et $P = (x, y, z)$ l'élément de $\mathbb{Z}^3$ correspondant. On a donc $\psi > 1, F(P) < 1$ et ψ minimal.
1) On suppose d'abord que $F(Q_1) > 1, F(Q_2) < 1$ et $\phi_1 > 1$.
a) Montrons que ψ appartient à l'ensemble formé des $\psi_{i,y}$ pour $1 \leq i \leq 12$.
Les écritures 2) et 3) dans le lemme 2.2 de F entraînent $(x-\gamma_1 y)^2 < 2$ et $(z-\gamma_2 y)^2 < 2$ car $F(P) < 1$ et $a > \max(1, 2b^2, 2|b|)$.
On a $(x-\gamma_1 y)^2 < 2$ c'est-à-dire $|x - \gamma_1 y| < \sqrt{2}$, or $x \in \mathbb{Z}$ donc
$x \in \{[\gamma_1 y]-1, [\gamma_1 y], [\gamma_1 y]+1, [\gamma_1 y]+2\}$.
On a aussi $z \in \{[\gamma_2 y]-1, [\gamma_2 y], [\gamma_2 y]+1, [\gamma_2 y]+2\}$.

Et par suite ψ appartient à l'ensemble formé des $\psi_{i,y}$ pour $1 \leq i \leq 16$.
Soit $Q_{13,y} = ([\gamma_1 y] + 2, y, [\gamma_2 y] - 1)$, l'écriture 3) dans le lemme 2.2 de F entraîne

$$\begin{aligned} F(Q_{13,y}) &> \frac{a}{2}([\gamma_2 y] - 1 - \gamma_2 y)^2 + (1 - \frac{2b^2}{a})([\gamma_1 y] + 2 - \gamma_1 y)^2 \\ &> \frac{a}{2} + (1 - \frac{2b^2}{a}) > 1 \end{aligned}$$

De la même façon on montre que $F(Q_{i,y}) > 1$ pour $14 \leq i \leq 16$.
Donc les $\psi_{i,y}$ pour $13 \leq i \leq 16$ ne sont pas des points extrémaux adjacents à 1 car $F(P) < 1$.
b) On a y est non nul (voir [1]).
c) Montrons que y est positif.
$y \leq -2$ entraîne $\psi_{12,y} < 1$ car $[\gamma_j y] \leq y[\gamma_j]$ pour $1 \leq j \leq 2$, $\lambda_2 < 1$ et $\phi_1 > 1$.
$y = -1$ entraîne $\psi_{12,-1} < 0$ car $[-\gamma_j] = -1 - [\gamma_j]$ pour $j = 1, 2$ donne $\psi_{12,-1} = 1 - \phi_1 < 0$.
Or pour tout $i = 1, ..., 12$ on a $\psi_{i,y} \leq \psi_{12,y}$, donc pour tout $i = 1, ..., 12$ et $y \leq -1$ on a $\psi_{i,y} < 1$, et par suite les $\psi_{i,y}$ pour $i = 1, ..., 12$ et $y \leq -1$ ne sont pas des points extrémaux adjacents à 1 car $\psi > 1$.
d) Montrons que $y = 1$.
$F(Q_2) < 1$ entraîne $\phi_2 > 1$ et par suite $\psi \leq \phi_2$.
Si $y \geq 3$ alors $\psi_{1,y} > \phi_2$ car $[y\gamma_j] \geq y[\gamma_j]$ pour $j = 1, 2$, $\phi_1 > 1$ et $\lambda_2 < 1$. Or pour tout $i = 1, ..., 12$ on a $\psi_{i,y} \geq \psi_{1,y}$, donc pour tout $i = 1, ..., 12$ et $y \geq 3$ on a $\psi_{i,y} > \phi_2$.
On a aussi $\psi_{2,2} > \phi_2$. Or pour tout $i = 2, ..., 12$ et $i \neq 3$ on a $\psi_{i,2} \geq \psi_{2,2}$, donc pour tout $i = 2, ..., 12$ et $i \neq 3$ on a $\psi_{i,2} > \phi_2$.
De plus $\psi_{1,2} = [2\gamma_1] - 1 + 2\lambda_1 + [2\gamma_2]\lambda_2$ n'est pas un point extrémal adjacent à 1 .
En effet, pour $1 \leq i \leq 2$, on a :

$$[2\gamma_i] = \begin{cases} 2[\gamma_i] + 1 & \text{si } \gamma_i - [\gamma_i] \geq 1/2 \\ 2[\gamma_i] & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\psi_{1,2} = \begin{cases} 2[\gamma_1] + 2\lambda_1 + (2[\gamma_2] + 1)\lambda_2 > \phi_2 \\ 2[\gamma_1] + 2\lambda_1 + 2[\gamma_2]\lambda_2 > \phi_2 \\ 2[\gamma_1] - 1 + 2\lambda_1 + (2[\gamma_2] + 1)\lambda_2 > \phi_2 \\ 2[\gamma_1] - 1 + 2\lambda_1 + 2[\gamma_2]\lambda_2 \end{cases}$$

reste à examiner le cas $\psi_{1,2} = 2[\gamma_1] - 1 + 2\lambda_1 + 2[\gamma_2]\lambda_2$.
Si $\psi_{1,2} = 2[\gamma_1] - 1 + 2\lambda_1 + 2[\gamma_2]\lambda_2$ est un point extrémal adjacent à 1 alors $F(Q_{1,2}) < 1$ et par suite $b < 0$ car sinon on aura $F(Q_{1,2}) > (2[\gamma_1] - 1 - 2\gamma_1)^2 > 1$ ce qui est impossible.
Or $b < 0$ et $F(Q_1) > F(Q_2)$ entraîne $1 - 2(\gamma_2 - [\gamma_2]) < 0$, ce qui est impossible car dans ce cas on a $1 - 2(\gamma_2 - [\gamma_2]) > 0$.
D'où $\psi_{1,2}$ n'est pas un point extrémal adjacent à 1 .
De la même façon on montre que $\psi_{3,2}$ n'est pas un point extrémal adjacent à 1 .
e) Etude de x et z.
On a ψ appartient à l'ensemble formé des $\psi_{i,1}$ pour $i = 1, ..., 12$ et $\psi \leq \phi_2 = \psi_{5,1}$.
Pour tout $i = 8, ..., 12$ on a $\psi_{i,1} > \psi_{5,1}$ et $\psi_{6,1} > \psi_{5,1}$.
$\psi_{7,1} = [\gamma_1] + 1 + \lambda_1 + ([\gamma_2] - 1)\lambda_2$ n'est pas un point extrémal adjacent à 1 .

En effet : Si $\psi_{7,1}$ est un point extrémal adjacent à 1 alors $F(Q_{7,1}) < 1$.
$b \leq 0$ entraîne $F(Q_{7,1}) > a([\gamma_2] - 1 - \gamma_2)^2 > 1$ ce qui est impossible donc $b > 0$.
$b \geq 1$ entraîne $a > 2$ car $a > 2b$ et par suite $F(Q_{7,1}) > \frac{a}{2}([\gamma_2] - \gamma_2 - 1)^2 > \frac{a}{2} > 1$ ce qui est impossible, donc $0 < b < 1$.
$0 < b \leq \frac{1}{2}$ entraine $F(Q_{7,1}) - F(Q_1) = (1-2b)(1+[\gamma_1] - \gamma_1) + a + [\gamma_1] - \gamma_1 + 2(a-b)(\gamma_2 - [\gamma_2]) > 0$ or $F(Q_1) > 1$ donc $F(Q_{7,1} > 1$ ce qui est impossible, donc $\frac{1}{2} < b < 1$.
Or $F(Q_1) > F(Q_2)$ entraine $2b(\gamma_1 - [\gamma_1]) > a(1 - 2(\gamma_2 - [\gamma_2]))$, puisque $a > 2b$ on en déduit que $2(\gamma_2 - [\gamma_2]) > 1 - (\gamma_1 - [\gamma_1])$ et par suite
$F(Q_{7,1}) - F(Q_1) > (2-2b)(\gamma_2 - [\gamma_2]) + 2(a-2b)(\gamma_2 - [\gamma_2]) + a + [\gamma_1] - \gamma_1 > 0$ or $F(Q_1) > 1$ donc $F(Q_{7,1}) > 1$, ce qui est impossible.
On a $F(Q_1) > 1$ donc $\psi_{4,1} = \phi_1$ n'est pas un point extrémal adjacent à 1.
On a $\psi_{1,1} = \phi_4, \psi_{2,1} = \phi_5, \psi_{3,1} = \phi_3, \psi_{5,1} = \phi_2$ et $\phi_i \leq \phi_2$ pour $i = 2, .., 5$.
Donc $\psi \in \{\phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$.
De plus si $b < 0$ on a $F(Q_5) > 1$ et si $b \geq 0$ on a $F(Q_4) > 1$ et $F(Q_3) > 1$ ce qui démontre la première partie de la proposition .
2) Supposons maintenant que $F(Q_1) < 1$.
La démonstration de cette partie est analoque à celle de la première partie.

Remarque 2.3. *Si $\lambda_2 > 1$ on a :*
$$\begin{cases} \psi_{3,y} < \psi_{1,y} < \psi_{4,y} < \psi_{2,y} < \psi_{5,y} < \psi_{9,y} < \psi_{6,y} < \psi_{10,y} \\ \psi_{3,y} < \psi_{7,y} < \psi_{4,y} < \psi_{8,y} < \psi_{11,y} < \psi_{12,y} < \psi_{10,y} \\ \psi_{8,y} < \psi_{5,y} < \psi_{12,y} \end{cases}.$$

Théorème 2.2. *Si $\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 > 1$ et*
$a > \max(1, 2b^2, 2|b|)$ on a :
1) Si $F(Q_1) < 1$ et $\phi_1 > \lambda_2$
i) si $b < 0$ alors le point extrémal adjacent à 1 est ϕ_1, ϕ_3 ou ϕ_4
ii) si $b \geq 0$ alors le point extrémal adjacent à 1 est ϕ_1 ou ϕ_7.
2) Si $F(Q_1) > 1, F(Q_6) < 1$ et $\phi_1 > \lambda_2$
i) si $b < 0$ alors le point extrémal adjacent à 1 est ϕ_6, ϕ_3 ou ϕ_4
ii) si $b \geq 0$ alors le point extrémal adjacent à 1 est ϕ_6 ou ϕ_5.

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2.1.

B. Cas où $\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^*$ et $d = F(0,1,0) > 1$.
Si $(\gamma_1, 1, \gamma_2)$ est un vecteur isotrope de F dans $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ tel que $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 \in \mathbb{R}^*$ alors $(w_1, w_2, 1)$ est un vecteur isotrope de F dans $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ avec $w_1 = \gamma_1/\gamma_2 \in \mathbb{R}^*$ et $w_2 = 1/\gamma_2 \in \mathbb{R}^*$.

B.1. On suppose d'abord le cas où $w_1 > 0$ et $w_2 \in \mathbb{R}^*$.
On pose

$\varphi_1 = [w_1] + [w_2]\lambda_1 + \lambda_2, \qquad P_1 = ([w_1], [w_2], 1)$
$\varphi_2 = [w_1] + ([w_2] + 1)\lambda_1 + \lambda_2, \qquad P_2 = ([w_1], [w_2] + 1, 1)$
$\varphi_3 = [w_1] + ([w_2] - 1)\lambda_1 + \lambda_2, \qquad P_3 = ([w_1], [w_2] - 1, 1)$
$\varphi_4 = [w_1] - 1 + [w_2]\lambda_1 + \lambda_2, \qquad P_4 = ([w_1] - 1, [w_2], 1)$
$\varphi_5 = [w_1] - 1 + ([w_2] + 1)\lambda_1 + \lambda_2, \qquad P_5 = ([w_1] - 1, [w_2] + 1, 1).$

Théorème 2.3. *Si* $w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ *et* $d > \max(1, 2c^2, 2|c|)$ *on a :*
1) Si $F(P_1) > 1, F(P_2) < 1$ *et* $\varphi_1 > 1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_2, φ_3 *ou* φ_4
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_2 *ou* φ_5.
2) Si $F(P_1) < 1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_1, φ_3 *ou* φ_4
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_1 *ou* φ_5.

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du thérème 2.1.

Théorème 2.4. *Si* $w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 > 1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ *et* $d > \max(1, 2c^2, 2|c|)$ *on a :*
1) Si $F(P_1) < 1$ *et* $\varphi_1 > \lambda_1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_1, φ_3 *ou* φ_4
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_1 *ou* φ_7.
2) Si $F(P_1) > 1, F(P_6) < 1$ *et* $\varphi_1 > \lambda_1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_6, φ_3 *ou* φ_4
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* φ_6 *ou* φ_5.

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du thérème 2.1.

B.2. Supposons maintenant que $w_1 < 0$ et $w_2 \in \mathbb{R}^*$.
Si $(w_1, w_2, 1)$ est un vecteur isotrope de F dans $L =< 1, \lambda_1, \lambda_2 >$ tel que $w_1 < 0$ et $w_2 \in \mathbb{R}^*$ alors $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, 1)$ est un vecteur isotrope de F dans $L =< 1, \lambda_1, -\lambda_2 >=< 1, \mu_1, \mu_2 >$ avec $\tilde{w}_1 = -w_1 > 0, \tilde{w}_2 = -w_2 \in \mathbb{R}^*, \mu_1 = \lambda_1$ et $\mu_2 = -\lambda_2$ donc
1) Tout point ψ de L s'écrit $\psi = x + y\mu_1 + z\mu_2$ avec (x, y, z) un élément de $\mathbb{Z}^3$.
2) $F(x, y, z) = (x - \tilde{w}_1 z)^2 + 2\tilde{c}(x - \tilde{w}_1 z)(y - \tilde{w}_2 z) + \tilde{d}(y - \tilde{w}_2 z)^2$, avec $\tilde{c} = c$ et $\tilde{d} = d$.
3) $\tilde{\varphi}_i$ (respectivement $\tilde{P}_i$) s'obtient à partir de φ_i (respectivement P_i) en remplaçant λ_j par μ_j et w_j par $\tilde{w}_j$ pour $1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 2$.

Théorème 2.5. *Si* $\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \mu_1 < 1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$ *et* $d > max(1, 2c^2, 2|c|)$ *on a :*
1) Si $F(\tilde{P}_1) > 1, F(\tilde{P}_2) < 1$ *et* $\tilde{\varphi}_1 > 1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ *ou* $\tilde{\varphi}_4$
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_2$ *ou* $\tilde{\varphi}_5$.
2) Si $F(\tilde{P}_1) < 1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_3$ *ou* $\tilde{\varphi}_4$
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_1$ *ou* $\tilde{\varphi}_5$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du thérème 2.1.

Théorème 2.6. *Si* $\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^*, \mu_1 > 1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$ *et*
$d > max(1, 2c^2, 2|c|)$ *on a :*
1) Si $F(\tilde{P}_1) < 1$ *et* $\tilde{\varphi}_1 > \mu_1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_3$ *ou* $\tilde{\varphi}_4$
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_1$ *ou* $\tilde{\varphi}_7$.
2) Si $F(\tilde{P}_1) > 1, F(\tilde{P}_6) < 1$ et $\tilde{\varphi}_1 > \mu_1$
i) si $c < 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_6, \tilde{\varphi}_3$ *ou* $\tilde{\varphi}_4$
ii) si $c \geq 0$ *alors le point extrémal adjacent à 1 est* $\tilde{\varphi}_6$ *ou* $\tilde{\varphi}_5$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du thérème 2.1.

En résume les résultats donnés dans la section 2 comme suit :

(1) Si $a > \max(1, 2b^2, 2|b|)$ et les conditions cités dans les colonnes (1), (2), (3) et (4) sont satisfaites alors le point extrémal adjacent à 1 est l'un des points décrits dans la colonne (5).

$$\begin{pmatrix}
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_2 < 1 & F(Q_1) > 1, F(Q_2) < 1 \text{ et } \phi_1 > 1 & b < 0 & \phi_2, \phi_3 \text{ ou } \phi_4 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_2 < 1 & F(Q_1) > 1, F(Q_2) < 1 \text{ et } \phi_1 > 1 & b \geq 0 & \phi_2 \text{ ou } \phi_5 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_2 < 1 & F(Q_1) < 1 & b < 0 & \phi_1, \phi_3 \text{ ou } \phi_4 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_2 < 1 & F(Q_1) < 1 & b \geq 0 & \phi_1 \text{ ou } \phi_5 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 > 1 & F(Q_1) > 1, F(Q_6) < 1 \text{ et } \phi_1 > \lambda_2 & b < 0 & \phi_6, \phi_3 \text{ ou } \phi_4 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 > 1 & F(Q_1) > 1, F(Q_6) < 1 \text{ et } \phi_1 > \lambda_2 & b \geq 0 & \phi_6 \text{ ou } \phi_5 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 > 1 & F(Q_1) < 1 \text{ et } \phi_1 > \lambda_2 & b < 0 & \phi_1, \phi_3 \text{ ou } \phi_4 \\
\gamma_1 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 > 1 & F(Q_1) < 1 \text{ et } \phi_1 > \lambda_2 & b \geq 0 & \phi_1 \text{ ou } \phi_7
\end{pmatrix}$$

(2) Si $d > \max(1, 2c^2, 2|c|)$ et les conditions cités dans les colonnes (1), (2), (3) et (4) sont satisfaites alors le point extrémal adjacent à 1 est l'un des points décrits dans la colonne (5).

$$\begin{pmatrix}
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_1 < 1 & F(P_1) > 1, F(P_2) < 1 \text{ et } \varphi_1 > 1 & c < 0 & \varphi_2, \varphi_3 \text{ ou } \varphi_4 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_1 < 1 & F(P_1) > 1, F(P_2) < 1 \text{ et } \varphi_1 > 1 & c \geq 0 & \varphi_2 \text{ ou } \varphi_5 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_1 < 1 & F(P_1) < 1 & c < 0 & \varphi_1, \varphi_3 \text{ ou } \varphi_4 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \lambda_1 < 1 & F(P_1) < 1 & c \geq 0 & \varphi_1 \text{ ou } \varphi_5 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 > 1 & F(P_1) > 1, F(P_6) < 1 \text{ et } \varphi_1 > \lambda_1 & c < 0 & \varphi_6, \varphi_3 \text{ ou } \varphi_4 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 > 1 & F(P_1) > 1, F(P_6) < 1 \text{ et } \varphi_1 > \lambda_1 & c \geq 0 & \varphi_6 \text{ ou } \varphi_5 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 > 1 & F(P_1) < 1 \text{ et } \varphi_1 > \lambda_1 & c < 0 & \varphi_1, \varphi_3 \text{ ou } \varphi_4 \\
w_1 > 0, w_2 \in \mathbb{R}^* & \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \lambda_1 > 1 & F(P_1) < 1 \text{ et } \varphi_1 > \lambda_1 & c \geq 0 & \varphi_1 \text{ ou } \varphi_7
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \mu_1 < 1 & F(\tilde{P}_1) > 1, F(\tilde{P}_2) < 1 \text{ et } \tilde{\varphi}_1 > 1 & c < 0 & \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3 \text{ ou } \tilde{\varphi}_4 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \mu_1 < 1 & F(\tilde{P}_1) > 1, F(\tilde{P}_2) < 1 \text{ et } \tilde{\varphi}_1 > 1 & c \geq 0 & \tilde{\varphi}_2 \text{ ou } \tilde{\varphi}_5 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \mu_1 < 1 & F(\tilde{P}_1) < 1 & c < 0 & \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_3 \text{ ou } \tilde{\varphi}_4 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, 0 < \mu_1 < 1 & F(\tilde{P}_1) < 1 & c \geq 0 & \tilde{\varphi}_1 \text{ ou } \tilde{\varphi}_5 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, \mu_1 > 1 & F(\tilde{P}_1) > 1, F(\tilde{P}_6) < 1 \text{ et } \tilde{\varphi}_1 > \mu_1 & c < 0 & \tilde{\varphi}_6, \tilde{\varphi}_3 \text{ ou } \tilde{\varphi}_4 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, \mu_1 > 1 & F(\tilde{P}_1) > 1, F(\tilde{P}_6) < 1 \text{ et } \tilde{\varphi}_1 > \mu_1 & c \geq 0 & \tilde{\varphi}_6 \text{ ou } \tilde{\varphi}_5 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, \mu_1 > 1 & F(\tilde{P}_1) < 1 \text{ et } \tilde{\varphi}_1 > \mu_1 & c < 0 & \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_3 \text{ ou } \tilde{\varphi}_4 \\
\tilde{w}_1 > 0, \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^* & \mu_2 \in \mathbb{R}^*, \mu_1 > 1 & F(\tilde{P}_1) < 1 \text{ et } \tilde{\varphi}_1 > \mu_1 & c \geq 0 & \tilde{\varphi}_1 \text{ ou } \tilde{\varphi}_7
\end{pmatrix}$$

3 Application

Soient $n \geq 2$ et $m \geq 2$ deux entiers , on considère le polynôme :

$$f(X) = X^3 - n^m X^2 - (n-1)X - n^m.$$

Levesque et Rhin [3] ont montré que $f(X)$ est irréductible, admet une racine réelle , notée α, unique.

Théorème 3.1. *Soit α la racine réelle du polynôme $f(X)$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ et $L_0 =< 1, \alpha^2 - n^m\alpha, n\alpha >$.*
i) La suite des points extrémaux de L_0 est :
$\psi_0 = 1,\ \psi_{3s+1} = \alpha^2(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^s, \psi_{3s+2} = (\frac{n\alpha}{\alpha-n^m})^{s+1}\ , \psi_{3s+3} = n\alpha(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^{s+1}$
pour $0 \leq s \leq m-1$.
$\psi_{3m+1} = \alpha^2(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^m,\ \psi_{3m+2} = n\alpha(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^{m+1},\ \psi_{3m+3} = \alpha^2(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^{m+1}$.
$\psi_{3m+2s} = n^s\alpha(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^{m+s}$ *et* $\psi_{3m+2s+1} = \alpha^2(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^{m+s}$ *pour* $2 \leq s \leq m$.
ii) L'unité fondamentale de L_0 est $\varepsilon = \alpha^2(\frac{\alpha}{\alpha-n^m})^{2m}$ et la longueur de la période du développement par l'algorithme de Voronoi est $l = 5m+1$.

Preuve. A l'aide des théorèmes précédents, on démontre par récurrence le théorème de la façcon suivante :
Soit $L_0 =< 1, \alpha^2 - n^m\alpha, n\alpha >$. On montre que $\psi_1 = \alpha^2$ est le point extrémal adjacent à $\psi_0 = 1$ dans L_0.
On choisit un point auxiliaire $\bar{\Phi}_1$ tel que $\{\psi_1, \bar{\phi}_1, \psi_0\}$ soit une base de L_0, à savoir $\bar{\Phi}_1 = n\alpha$.
Pour déterminer ψ_2 on cherche le point extrémal adjacent á 1 dans le réseau $L_1 =< 1, \frac{\bar{\phi}_1}{\psi_1}, \frac{\psi_0}{\psi_1} >=$
$< 1, \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2} >$ on montre que $\frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{n}{\alpha(\alpha-n^m)}$ c'est-à-dire $\psi_2 = \frac{n\alpha}{\alpha-n^m}$.
En poursuivant ce processus, on obtient pour $0 \leq s \leq 5m$ les résultats donnés dans le tableau qui suit :

	$L_0 =< 1, \alpha^2 - n^m\alpha, n\alpha >$	$\psi_1/\psi_0 = \alpha^2$ $(0, 1, n^{m-1})$	$\bar{\phi}_1/\psi_0 = n\alpha$ $(0, 0, 1)$
k	$L_k =< 1, \frac{\phi_k}{\psi_k}, \frac{\psi_{k-1}}{\psi_k} >$	ψ_{k+1}/ψ_k	$\bar{\phi}_{k+1}/\psi_k$
1	$< 1, \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2} >$	(1, 0, 1)	(0, 1, 0)
2	$< 1, \alpha - n^m, \frac{\alpha}{n}(\alpha - n^m) >$	(n^m, 1, 0)	(0,0, 1)
3s avec $1 \leq s \leq m$	$< 1, \frac{\alpha-n^m}{n}, \frac{n^{s-1}}{\alpha} >$	(n^{m-1}, 1, 0)	(0,0, 1)

3s+1 avec $1 \leq s \leq m-1$	$< 1, \frac{n^s}{\alpha^2}, \frac{n}{\alpha} >$	$(n^s, 1, 0)$	(0,0, 1)
3s+2 avec $1 \leq s \leq m-1$	$< 1, \frac{\alpha - n^m}{n^s}, \frac{\alpha^2 - n^m\alpha}{n^{s+1}} >$	$(n^{m-s}, 1, 0)$	(0,0, 1)
3m+1	$< 1, \frac{n^m}{\alpha^2}, \frac{n}{\alpha} >$	$(n^m, 1,1)$	$(n^m$,1,0)
3m+2	$< 1, \frac{n^m}{\alpha}, \frac{\alpha - n^m}{n} >$	$(n^{m-1}, 0,1)$	(0,1,0)
3m+3 et $m \geq 2$	$< 1, \frac{n^{m+1}}{\alpha^2}, \frac{n}{\alpha} >$	$(n^{m+1}, 1,n)$	$(n^{m+1}$,1,n-1)
3m+2s avec $2 \leq s \leq m$	$< 1, \frac{\alpha}{n}(\alpha - n^m), \frac{\alpha - n^m}{n^s} >$	$(n^{m-s}, 0,1)$	(0,n,0)
3m+2s+1 avec $2 \leq s \leq m-1$ et $m \geq 3$	$< 1, n^s(\alpha - n^m), \frac{n^s}{\alpha} >$	$(n^{m+s}, 1,1)$	$(n^{m+s}$,1,0)

Les troisièmes et quatrièmes colonnes donnent les coordonnées de $\frac{\psi_{k+1}}{\psi_k}$ et $\frac{\bar{\phi}_{k+1}}{\psi_k}$ dans le réseau L_k, de plus on vérifie facilement que $det\,(\frac{\psi_{k+1}}{\psi_k}, \frac{\bar{\phi}_{k+1}}{\psi_k}, 1)$ est différent de zéro, d'ou $(\frac{\psi_{k+1}}{\psi_k}, \frac{\bar{\phi}_{k+1}}{\psi_k}, 1)$ est une base du réseau L_k .
A l'aide des quotients successifs $\frac{\psi_{k+1}}{\psi_k}$ on peut facilement déterminer la suite des points extrémaux ψ_k de L_0.
On en déduit que

$$\psi_{5m+1} = \alpha^2(\frac{\alpha}{\alpha - n^m})^{2m}$$

On a $N(\psi_{5m+1}) = 1$ et $N(\psi_i)$ est différent de 1 si $1 \leq i \leq 5m$.
Donc ψ_{5m+1} est l'unité fondamentale ϵ de L_0 et la longueur de la période du développement de l'algorithme de Voronoi est $l = 5m + 1$, ce qui démontre le théorème.

Références

[1] B. Adam : Développements périodiques de familles paramétrées de nombres algébriques Application à la recherche d'unités. Thèse de doctorat. Univ. Metz 1995.

[2] E. Dubois : *Approximations diophantiennes simultanées de nombres algébriques. Calcul des meilleures approximations*, Thèse de Doctorat d'Etat. Univ. Pierre et Marie Curie. Paris (1980).

[3] C. Levesque et G. Rhin : Two Families of Periodic Jacobi Algorithms with Period Lengths Going to Infinity. J. of Number Theory, vol. 37, n2, 1991, 173-180.

[4] O. Perron : *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann. 64. (1907) 1-76.

[5] G. Rhin : *Développement par l' algorithme de Jacobi-Perron de* $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{16})$ *à l'ordre 1954*. (Communication personnelle).

[6] G.F. Voronoi : On a generalization of the Algorithm of Continued Fractions. Doctoral Dissertation. Warsaw 1896 (en Russe).

[7] H.C. Williams : The period length of Voronoi's algorithm for certain cubic orders. Publicationes Math. Debrecen., Tomus 37 (1990) 245-265.

Département de Mathématiques et Informatique,
Faculté des Sciences Dhar-Mahraz. B.P. 1796,
Fes - MAROC
l.ouafae@caramail.com

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences et Techniques
Settat MAROC
Ahmed.Farhane@math.unicaen.fr