Involutions en degré au plus 4 et corps des fonctions d'une quadrique en caractéristique 2

Ahmed Laghribi*

Abstract

The aim of this paper is to study in characteristic 2 and degree at most 4 the isotropy of involutions of the first kind and quadratic paires over the function field of a projective quadric. We also give a complete answer to the hyperbolicity over an inseparable quadratic extension in arbitrary degree. The case of a separable quadratic extension has been studied in [4].

1 Introduction

Fixons F un corps commutatif et A une F-algèbre simple centrale de dimension finie munie d'une involution σ anisotrope.

Le problème qu'on considère dans ce papier consiste à classifier les formes quadratiques anisotropes φ pour lesquelles l'involution σ devient hyperbolique, ou plus généralement isotrope, après extension des scalaires au corps des fonctions $F(\varphi)$ de la quadrique projective d'équation $\varphi = 0$. Lorsque F est de caractéristique différente de 2 et A est à division de degré 2, 4 ou 8 avec σ de type orthogonal, on a classifié dans [9] (partiellement en degré 8) les formes quadratiques φ pour lesquelles l'involution σ devient hyperbolique sur $F(\varphi)$. Toujours en caractéristique différente de 2, Dejaiffe a aussi traité l'hyperbolicité et l'isotropie sur le corps des fonctions

*L'auteur a été soutenu par le projet Européen HPRN-CT-2002-00287 "Algebraic K-Theory, Linear Algebraic Groups and Related Structures".

Received by the editors July 2003.

Communicated by M. Van den Bergh.

2000 *Mathematics Subject Classification :* 11E04, 11E81, 16W10.

Key words and phrases : Formes quadratiques, corps des fonctions d'une quadrique projective, algèbres simples centrales, involutions, paires quadratiques, hyperbolicité, isotropie.

d'une conique lorsque A est de degré au plus 4 (non nécessairement à division) et σ est de première espèce [3]. Dans ce sens, rappelons aussi un résultat général dû à Karpenko [6] qui prouve que si F est de caractéristique différente de 2 et A est à division avec σ anisotrope de type orthogonal, alors celle-ci reste anisotrope après extension des scalaires au corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de A. En caractéristique 2 ce problème n'a pas été considéré à l'exception d'un résultat dû à Elomary et Tignol [4] où l'hyperbolicité a été étudiée sur une extension quadratique séparable pour classifier les formes quadratiques sur un corps gauche de centre un corps local ou global.

Le but de ce papier est donc d'étendre l'étude de ce problème à la caractéristique 2 et ce en étudiant l'isotropie et l'hyperbolicité d'une involution symplectique et d'une paire quadratique sur le corps des fonctions d'une quadrique lorsque A est de degré au plus 4 (non nécessairement à division). Aussi, on va étudier l'isotropie d'une involution orthogonale en degré 2.

Après un rappel de certaines notions qu'on aura besoin sur les formes quadratiques et les involutions en caractéristique 2, on montrera dans la section 3 qu'en degré au plus 4 l'isotropie d'une paire quadratique (de discriminant trivial lorsque le degré est 4) et d'une involution symplectique est équivalente à leur hyperbolicité, et donc dans la majorité des cas cela permettra de traiter tout simplement la notion d'hyperbolicité. Pour une involution symplectique en degré 4, l'hyperbolicité se ramène à l'isotropie d'une forme quadratique de dimension 5 et donc on fera appel à des résultats récents obtenus en caractéristique 2 sur les formes quadratiques voisines, l'analogue du théorème de la sous-forme de Cassels-Pfister et l'isotropie d'une forme quadratique de dimension 5 sur le corps des fonctions d'une quadrique [10]. Dans la section 4, on étudiera l'hyperbolicité d'une paire quadratique en distinguant entre le cas où le discriminant est trivial ou non. Pour cela, on se basera sur la structure de l'algèbre de Clifford, et la décomposabilité d'une algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une paire quadratique de discriminant trivial. La section 5 sera consacrée à l'étude de l'isotropie d'une involution orthogonale en degré 2, par contre en degré 4 on n'a pas de réponse. Pour finir ce papier on donnera une réponse complète concernant l'hyperbolicité sur une extension quadratique inséparable en degré quelconque. Comme on va le voir dans toute l'étude les quadriques singulières ne seront pas exclues.

Remerciements. Je tiens à remercier le referee pour ses commentaires intéressants.

2 Rappels

Pour plus de détails sur certaines notions qu'on va utiliser sur les formes quadratiques et les involutions on renvoie aux livres [2], [8] et [11].

2.1 Involutions

Une involution σ sur A est un anti-automorphisme d'ordre 2 de A. On dit que σ est de première espèce si elle se restreint à l'identité sur F, sinon elle est dite de deuxième espèce. Une involution de première espèce est dite symplectique si elle est adjointe à une forme bilinéaire symétrique alternée après extension des scalaires à un corps de déploiement de A, sinon elle est dite orthogonale. Lorsque F est de caractéristique 2, on a d'après [8, Prop. 2.6]:

(1)

$$\begin{aligned} \sigma \text{ est symplectique} &\iff 1 \in \mathrm{Alt}\,(A,\sigma) \\ &\iff \mathrm{Trd}_A(\mathrm{Sym}\,(A,\sigma)) = 0 \end{aligned}$$

où $\mathrm{Alt}\,(A,\sigma) = \{x - \sigma(x) \mid x \in A\}$, $\mathrm{Sym}\,(A,\sigma) = \{x \in A \mid \sigma(x) = x\}$ et $\mathrm{Trd}_A(x)$ désigne la trace réduite d'un élément $x \in A$.

(2) $\dim_F \mathrm{Sym}\,(A,\sigma) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim_F \mathrm{Alt}\,(A,\sigma) = \frac{n(n-1)}{2}$ où $n = \sqrt{\dim_F A}$ appelé le degré de A et noté $\deg A$.

Toujours en caractéristique 2, une paire quadratique sur A est la donnée d'un couple (σ, f) formé d'une involution symplectique σ sur A et d'une application F-linéaire $f : \mathrm{Sym}\,(A,\sigma) \longrightarrow F$ vérifiant $f(x+\sigma(x)) = \mathrm{Trd}_A(x)$ pour tout $x \in A$ (voir la définition [8, Def. 5.4] et le commentaire la suivant).

L'orthogonal d'un idéal à droite I de A relativement à σ est l'ensemble $I^{\perp} = \{x \in A \mid \sigma(x)y = 0 \text{ pour tout } y \in I\}$. On dit que I est isotrope relativement à σ si $I \subset I^{\perp}$. Dans le cas d'une paire quadratique (σ, f), on dit que I est isotrope relativement à (σ, f) si $I \subset I^{\perp}$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in I \cap \mathrm{Sym}\,(A,\sigma)$.

Définition 2.1. *(1) On dit que σ est isotrope (resp. hyperbolique) s'il existe un idéal à droite de A non nul et isotrope relativement à σ (resp. s'il existe un idempotent $e \in A$ tel que $\sigma(e) = 1 - e$).*
(2) On dit qu'une paire quadratique (σ, f) est isotrope (resp. hyperbolique lorsque A est de degré pair) s'il existe un idéal à droite de A non nul et isotrope relativement à (σ, f) (resp. s'il existe un idempotent $e \in A$ tel que $f(s) = \mathrm{Trd}_A(es)$ pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A,\sigma)$).
(3) Une involution (resp. une paire quadratique) qui n'est pas isotrope est dite anisotrope.

Rappelons que l'indice $\mathrm{ind}\,(A,\sigma)$ (*resp.* $\mathrm{ind}\,(A,\sigma,f)$) d'une F-algèbre A munie d'une involution σ (*resp.* d'une paire quadratique (σ, f)) est défini par $\mathrm{ind}\,(A,\sigma) = \{\mathrm{rdim}\, I \mid I \subset I^{\perp}\}$ (*resp.* $\mathrm{ind}\,(A,\sigma,f) = \{\mathrm{rdim}\, I \mid I \text{ isotrope relativement à } (\sigma,f)\}$) où $\mathrm{rdim}\, I$ est la dimension réduite de I (voir [8, Pages 73-74] pour plus de détails sur cette notion d'indice).

En terme d'indice, le critère d'hyperbolicité est qu'une involution σ (*resp.* une paire quadratique (σ, f)) est hyperbolique si et seulement si $\frac{1}{2}\deg A \in \mathrm{ind}\,(A,\sigma)$ et si de plus F est de caractéristique 2 l'involution σ est symplectique ou de deuxième espèce (*resp.* $\frac{1}{2}\deg A \in \mathrm{ind}\,(A,\sigma,f)$) [8, Prop. 6.7, 6.14].

Pour $\alpha \in F$ et $\beta \in F^*$, on désigne par $[\alpha, \beta)$ l'algèbre de quaternions dont une base (canonique) est $\{1, u, v, uv\}$ qui satisfait les relations:

$$\begin{cases} u^2 + u = \alpha \\ v^2 = \beta \\ uv + vu = v \end{cases} \tag{1}$$

L'unique involution symplectique σ de $[\alpha, \beta)$ est l'involution (canonique) qui est donnée par: $\sigma(u) = u + 1$ et $\sigma(v) = v$.

2.2 Formes quadratiques

Lorsque F est de caractéristique 2, une forme quadratique φ sur F de dimension ≥ 1 s'écrit à isométrie près:

$$\varphi \simeq [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_s] \tag{2}$$

où $\simeq$ désigne l'isométrie des formes quadratiques et $[a, b]$ (*resp.* $[a]$) désigne la forme quadratique $ax^2 + xy + by^2$ (*resp.* ax^2).

Comme dans (2), la forme quadratique $[c_1] \perp \cdots \perp [c_s]$ est unique à isométrie près, on l'appelle la partie quasi-linéaire de φ et on la note $\mathrm{ql}(\varphi)$ (par contre, en général, la forme $[a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r]$ n'est pas unique lorsque $s \neq 0$). Ainsi, le couple (r, s) ne dépend que de la classe d'isométrie de φ. On l'appelle le type de φ et on le note $\mathrm{ty}(\varphi)$.

Si $\mathrm{ql}(\varphi) = 0$, alors on note $\triangle(\varphi)$ l'invariant d'Arf de φ. Deux formes quadratiques φ et ψ sont dites équivalentes et on note $\varphi \sim \psi$ (*resp.* semblables) lorsque $\varphi \perp k \times [0, 0] \simeq \psi \perp l \times [0, 0]$ pour certains entiers $k, l \geq 0$ (*resp.* $\varphi \simeq \alpha\psi$ pour un certain $\alpha \in F^*$).

Rappelons aussi que φ se décompose de manière unique sous la forme $\varphi \simeq i \times [0, 0] \perp j \times [0] \perp \varphi_{\mathrm{an}}$ avec φ_{an} anisotrope qu'on appelle la partie anisotrope de φ [1], [5]. L'entier i s'appelle l'indice de Witt de φ et se note $i_W(\varphi)$.

On note $D_F(\varphi)$ l'ensemble des scalaires de F^* représentés par une forme quadratique φ. Pour K/F une extension, on désigne par φ_K la forme quadratique $\varphi \otimes K$.

Définition 2.2. *([10]) Soient F un corps commutatif de caractéristique 2 et $\varphi \simeq [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_s]$ une forme quadratique sur F.*
(1) On dit que φ est dominée par ψ, qu'on note $\varphi \preccurlyeq \psi$, s'il existe des formes quadratiques $\delta, \xi_1, \cdots, \xi_s$ tels qu'on ait les deux conditions suivantes:

(i) $\psi \simeq [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp \xi_1 \perp \cdots \perp \xi_s \perp \delta$.

(ii) Pour tout $i \in \{1, \cdots, s\}$, $\xi_i = [c_i]$ ou $\xi_i = [c_i, d_i]$ pour un certain $d_i \in F$.

(2) On dit que φ est faiblement dominée par ψ, qu'on note $\varphi \preccurlyeq' \psi$, s'il existe $a \in F^*$ tel que $a\varphi \preccurlyeq \psi$ (en particulier, $\varphi \preccurlyeq \psi \Longrightarrow \varphi \preccurlyeq' \psi$).

L'analogue du théorème de la sous-forme de Cassels-Pfister en caractéristique 2 est le suivant:

Proposition 2.3. *([10, Prop. 3.4]) Soient φ et ψ deux formes quadratiques sur F anisotropes telles que ψ soit de type $(r, 0)$ et hyperbolique sur $F(\varphi)$ (avec φ de type quelconque). Alors $\varphi \preccurlyeq' \psi$.*

Pour mieux combiner la définition 2.2 et la proposition 2.3 on donne cette remarque importante:

Remarque 2.4. *Dans la définition de la relation de domination, on a fixé à l'avance une écriture pour φ mais dans la proposition 2.3 on n'a pas fait cela. En effet, en analysant la preuve de la proposition 2.3 on s'aperçoit qu'elle vaut pour n'importe quelle écriture de φ. Ainsi, si on écrit la relation de domination (ou faible domination) sans fixer à l'avance une écriture de la forme dominée (ou faiblement dominée), cela veut dire que l'énoncé ne dépend pas de l'écriture de la forme en question. En particulier, ce commentaire vaut pour l'énoncé du théorème 3.7.*

Une n-forme de Pfister est une forme de type $\rho \otimes [1, b]$ pour ρ une n-forme bilinéaire de Pfister où $\otimes$ désigne l'action de l'anneau de Witt $W(F)$ sur le groupe de Witt $W_q(F)$ [2]. On note $P_n(F)$ l'ensemble des n-formes de Pfister et $GP_n(F) = F^* P_n(F)$. Une forme quadratique φ est une voisine s'il existe une n-forme de Pfister π telle que $\dim \varphi > 2^n$ et $\varphi \preccurlyeq' \pi$.

Sur les formes quadratiques voisines on va utiliser le lemme suivant:

Lemme 2.5. *([10, Prop. 3.1]) Si φ est une forme quadratique voisine d'une forme de Pfister π, alors π est unique et pour toute extension K/F les formes φ_K et π_K sont simultanément isotropes ou anisotropes. De plus, φ est distincte de sa partie quasi-linéaire.*

Pour une forme quadratique φ d'espace sous-jacent V, on note $C_0(\varphi)$ son algèbre de Clifford paire. L'unique involution de $C_0(\varphi)$ qui se restreint à l'identité sur V se note σ_0 et s'appelle l'involution standard de $C_0(\varphi)$.

On suppose désormais F de caractéristique 2 et A de degré 2 ou 4 munie d'une involution symplectique ou d'une paire quadratique anisotrope. On exclut le cas où A est une algèbre déployée puisque sur une telle algèbre une involution symplectique est nécessairement hyperbolique du fait qu'elle est adjointe à une forme bilinéaire symétrique alternée qui est hyperbolique, et l'isotropie et l'hyperbolicité d'une paire quadratique se ramènent à celles d'une forme quadratique de partie quasi-linéaire nulle.

3 Cas d'une involution symplectique

Dans cette section, on suppose que A est de degré 2 ou 4 munie d'une involution symplectique σ anisotrope.

3.1 Cas de degré 4

Définition 3.1. *(1) Une forme quadratique anisotrope φ de dimension 4 est dite de type exceptionnel s'il existe $a, b, c \in F^*$ tels que $\varphi \simeq [1] \perp [a] \perp [b] \perp [c]$ et $[1] \perp [a] \perp [b]$ soit isotrope sur $F(\sqrt{c})$.*
(2) Avec les mêmes notations et hypothèses que dans l'assertion (1), on note $\overline{\varphi} = [1] \perp [a] \perp [b]$.

On note $\mathrm{Exc}(F)$ l'ensemble des formes quadratiques de type exceptionnel et $\mathrm{GExc}(F) = F^* \,\mathrm{Exc}(F)$. Sur les formes quadratiques de $\mathrm{Exc}(F)$ on aura besoin du résultat suivant:

Proposition 3.2. *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans la définition 3.1, la forme $\overline{\varphi}_{F(\varphi)}$ est isotrope (clairement, φ est aussi isotrope sur $F(\overline{\varphi})$).*

Preuve. Voir [10, Prop. 4.10]. ∎

Comme on l'a évoqué dans l'introduction, en général, en degré au plus 4 l'isotropie d'une involution symplectique et d'une paire quadratique implique leur hyperbolicité.

Proposition 3.3. *Soit A une F-algèbre simple centrale de degré 2 ou 4 munie d'une involution symplectique σ ou d'une paire quadratique (σ, f). Lorsque $\deg A = 4$, on suppose que le discriminant $\operatorname{disc}(\sigma, f)$ de (σ, f) est trivial. Si σ (resp. (σ, f)) est isotrope, alors elle est hyperbolique.*

Preuve. On suppose que σ (*resp.* (σ, f)) est isotrope.

(1) Cas où $\deg A = 2$: Dans ce cas l'isotropie implique qu'il existe un idéal à droite non nul et isotrope relativement à σ (*resp.* (σ, f)) de dimension réduite $1 = \frac{\deg A}{2}$. Ainsi, on a hyperbolicité de σ (*resp.* (σ, f)).

(2) Cas où $\deg A = 4$:

(i) Cas d'une involution symplectique: Puisque $\operatorname{ind}(A, \sigma) \neq \{0\}$, on obtient par [8, Prop. 15.21] que $2 \in \operatorname{ind}(A, \sigma)$ et donc σ est hyperbolique.

(ii) Cas d'une paire quadratique: Puisque $\operatorname{disc}(\sigma, f)$ est trivial, $F(\wp^{-1}(\operatorname{disc}(\sigma, f)))$ n'est pas un corps. On est donc dans l'assertion (3) ou (4) de [8, Prop. 15.14]. En particulier, $2 \in \operatorname{ind}(A, \sigma, f)$, ce qui implique que (σ, f) est hyperbolique. ∎

La proposition suivante permet de ramener l'hyperbolicité de (A, σ) à l'isotropie d'une forme quadratique de dimension 5.

Proposition 3.4. *(1) ([8, Pages 216-217]) On a $(A, \sigma) \simeq (C_0(\zeta), \sigma_0)$ où ζ est une F-forme quadratique de type $(2, 1)$ avec $\operatorname{ql}(\zeta)$ anisotrope et σ_0 est l'involution standard de $C_0(\zeta)$.*
(2) ([8, Prop. 15.21]) Pour toute extension K/F, l'involution σ devient hyperbolique sur K si et seulement si $i_W(\zeta_K) \geq 1$.

Remarque 3.5. *Avec les mêmes notations que dans la proposition 3.4 et pour toute extension K/F, l'isotropie de ζ_K est équivalente à $i_W(\zeta_K) \geq 1$ du fait que $\operatorname{ql}(\zeta)$ est anisotrope.*

On aura besoin d'un résultat sur la simplification de Witt:

Proposition 3.6. *([7, Prop. 1.2]) Soient φ et φ' deux formes quadratiques de même dimension (de type quelconque). Soit ψ une forme quadratique de type $(r, 0)$ telle que $\varphi \perp \psi \simeq \varphi' \perp \psi$. Alors, $\varphi \simeq \varphi'$.*

La proposition 3.3, le théorème 3.7 et la proposition 3.8 vont donc achever notre étude pour une involution symplectique. Notre classification en degré 4 est la suivante:

Théorème 3.7. *Soient ζ comme dans la proposition 3.4, φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2 telle que $1 \in D_F(\varphi)$. Lorsque φ est de type exceptionnel, on lui associe la forme $\overline{\varphi}$ comme dans la définition 3.1(2). Alors, l'hyperbolicité de σ sur $F(\varphi)$ se résume comme suit:*

(1) Cas où ζ n'est pas voisine:

Condition sur φ	**Hyperbolicité de σ sur $F(\varphi)$**
$\dim\varphi \geq 6$	*σ n'est pas hyperbolique sur $F(\varphi)$ (donc σ est anisotrope sur $F(\varphi)$)*
φ est voisine de dimension 5	*même*
$\dim\varphi = 5$ *et* $\dim \mathrm{ql}(\varphi) \geq 2$	*même*
$\mathrm{ty}(\varphi) = (0,4)$ *et* $\varphi \notin \mathrm{Exc}(F)$	*même*
$\mathrm{ty}(\varphi) = (0,2)$	*hyperbolicité sur $F(\varphi)$$\Leftrightarrow$ Il existe $x, y \in F^*$ tels que $\varphi \simeq [x] \perp [y]$ et $[x] \perp [y] \preccurlyeq' \zeta$*
$\mathrm{ty}(\varphi) = (1,0)$	*hyperbolicité sur $F(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $\varphi \preccurlyeq' \zeta$*
$\mathrm{ty}(\varphi) = (2,0)$ *et* $\varphi \notin P_1(F)$	*même*
φ n'est pas voisine et $\mathrm{ty}(\varphi) = (2,1)$	*même*
$\mathrm{ty}(\varphi) = (1,1)$	*même*
$\varphi \in \mathrm{Exc}(F)$	*hyperbolicité sur $F(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $\overline{\varphi} \preccurlyeq' \zeta$*
$\varphi \in P_1(F)$	*hyperbolicité sur $F(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ ζ domine une voisine de φ de dimension* 3
$\mathrm{ty}(\varphi) = (0,3)$ *ou* $(1,2)$	*hyperbolicité sur $F(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ il existe $\pi \in GP_2(F)$ et φ' de type $(2,1)$ avec $\zeta \sim \pi \perp \varphi'$, $\varphi \preccurlyeq' \pi$, $\varphi \preccurlyeq' \varphi'$*

(2) Cas où ζ est voisine d'une forme $\pi \in P_2(F)$: Dans ce cas, on a que σ est hyperbolique sur $F(\varphi)$ si et seulement si $\varphi \preccurlyeq' \pi$.

Preuve. (1) Si σ est hyperbolique sur $F(\varphi)$, alors $\zeta_{F(\varphi)}$ devient isotrope par la proposition 3.4. Puisque ζ est anisotrope de type $(2,1)$ mais pas voisine, la classification se déduit de [10, Th. 1.2][1]. Réciproquement, si ($\varphi \preccurlyeq' \zeta$) ou ($\varphi \in P_1(F)$ et ζ domine une voisine de φ) alors $\zeta_{F(\varphi)}$ est isotrope. Si $\varphi \in \mathrm{Exc}(F)$ et $\overline{\varphi} \preccurlyeq' \zeta$, la forme $\zeta_{F(\varphi)}$ est isotrope du fait que $\overline{\varphi}_{F(\varphi)}$ est isotrope (Proposition 3.2). Si $\zeta \sim \pi \perp \varphi'$ avec $\varphi \preccurlyeq' \pi$, $\varphi \preccurlyeq' \varphi'$, $\pi \in GP_2(F)$ et φ' de type $(2,1)$, alors on utilise le fait que $\pi_{F(\varphi)} \simeq 4 \times [0,0]$ et la simplification de Witt (Proposition 3.6) pour déduire que $\zeta_{F(\varphi)} \simeq \varphi'_{F(\varphi)}$ et donc $\zeta_{F(\varphi)}$ est isotrope. Finalement, la condition donnée dans le cas $\mathrm{ty}(\varphi) = (0,2)$ implique aussi l'isotropie de $\zeta_{F(\varphi)}$. Ainsi, dans tous les cas $i_W(\zeta_{F(\varphi)}) \geq 1$ et la proposition 3.4(2) implique que l'involution σ devient hyperbolique sur $F(\varphi)$.

(2) On combine les propositions 2.3, 3.4, le lemme 2.5 et le fait qu'une forme de Pfister isotrope est hyperbolique pour avoir:

$$\begin{aligned} \sigma \text{ est hyperbolique sur } F(\varphi) &\iff \zeta_{F(\varphi)} \text{ est isotrope} \\ &\iff \pi_{F(\varphi)} \text{ est isotrope} \\ &\iff \varphi \preccurlyeq' \pi. \end{aligned}$$

■

[1] Comme indiqué dans le tableau dans le cas $\mathrm{ty}(\varphi) = (0,2)$, on n'a pas nécessairement que φ est faiblement dominée par ζ pour une écriture de φ fixée à l'avance mais pour une certaine écriture convenable comme on peut le voir dans la preuve de [10, Prop. 5.4].

3.2 Cas de degré 2

Dans ce cas, A est une F-algèbre de quaternions et σ est l'involution canonique. On a la classification suivante:

Proposition 3.8. *Soient φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2. On a équivalence entre:*
(1) σ est hyperbolique sur $F(\varphi)$.
(2) φ est faiblement dominée par la forme norme N_A de A. En particulier, φ est de type $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ ou appartient à $GP_1(F)$.

Preuve. On a que l'isotropie (ou l'hyperbolicité) de σ sur $F(\varphi)$ est équivalente à l'isotropie de N_A sur $F(\varphi)$. Pour conclure on utilise la proposition 2.3. ∎

4 Cas d'une paire quadratique

4.1 Cas de degré 4

Rappelons un résultat:

Proposition 4.1. *([8, Cor. 5.20]) Soient F un corps commutatif de caractéristique 2 et (A_1, σ_1), (A_2, σ_2) deux F-algèbres simples centrales munies d'involutions symplectiques. Alors, il existe une unique paire quadratique $(\sigma_1 \otimes \sigma_2, f_\otimes)$ sur $A_1 \otimes_F A_2$ telle que: $f_\otimes(s_1 \otimes s_2) = 0$ pour tout $s_1 \in \mathrm{Sym}\,(A_1, \sigma_1)$ et $s_2 \in \mathrm{Sym}\,(A_2, \sigma_2)$.*

En vertu de la proposition 3.3 on va traiter deux cas suivant que $\mathrm{disc}\,(\sigma, f)$ est trivial ou non.

4.1.1 Cas où $\mathrm{disc}\,(\sigma, f)$ est trivial

Dans ce cas on a la décomposition suivante [8, Cor. 15.12]:

$$(A, \sigma, f) \simeq (Q_1 \otimes_F Q_2, \gamma_1 \otimes \gamma_2, f_\otimes) \tag{3}$$

où Q_i est une algèbre de quaternions, γ_i est son involution canonique et $f_\otimes$ est définie comme dans la proposition 4.1. Notre classification est la suivante:

Proposition 4.2. *Avec les mêmes notations que dans la relation (3) et pour φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2, on a équivalence entre:*
(1) (σ, f) est hyperbolique sur $F(\varphi)$,
(2) φ est faiblement dominée par la forme norme de Q_1 ou de Q_2. En particulier, φ est de type $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ ou appartient à $GP_1(F)$.

Preuve. Les algèbres Q_1 et Q_2 sont uniques à isomorphisme près puisque l'algèbre de Clifford $C(A, \sigma, f)$ de (A, σ, f) est $Q_1 \times Q_2$. Puisque (σ, f) est anisotrope, on est dans l'assertion (1) de [8, Prop. 15.14] et donc Q_1 et Q_2 sont à division, ce qui implique que N_{Q_1} et N_{Q_2} sont anisotropes. De nouveau par [8, Prop. 15.14] on a que (σ, f) est hyperbolique sur $F(\varphi)$ si et seulement si $Q_1 \otimes F(\varphi)$ ou $Q_2 \otimes F(\varphi)$ est déployée, ce qui équivaut à l'hyperbolicité de N_{Q_1} ou N_{Q_2} sur $F(\varphi)$. Pour conclure on utilise la proposition 2.3. ∎

4.1.2 Cas où $\mathrm{disc}(\sigma, f)$ n'est pas trivial

On sait que $C(A, \sigma, f)$ est une algèbre de quaternions Q sur le corps $K := F(\wp^{-1}(\mathrm{disc}(\sigma, f)))$. De plus, Q est à division du fait que (σ, f) est anisotrope [8, Prop. 15.14].

Le lemme suivant prouve que dans ce cas l'hyperbolicité sur le corps des fonctions d'une quadrique ne se pose pas:

Lemme 4.3. *Soient φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2 et $d \in F$ tel que $\mathrm{disc}(\sigma, f) = d + \wp(F)$. Alors:*
(1) Si $\dim \varphi \geq 3$ ou φ est de type $(0, 2)$ ou φ de type $(1, 0)$ mais pas semblable à $[1, d]$, alors (σ, f) n'est pas hyperbolique sur $F(\varphi)$.
(2) Si φ est semblable à $[1, d]$, alors (σ, f) est anisotrope sur $F(\varphi)$.
En particulier, dans tous les cas (σ, f) n'est pas hyperbolique sur $F(\varphi)$.

Preuve. (1) L'assertion se déduit du fait que $\mathrm{disc}(\sigma, f)$ n'est pas trivial sur $F(\varphi)$.

(2) Supposons que φ soit semblable à $[1, d]$. Il suffit de montrer que (σ, f) est anisotrope sur K. En effet, on a $L := K(\wp^{-1}(\mathrm{disc}\,(\sigma, f))) = K \times K$ et donc $Q_L \simeq Q \times Q$. Puisque Q est à division on déduit par [8, Prop. 15.14] que (σ, f) est anisotrope sur K. ■

Pour l'isotropie on a la classification suivante:

Proposition 4.4. *Soient φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2 et $d \in F$ tel que $\mathrm{disc}(\sigma, f) = d + \wp(F)$.*
(1) Si φ n'est pas semblable à $[1, d]$, alors on a équivalence entre:
(i) (σ, f) est isotrope sur $F(\varphi)$,
(ii) $Q_{K(\varphi)}$ est déployée. En particulier, φ est de type $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ mais $\triangle(\varphi) \neq \mathrm{disc}(\sigma, f)$, ou appartient à $GP_1(F)$.
(2) Si φ est semblable à $[1, d]$, alors (σ, f) est anisotrope sur $F(\varphi)$.

Preuve. (1) Par hypothèse sur φ, on déduit que $[1, d]_{F(\varphi)}$ est anisotrope, et donc $F(\varphi)(\wp^{-1}(\mathrm{disc}\,(\sigma, f)))$ est un corps. Ainsi, on est dans l'assertion (1) ou (2) de [8, Prop. 15.14]. On en déduit que (σ, f) est isotrope sur $F(\varphi)$ si et seulement si $\left[Q_{K(\varphi)}\right] = 0 \in \mathrm{Br}(K(\varphi))$. De plus, la condition que $Q_{K(\varphi)}$ est déployée implique que la forme norme N_Q de Q devient hyperbolique sur $K(\varphi)$ et les types possibles pour φ se déduisent de la proposition 2.3 du fait que N_Q est anisotrope.

(2) C'est le lemme 4.3(2). ■

4.2 Cas de degré 2

Dans ce cas, A est une F-algèbre de quaternions et σ est l'involution canonique. On a la classification suivante:

Proposition 4.5. *Soient φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2 et $d \in F$ tel que $\mathrm{disc}(\sigma, f) = d + \wp(F)$. Alors, (σ, f) est hyperbolique sur $F(\varphi)$ si et seulement si φ est semblable à $[1, d]$.*

Preuve. D'après [8, (7.9) et (7.13)] une paire quadratique sur une algèbre de quaternions est hyperbolique si et seulement si son discriminant est trivial. Dès lors, l'extension $F(\varphi)/F$ rend hyperbolique la paire quadratique (σ, f) si et seulement si $\operatorname{disc}(\sigma, f) \in \wp(F(\varphi))$. Ainsi, l'hyperbolicité de (σ, f) sur $F(\varphi)$ équivaut à l'isotropie de $[1, d]$ sur $F(\varphi)$. Par la proposition 2.3 on obtient la conclusion désirée. ∎

5 Cas d'une involution orthogonale en degré 2

En caractéristique 2 pour une involution orthogonale, il y a que la notion d'isotropie qui se pose. On va faire cela uniquement en degré 2. Notre résultat est le suivant:

Proposition 5.1. *Soit A une F-algèbre simple centrale de degré 2 munie d'une involution orthogonale σ anisotrope. Soit φ une forme quadratique sur F anisotrope de dimension ≥ 2. Alors, σ devient isotrope sur $F(\varphi)$ si et seulement si φ est semblable à $[1] \perp [d]$ où $\operatorname{disc} \sigma = dF^{*2} \in F^*/F^{*2}$.*

Pour la preuve de cette proposition on introduit un lemme:

Lemme 5.2. *Une involution orthogonale sur une algèbre de quaternions est isotrope si et seulement si son discriminant est trivial.*

Preuve. Si l'algèbre est isotrope, elle est forcément déployée, et l'involution est adjointe à une forme bilinéaire symétrique isotrope, donc de discriminant trivial. Réciproquement, si le discriminant est trivial, alors l'algèbre contient un élément alterné dont le carré est un carré du centre, donc elle est déployée. L'involution est alors adjointe à une forme bilinéaire de dimension 2 et de discriminant trivial, donc isotrope. ∎

Preuve de la proposition 5.1. On déduit du lemme 5.2 que σ ne peut devenir isotrope sur $F(\varphi)$ que si $F(\sqrt{d}) \subset F(\varphi)$, c'est-à-dire que si $[1] \perp [d]$ est isotrope sur $F(\varphi)$. Puisque $d \notin F^{*2}$ car σ est anisotrope, on déduit le résultat. ∎

En évoquant les involutions orthogonales sur les algèbres de quaternions, on donne un lemme qui décrit ces involutions sur de telles algèbres:

Lemme 5.3. *Soit A une F-algèbre de quaternions et σ une involution orthogonale sur A. Alors, il existe des éléments $u', v' \in A$, $\alpha' \in F$ et $\beta' \in F^*$ tels que $\{1, u', v', u'v'\}$ soit une F-base de A avec les relations:*

$$\begin{cases} u'^2 + u' = \alpha' \\ v'^2 = \beta' \\ \sigma(u') = u',\ \sigma(v') = v' \\ u'v' + v'u' = v'. \end{cases}$$

Preuve. Soient $\alpha \in F$ et $\beta \in F^*$ tels que $A = [\alpha, \beta)$. Soient $\{1, u, v, uv\}$ la base canonique de A et γ l'involution canonique de A (comme dans (1)). Puisque γ est symplectique et σ est orthogonale, on obtient par [8, Prop. 2.7] l'existence d'un élément $v' \in \operatorname{Alt}(A, \sigma)$ inversible tel que

$$\gamma = \operatorname{Int}(v'^{-1}) \circ \sigma$$

où $\mathrm{Int}\,(a)$ désigne l'automorphisme intérieur de A d'un élément inversible $a \in A$. Soit $x \in A$ tel que $x + \sigma(x) = v'$. Alors, $v' = x + v'\gamma(x)v'^{-1}$ et donc $v'^2 = xv' + v'\gamma(x) = xv' + \gamma(xv')$ puisque $\gamma(v') = v'$. Ainsi, $v'^2 \in \mathrm{Alt}\,(A, \gamma) = F$. Puisque v' est inversible, on a donc $\beta' := v'^2 \in F^*$. Par conséquent, $A \otimes_F F(\sqrt{\beta'})$ est déployée. Ainsi, il existe $u' \in A$ tel que $\{1, u', v', u'v'\}$ soit une F-base de A avec $\alpha' := u'^2 + u' \in F$ et $u'v' + v'u' = v'$. Pour finir la preuve on montre que $\sigma(u') = u'$. Pour cela, on applique σ à la relation $u'v' + v'u' = v'$ puis on multiplie à gauche par v'^{-1} pour avoir $1 = \gamma(u') + \sigma(u')$. On ne peut avoir $u' \in \mathrm{Sym}\,(A, \gamma)$ car sinon $1 \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ et donc σ serait symplectique. Ainsi, il existe $x, y, z, t \in F$ avec $y \neq 0$ et $u' = x + yu + zv + tuv$. Un simple calcul montre que la relation $u'^2 + u' = \alpha'$ implique que $y^2 = y$ et donc $y = 1$. Ainsi, $\gamma(u') = u' + 1$ ce qui donne $\sigma(u') = u'$. D'où le lemme. ∎

6 Hyperbolicité sur une extension quadratique inséparable

La proposition suivante donne une caractérisation de l'hyperbolicité d'une paire quadratique sur une extension quadratique inséparable en degré quelconque.

Proposition 6.1. *Soient A une F-algèbre simple centrale de dimension finie, $d \in F^* - F^{*2}$ et $K = F(\sqrt{d})$. Soit (σ, f) une paire quadratique sur A.*
(1) Si (σ, f) est anisotrope et devient hyperbolique sur K, alors il existe $r \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$ et $r' \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ tels que $r^2 = d$ et $f(s) = \mathrm{Trd}_A(r'rs)$ pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$.
(2) S'il existe $r \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$ et $r' \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ tels que $r^2 = d$ et $f(s) = \mathrm{Trd}_A(r'rs)$ pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$, alors (σ, f) devient hyperbolique sur K. De plus, dans ce cas on a $r \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ et la restriction de σ au centralisateur $C_A(r)$ est symplectique. En particulier, $\deg A \equiv 0 \bmod 4$.

Preuve. (1) On va reprendre quelques arguments de la preuve de [4, Prop. 4.2]. Supposons que (σ, f) soit hyperbolique sur K. Soit $e = e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes \sqrt{d} \in A \otimes_F K$ un idempotent tel que

$$f \otimes 1(s) = \mathrm{Trd}_{A \otimes_F K}(es) \text{ pour tout } s \in \mathrm{Sym}\,(A \otimes_F K, \sigma \otimes 1) \tag{4}$$

D'une part, la condition $e^2 = e$ implique les relations

$$\begin{cases} e_1^2 + de_2^2 = e_1 \\ e_1e_2 + e_2e_1 = e_2 \end{cases} \tag{5}$$

et d'autre part, la condition (4) implique que pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$ on a

$$\begin{cases} f(s) = \mathrm{Trd}_A(e_1s) \\ \mathrm{Trd}_A(e_2s) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

La première relation de (6) avec [8, Prop. 5.7] impliquent $\sigma(e_1) = 1 - e_1$, et la deuxième relation implique $e_2 \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$. On reprend le même argument que celui dans [4, Page 386] pour montrer que e_2 est inversible. Considérons l'élément $r = e_2^{-1}e_1$. Les relations de (5) s'écrivent

$$\begin{cases} e_2^{-1}e_1^2 &= de_2 + e_2^{-1}e_1 \\ e_2^{-1}e_1 &= e_1e_2^{-1} + e_2^{-1} \end{cases} \tag{7}$$

La deuxième relation de (7) implique

$$\begin{aligned} r^2 &= e_2^{-1}(e_1e_2^{-1})e_1 \\ &= e_2^{-1}(e_2^{-1}e_1 + e_2^{-1})e_1 \\ &= e_2^{-2}e_1 + e_2^{-2}e_1^2. \end{aligned} \tag{8}$$

La première relation de (7) avec la dernière égalité de (8) donnent $r^2 = d$. La deuxième relation de (7) multipliée à droite par e_1 puis comparée à la première donne

$$e_2^{-1}e_1 + e_1e_2^{-1}e_1 = e_2^{-1}e_1 + de_2.$$

Mais cette dernière relation n'est que

$$\sigma(e_1)e_2^{-1}e_1 = r + de_2 \tag{9}$$

Puisque e_2 est inversible et symétrique (car alterné), l'élément e_2^{-1} est symétrique. En utilisant le fait que e_2 est alterné, e_2^{-1} est symétrique et $e_2^{-1} = e_2^{-1}e_2e_2^{-1}$, on peut voir facilement que e_2^{-1} est aussi alterné. Soit alors $k \in A$ tel que $e_2^{-1} = k + \sigma(k)$. On a $\sigma(e_1)e_2^{-1}e_1 = \sigma(e_1)ke_1 + \sigma(\sigma(e_1)ke_1) \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$. Puisque $e_2 \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$, on déduit de la relation (9) que $r \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$. On prend alors $r' = e_2$, et la première relation de (6) n'est autre que $f(s) = \mathrm{Trd}_A(r'rs)$ pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$.

(2) La condition $f(s) = \mathrm{Trd}_A(r'rs)$ pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$ entraîne

$$\begin{aligned} \mathrm{Trd}_A(x) &= \mathrm{Trd}_A(r'r(x + \sigma(x))) \\ &= \mathrm{Trd}_A(r'rx) + \mathrm{Trd}_A(xrr') \\ &= \mathrm{Trd}_A(x(r'r + rr')) \end{aligned}$$

pour tout $x \in A$, donc $r'r + rr' = 1$. On vérifie alors aisément que

$$e = r'r \otimes 1 + r' \otimes \sqrt{d} \in A \otimes_F K$$

est un idempotent tel que $f(s) = \mathrm{Trd}_A(es)$ pour tout $s \in \mathrm{Sym}\,(A \otimes_F K, \sigma \otimes 1)$, donc (σ, f) devient hyperbolique sur K. De l'égalité $r'r + rr' = 1$, on déduit que

$$r^{-1} = r' + rr'r^{-1},$$

donc $r \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ car r' et $rr'r^{-1}$ sont dans $\mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$. Pour terminer, soit $r' = x + \sigma(x)$; alors l'égalité $r'r + rr' = 1$ donne $l + \sigma(l) = 1$ avec $l = rx + xr \in C_A(r)$, donc la restriction de σ à $C_A(r)$ est symplectique. Il en résulte que $\deg C_A(r)$ est pair, donc $\deg A \equiv 0 \bmod 4$ puisque $\deg A = 2 \deg C_A(r)$. ∎

Pour les involutions symplectiques, on a, avec les mêmes notations que dans la proposition précédente,

Proposition 6.2. *Soit σ une involution symplectique sur A.*
(1) Si σ est anisotrope et devient hyperbolique sur K, alors il existe $r \in A$ tel que $r^2 = d$ et $\sigma(r) = r$.
(2) S'il existe $r \in A$ tel que $r^2 = d$ et $\sigma(r) = r$, alors σ devient hyperbolique sur K.

Preuve. (1) La preuve se fait comme celle de l'assertion (1) de la proposition 6.1 en suivant celle de [4, Prop. 4.1].

(2) Il suffit de prouver que l'hypothèse entraîne l'existence d'un élément $r' \in A$ tel que $rr' + r'r = 1$ et $\sigma(r') = r'$; alors l'élément

$$e = r'r \otimes 1 + r' \otimes \sqrt{d} \in A \otimes_F K$$

est un idempotent tel que $\sigma(e) + e = 1$.

Pour montrer l'existence de r', on peut utiliser le lemme suivant:

Lemme 6.3. *Tout élément du centralisateur $C_A(r)$ est de la forme $rx + xr$ pour un certain $x \in A$.*

Preuve. Comme $r^2 \in F$, il est clair que $rx + xr \in C_A(r)$ pour tout $x \in A$. Considérons alors l'application linéaire

$$[r, \bullet] : A \longrightarrow C_A(r)$$

qui envoie $x \in A$ sur $rx+xr$. Son noyau est $C_A(r)$. Comme $\dim_F A = 2 \dim_F C_A(r)$, cette application linéaire est surjective. ∎

Il résulte du lemme que tout élément de $\mathrm{Alt}\,(C_A(r), \sigma)$ est de la forme

$$(rx + xr) + \sigma(rx + xr) \quad \text{pour un certain } x \in A.$$

Or,

$$(rx + xr) + \sigma(rx + xr) = r(x + \sigma(x)) + (x + \sigma(x))r,$$

donc l'application

$$[r, \bullet] : \mathrm{Alt}\,(A, \sigma) \longrightarrow \mathrm{Alt}\,(C_A(r), \sigma)$$

est surjective. Son noyau $C_A(r) \cap \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ est donc de dimension m^2, si $\deg A = 2m$. Par ailleurs, $C_A(r) \cap \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$ contient l'image de l'application

$$[r, \bullet] : \mathrm{Sym}\,(A, \sigma) \longrightarrow C_A(r)$$

car pour $x \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)$,

$$rx + xr = rx + \sigma(rx) \in \mathrm{Alt}\,(A, \sigma).$$

Comme le noyau de cette dernière application est

$$C_A(r) \cap \mathrm{Sym}\,(A, \sigma) = \mathrm{Sym}\,(C_A(r), \sigma),$$

on calcule que la dimension de son image est m^2. Dès lors

$$C_A(r) \cap \mathrm{Alt}\,(A, \sigma) = \{rx + xr \mid x \in \mathrm{Sym}\,(A, \sigma)\}.$$

Comme σ est symplectique, on a $1 \in C_A(r) \cap \mathrm{Alt}\,(A, \sigma)$, ce qui prouve l'existence de r'. ∎

Bibliographie

[1] C. Arf, *Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik* 2 (Teil I), J. Reine Angew. Math. **183** (1941), 148–167.

[2] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings,* Lect. Notes Math. vol. **655**, Berlin Heidelberg New York: Springer 1978.

[3] I. Dejaiffe, *Algebras with involution that become isotropic under the function field of a conic,* prépublication 2000.

[4] M. A. Elomary, J.-P. Tignol, *Classification of Quadratic Forms over Skew Fields of Characteristic* 2, J. Algebra **240** (2001), 366-392.

[5] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2,* Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 4019-4053

[6] N. Karpenko, *On anisotropy of orthogonal involutions,* J. Ramanujan Math. Soc. **15** (2000), 1–22.

[7] M. Knebusch, *Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem*, Acta Arith. **24** (1973), 279–299.

[8] M.-A. Knus, A. S. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The Book of Involutions,* Colloquium Publications, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[9] A. Laghribi, *Hyperbolicité de certaines involutions sur le corps des fonctions d'une quadrique,* Indag. Math. N.S. **12** (2001), 337–351.

[10] A. Laghribi, *Certaines formes quadratiques de dimension au plus* 6 *et corps des fonctions en caractéristique* 2, Israel J. Math. **129** (2002), 317-361.

[11] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms,* (Grundlehren Math. Wiss. Bd. 270) Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1985.

Facult des Sciences Jean Perrin
Rue Jean Souvraz - SP18
F-62307 Lens
France
email : laghribi@euler.univ-artois.fr