Applications du calcul fonctionnel harmonique dans une algebre de Banach involutive quotient

M. Akkar H. Arroub

Abstract

We define the spectral radius and Ptak's function on a quotient involutive Banach algebra and we extend certains results of V.Ptak to thes quotients. As an application of functional harmonic calculus we obtain theorem similar to those of K.Fan and Von Neumann.

Introduction

Soient A une algèbre de Banach involutive unitaire (non nécessairement commutative), α un idéal bilatère auto-adjoint et distinct de A tel que α est un sous-espace de Banach de A (cf L.WAELBROECK [6]). α devient un idéal de Banach de A (cf L.WAELBROECK [7]) et l'involution de α dans α devient continue. A/α est dite une algèbre de Banach involutive quotient. Soit $\tilde{a}$ un élément de A/α , le spectre de $\tilde{a}$ dans l'algèbre A/α est noté par $sp_\alpha a$. $sp_\alpha a$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$. On pose $\rho_\alpha(a) = sup\{|\lambda| \; |\lambda \in sp_\alpha a\}$ et $|a|_\alpha = \rho_\alpha(a^*a)^{1/2}$. On suppose en outre que A est hermitienne. Alors l'algèbre involutive A/α est hermitienne (cf lemme 1). Nous montrons que $|.|_\alpha$ est une semi-norme de l'algèbre involutive A/α (cf lemme 7 et lemme 9) et que $\rho_\alpha \leq |.|_\alpha$ (cf lemme3). Si on prend $\alpha = 0$ on retrouve des résultats de V.PTAK [4]. En utilisant le calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive quotient [1] , nous étendons le théorème de K.FAN [3] et le théorème de VON NEUMANN (K.FAN [3]) au cas d'une algèbre

Received by the editors November 1995.
Communicated by J. Delanghe.
1991 *Mathematics Subject Classification :* Primary 46H, Secondary 46K.
Key words and phrases : quotient involutive Banach algebra, harmonic functional calculus, hermitian algebra, spectral radius.

de Banach involutive quotient (théorème 1 et théorème 2), ainsi que les résultats de A.ELKINANI [2] où $\alpha = 0$.

Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, A sera une algèbre de Banach involutive unitaire, α un idéal bilatère auto-adjoint et distinct de A.

Lemme 1

Si A est hermitienne alors l'algèbre involutive A/α est hermitienne.

Preuve :

Soit $\tilde{h}$ un élément hermitien de A/α , montrons que $sp_\alpha h \subset \mathbb{R}$. On va raisonner par l'absurde. Soit $\lambda \in sp_\alpha h, \lambda = s + it, (s, t \in \mathbb{R})$. Supposons que $t \neq 0$, on pose $\tilde{a} = t^{-1}(\tilde{h} - s)$. $\tilde{a}$ est un élément hermitien de A/α et $i \in sp_\alpha a$. Donc $0 \in 1 + sp_\alpha(a^2) = 1 + sp_\alpha(a^*a) \subset 1 + sp(a^*a)$. Or $a^*a \geq 0$ car A est hermitienne (cf S.SHIRALI and J.W.FORD [5]). Donc $0 \geq 1$ ce qui est absurde.

Soit $\tilde{a}$ un élément de A/α , $sp_\alpha a$ le spectre de $\tilde{a}$ dans l'algèbre A/α. $sp_\alpha a$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$. On pose $\rho_\alpha(a) = sup\{|\lambda| \,|\lambda \in sp_\alpha a\}$ et $|a|_\alpha = \rho_\alpha(a^*a)^{1/2}$.

Dans toute la suite A sera supposée en outre hermitienne.

Lemme 2

Soit a un élément de A. Alors on a : $|a|_\alpha < 1$ si, et seulement si, $\tilde{1} - \tilde{a}^*\tilde{a} > 0$ dans A/α.

Preuve :

Supposons que $|a|_\alpha < 1$, c'est à dire que $\rho_\alpha(a^*a) < 1$. On a $sp_\alpha(1 - a^*a) = 1 - sp_\alpha(a^*a)$ et $sp_\alpha(a^*a) \subset sp(a^*a)$. A est hermitienne, donc $a^*a \geq 0$ [5] . Comme $\rho_\alpha(a^*a) < 1$ alors $1 - sp_\alpha(a^*a) \subset]o + \infty[$, autrement dit $\tilde{1} - \tilde{a}^*\tilde{a} > 0$ dans A/α. Inversement, supposons que $\tilde{1} - \tilde{a}^*\tilde{a} > 0$, c'est à dire que $1 - sp_\alpha(a^*a) \subset]o + \infty[$. Comme $sp_\alpha(a^*a) \subset sp(a^*a) \subset [o + \infty[$ alors $sp_\alpha(a^*a) \subset [0, 1[$. $sp_\alpha(a^*a)$ est compact, donc $\rho_\alpha(a^*a) < 1$ ou encore $|a|_\alpha < 1$.

Lemme 3

Pour tout élément a de A on a $\rho_\alpha(a) \leq |a|_\alpha$.

Avant de prouver ce lemme faisons la remarque suivante :

Remarque : Pour tout élément a de A on a $\rho_\alpha(a^*a) = \rho_\alpha(aa^*)$ et $|a|_\alpha = |a^*|_\alpha$.

Preuve de la remarque :

La deuxième égalité découle de la première. La première découle du fait que si A est une algèbre unitaire quelconque on a les égalités suivantes : $sp'a = spa \cup \{0\}$

et $sp'ab = sp'ba$ pour tout a et b dans A où sp ' désigne le spectre dans l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A.

Preuve du lemme 3 :

Tout revient à montrer que $|\lambda| \leq |a|_\alpha$ pour tout $\lambda \in sp_\alpha a$. Ou encore si $|\lambda| > |a|_\alpha$ alors $\lambda - \tilde{a}$ est inversible dans A/α . Ou encore si $|\lambda| > |a|_\alpha$ alors $\lambda - \tilde{a}$ est inversible à gauche dans A/α car $|a|_\alpha = |a^*|_\alpha$. On pose $\tilde{x} = \lambda^{-1}\tilde{a}$. Tout revient à montrer que si $|x|_\alpha < 1$ alors $\tilde{1} - \tilde{x}$ est inversible à gauche dans A/α. Supposons que $|x|_\alpha < 1$, d'après le lemme 2 on a $\tilde{1} - \tilde{x}^*\tilde{x} > 0$, il existe alors $\tilde{h}$ hermitien dans A/α tel que $\tilde{h}^2 = \tilde{1} - \tilde{x}^*\tilde{x}$ (cf proposition 8 [1]). Comme $\tilde{1} - \tilde{x}^*\tilde{x}$ est inversible il en est de même pour $\tilde{h}$.

$(\tilde{1} + \tilde{x}^*)(\tilde{1} - \tilde{x}) = \tilde{1} + \tilde{x}^* - \tilde{x} - \tilde{x}^*\tilde{x} = \tilde{h}^2 + \tilde{x}^* - \tilde{x} = \tilde{h}(\tilde{1} + \tilde{h}^{-1}(\tilde{x}^* - \tilde{x})\tilde{h}^{-1})\tilde{h}$.

Pour conclure il suffit de prouver que $\tilde{1} + \tilde{h}^{-1}(\tilde{x}^* - \tilde{x})\tilde{h}^{-1}$ est inversible dans A/α. En effet, on pose $\tilde{y} = \tilde{h}^{-1}(\tilde{x}^* - \tilde{x})\tilde{h}^{-1}$, $i\tilde{y}$ est hermitien dans A/α. Comme A/α est une algèbre involutive hermitienne (cf lemme 1) on aura $sp_\alpha y \subset i\mathbb{R}$, parsuite $\tilde{1} + \tilde{y}$ est inversible dans A/α. ■

$\| \ \|$ désigne la norme de l'algèbre A et $\| \ \|'$ la semi-norme quotient définie sur A/α. $\| \ \|'$ est une semi-norme d'algèbre involutive.

Lemme 4 :

1) Pour tout élément $\tilde{a}$ de A/α $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$ existe.

2) Pour tout élément $\tilde{a}$ de A/α on a $\|\tilde{a}\|' \geq \rho_\alpha(a) \geq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$.

3) Pour tout élément hermitien $\tilde{a}$ de A/α on a $\rho_\alpha(a) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$.

4) Pour tout élément normal $\tilde{a}$ de A/α on a $\rho_\alpha(a) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$

Preuve :

1) Découle du fait que dans une algèbre semi-normée quelconque (A, p) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p(a^n)^{1/n}$ existe. Pour se faire on se ramène au cas normé en considérant l'algèbre normée $(A/p^{-1}(o), \overline{p})$, $\overline{p}(\overline{a}) = p(a)$ où $\overline{a}$ est la classe d'équivalence de a modulo $p^{-1}(o)$.

2) Pour prouver l'inégalité $\rho_\alpha(a) \geq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$ on considère le complété B de l'algèbre semi-normée $(A/\alpha, \| \ \|')$ et on utilise le fait que $sp_\alpha a$ contient le spectre de $\tilde{a}$ dans B. Pour prouver l'inégalité $\|\tilde{a}\|' \geq \rho_\alpha(a)$ on utilise le fait que $sp_\alpha a \subset sp(a + x)$ pour tout $x \in \alpha$.

3) Soit $\tilde{a}$ un élément hermitien de A/α , il suffit alors de prouver l'autre inégalité $\rho_\alpha(a) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$. En effet $\rho_\alpha(a) \leq |a|_\alpha = \rho_\alpha(a^2)^{1/2}$ (lemme 3). Donc pour tout $n \geq 2$ pair on a $\rho_\alpha(a) \leq \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient le résultat cherché.

4) Il suffit de prouver l'autre inégalité $\rho_\alpha(a) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}$. En effet $\rho_\alpha(a) \leq |a|_\alpha = \rho_\alpha(a^*a)^{1/2} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\|(\tilde{a}^*\tilde{a})^n\|'^{1/n})^{1/2}$ car $\tilde{a}^*\tilde{a}$ est hermitien (voir 3)). Or $\tilde{a}$ est normal donc $\rho_\alpha(a) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\|\tilde{a}^{*n}\tilde{a}^n\|'^{1/2})^{1/n} \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \| \ \tilde{a}^n\|'^{1/n}$, d'où le résultat

cherché.

Lemme 5 :

Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont deux éléments hermitiens de A/α alors $\rho_\alpha(ab) \le \rho_\alpha(a)\rho_\alpha(b)$.

Preuve :

$\rho_\alpha(ab) \le |ab|_\alpha = \rho_\alpha((ab)^*(ab))^{1/2} = \rho_\alpha(b^*a^*ab)^{1/2} = \rho_\alpha(baab)^{1/2} = \rho_\alpha(a^2b^2)^{1/2}$. Donc pour tout $n \ge 2$ pair on a $\rho_\alpha(ab) \le \rho_\alpha(a^nb^n)^{1/n} \le \|\tilde{a}^n\|'^{1/n}\|\tilde{b}^n\|'^{1/n}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient le résultat cherché.

Lemme 6 :

1) Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont hermitiens et $\tilde{a}, \tilde{b} \ge 0$ dans A/α alors il en est de même pour $\tilde{a}+\tilde{b}$.

2) Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont hermitiens dans A/α alors $\rho_\alpha(a+b) \le \rho_\alpha(a) + \rho_\alpha(b)$.

Preuve :

1) Tout revient à montrer que si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont hermitiens et $\tilde{a}, \tilde{b} \ge 0$ dans A/α alors $sp_\alpha(a+b)$ ne contient pas -1. $\tilde{1}+\tilde{a}+\tilde{b} = (\tilde{1}+\tilde{a})(\tilde{1}+\tilde{b}) - \tilde{a}\tilde{b} = (\tilde{1}+\tilde{a})(\tilde{1}-\tilde{a}_1\tilde{b}_1)(\tilde{1}+\tilde{b})$ avec $\tilde{a}_1 = (\tilde{1}+\tilde{a})^{-1}\tilde{a}$ et $\tilde{b}_1 = \tilde{b}(\tilde{1}+\tilde{b})^{-1}$. $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_1$ sont hermitiens. $sp_\alpha a_1$ et $sp_\alpha b_1$ sont contenus dans $[0,1[$ donc d'après le lemme 5 on aura $\rho_\alpha(a_1b_1) \le \rho_\alpha(a_1)\rho_\alpha(b_1) < 1$. Parsuite $\tilde{1}-\tilde{a}_1\tilde{b}_1$ est inversible dans A/α. Il en est de même pour $\tilde{1}+\tilde{a}+\tilde{b}$. Autrement dit $sp_\alpha(a+b)$ ne contient pas -1.

2) est une conséquence de 1). En effet, dire que $\rho_\alpha(a+b) \le \rho_\alpha(a)+\rho_\alpha(b)$ revient à dire que pour tout $\lambda \in sp_\alpha(a+b)$ on a $-\rho_\alpha(a) - \rho_\alpha(b) \le \lambda \le \rho_\alpha(a) + \rho_\alpha(b)$ ou encore $(\tilde{a}+\rho_\alpha(a)) + (\tilde{b}+\rho_\alpha(b)) \ge 0$ et $(\rho_\alpha(a)-\tilde{a}) + (\rho_\alpha(b)-\tilde{b}) \ge 0$.

Lemme 7 :

Pour tout a,b dans A on a $|ab|_\alpha \le |a|_\alpha |b|_\alpha$.

Preuve :

$|ab|_\alpha = \rho_\alpha(b^*a^*ab)^{1/2} = \rho_\alpha(a^*abb^*)^{1/2} \le \rho_\alpha(a^*a)^{1/2}\rho_\alpha(bb^*)^{1/2}$ d'après le lemme 5. D'où $|ab|_\alpha \le |a|_\alpha|b|_\alpha$.

Lemme 8 :

Pour tout a dans A on a $\rho_\alpha(Re(a)) \le |a|_\alpha$.

Preuve :

$a = h+ik$ avec h et k hermitiens dans A. $\tilde{a}^*\tilde{a} + \tilde{a}\tilde{a}^* = 2(\tilde{h}^2+\tilde{k}^2)$. Montrons que $\rho_\alpha(h^2) \le \rho_\alpha(h^2+k^2)$. On a $\tilde{k}^2 \ge 0$ car $sp_\alpha(k^2) \subset sp(k^2) \subset [0+\infty[$, comme $\rho_\alpha(h^2+k^2) - \tilde{h}^2 - \tilde{k}^2 \ge 0$ le lemme 6 donne $\rho_\alpha(h^2+k^2) - \tilde{h}^2 = \rho_\alpha(h^2+k^2) - \tilde{h}^2 - \tilde{k}^2 + \tilde{k}^2 \ge 0$. $\tilde{h}^2 \ge 0$ donc $\rho_\alpha(h^2+k^2) \ge \rho_\alpha(h^2)$. Parsuite $\rho_\alpha(h^2) \le \frac{1}{2}\rho_\alpha(a^*a+aa^*) \le \frac{1}{2}(\rho_\alpha(a^*a)+$

$\rho_\alpha(aa^*)) = |a|_\alpha^2$. D'où $\rho_\alpha(Re(a)) \leq |a|_\alpha$.

Lemme 9 :

Pour tout a de A on a $|a+b|_\alpha \leq |a|_\alpha + |b|_\alpha$.

Preuve :

$|a+b|_\alpha^2 = \rho_\alpha((a^*+b^*)(a+b)) = \rho_\alpha(a^*a + a^*b + b^*a + b^*b) \leq \rho_\alpha(a^*a) + \rho_\alpha(a^*b + b^*a) + \rho_\alpha(b^*b)$ d'après le lemme 6. Et d'après le lemme 8 et le lemme 7 on aura $|a+b|_\alpha^2 \leq |a|_\alpha^2 + 2|a|_\alpha|b|_\alpha + |b|_\alpha^2 = (|a|_\alpha + |b|_\alpha)^2$. D'où $|a+b|_\alpha \leq |a|_\alpha + |b|_\alpha$.

Théorème 1 : (théorème de K.FAN [3] , voir aussi le cas $\alpha = 0$ dans A.ELKINANI [2]).

Soient $\tilde{a}$ un élément de A/α tel que $|a|_\alpha < 1$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque unité ouvert D de $\mathbb{C}$.

1) Si $Re(f(z)) > 0$ pour tout $z \in D$ alors $Re(\tilde{f}(\tilde{a})) > 0$ dans A/α.

2) Si $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D$ alors il existe a_1 dans A tel que $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$ avec $|a_1|_\alpha < 1$.

Preuve :

$\tilde{f}(\tilde{a})$ a un sens car $\rho_\alpha(a) \leq |a|_\alpha < 1$ (lemme 3).

1) Choisissons r et r ' tels que $|a|_\alpha < r < r' < 1$. $Re(f(z)) > 0$ pour tout $z \in D$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $Re(f(z)) \geq \delta$ pour tout $z \in \overline{D}(0, r')$. Car Ref est continue sur le compact $\overline{D}(0, r')$. On pose $g = Ref - \delta$. $\tilde{g}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)u(z)[r^2 - aa^*]u(z)^* d\theta, (z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$u : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifiant $(\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{a})\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{a}) = \tilde{1}$ dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a, A/\alpha)$. On a $|a|_\alpha < r$ donc $r^2 - \tilde{a}\tilde{a}^* > 0$ dans A/α d'après le lemme 2. Il existe alors $\tilde{h}$ hermitien dans A/α tel que $r^2 - aa^* - h^2 \in \alpha$ (proposition 8 de [1]). Donc $\tilde{g}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)u(z)h^2u(z)^* d\theta, (z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ou encore la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)(u(z)h)(hu(z)^*) d\theta, (z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$\tilde{h}$ est hermitien, c'est à dire que $h - h^* \in \alpha$, donc $hu(z)^* - (u(z)h)^* \in \alpha$. Alors $\tilde{g}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)(u(z)h)(u(z)h)^* d\theta, (z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Comme A est hermitienne [5] on aura $(u(z)h)(u(z)h)^* \geq 0$ pour tout $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Parsuite, $g(z)(u(z)h)(u(z)h)^* \geq 0$ pour tout $0 \leq \theta \leq 2\pi$. L'ensemble des $a \geq 0$ est fermé dans A, ceci donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)(u(z)h)(u(z)h)^* d\theta \geq 0$$

D'où $\tilde{g}(\tilde{a}) \geq 0$ ou encore $Re(\tilde{f}(\tilde{a})) \geq \delta > 0$. ∎

2) Pour prouver cette assertion on se ramène à 1). On pose $g(z) = \dfrac{1+f(z)}{1-f(z)}$. $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et $Re(g(z)) > 0$ pour tout $z \in D$. D'aprés 1) on aura $Re(\tilde{g}(\tilde{a})) > 0$. On a $\tilde{g}(\tilde{a}) = (1+\tilde{f}(\tilde{a}))(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}$. $Re(\tilde{g}(\tilde{a})) = (1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}(1-\tilde{f}(\tilde{a})(\tilde{f}(\tilde{a}))^*)((1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1})^* > 0$.

Donc il existe $\tilde{h}$ hermitien dans A/α tel que :

$$(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}(1-\tilde{f}(\tilde{a})(\tilde{f}(\tilde{a}))^*)((1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1})^* = \tilde{h}^2$$

On pose $\tilde{b} = 1-\tilde{f}(\tilde{a})$, donc $1-\tilde{f}(\tilde{a})(\tilde{f}(\tilde{a}))^* = \tilde{b}\tilde{h}^2\tilde{b}^* = \tilde{c}\tilde{c}^*$ avec $c = bh$. $sp_\alpha(cc^*) \subset sp(cc^*), cc^* \geq 0$ car A est hermitienne [5]. D'autre part $\tilde{h}^2$ est inversible, donc $\tilde{h}$ est inversible parsuite $\tilde{c}\tilde{c}^*$ est inversible. D'où $1-\tilde{f}(\tilde{a})(\tilde{f}(\tilde{a}))^* > 0$. Si on pose $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$ le lemme 2 donne $|a_1|_\alpha < 1$. ∎

Proposition 1 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors l'ensemble $A_U = \{a \in A | sp_\alpha a \subset U\}$ est un ouvert de A.

Preuve :

Soit $a \in A_U$, c'est à dire que $sp_\alpha a \subset U$. Il existe V un voisinage ouvert de $sp_\alpha a$ relativement compact tel que $\overline{V} \subset U$. Si $b \in A$ alors on a $\rho_\alpha(a+b) \leq \|a+b\| \leq \|a\|+\|b\|$. Il existe $M > 0$ tel que $\overline{V} \subset D(0,M)$ et $\rho_\alpha(a+b) < M$ pour tout $\|b\| < 1$. Donc pour tout $\|b\| < 1$, $\overline{V}$ et $sp_\alpha(a+b)$ sont contenus dans $D(0,M)$. Il existe $u : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $(\tilde{\mathbf{z}}-\tilde{a})\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{z}}-\tilde{a}) = \tilde{1}$ dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a, A/\alpha)$. u est bornée sur le compact $\overline{D}(0,M)\backslash V$ donc il existe $M' > 0$ tel que $\|u(z)\| < M'$ pour tout $z \in \overline{D}(0,M)\backslash V$. Considérons $0 < r < inf(1, 1/M')$. Montrons que $sp_\alpha(a+b) \subset V$ pour tout $\|b\| < r$. Soit b tel que $\|b\| < r$. Pour tout $z \in \overline{D}(0,M)\backslash V$ on a $z-(\tilde{a}+\tilde{b}) = z-\tilde{a}+\tilde{b} = (\tilde{1}-\tilde{b}\widetilde{u(z)})(z-\tilde{a})$. Or $\rho_\alpha(bu(z)) \leq \|bu(z)\| \leq \|b\|\|u(z)\| < 1$, donc $\tilde{1}-\tilde{b}\widetilde{u(z)}$ est inversible dans A/α parsuite $z-(\tilde{a}+\tilde{b})$ est inversible dans A/α. Autrement dit $sp_\alpha(a+b)$ ne rencontre pas $\overline{D}(0,M)\backslash V$. Comme $sp_\alpha(a+b) \subset \overline{D}(0,M)$ on aura $sp_\alpha(a+b) \subset V$.

Proposition 2 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $D(z_o,R) \subset \overline{D}(z_o,R) \subset U, z_o \in \mathbb{C}, R > 0$ et $f : U \longrightarrow A$ harmonique. On pose $\Omega = A_{D(z_o,R)} = \{a \in A | sp_\alpha a \subset D(z_o,R)\}$. Si $a \in \Omega$ alors il existe φ une application définie sur un voisinage de zéro dans A et à valeurs dans A telle que : $\tilde{f}(\tilde{a}+\tilde{b}) = \tilde{f}(\tilde{a}) + \widetilde{\varphi(b)}$ pour b voisin de zéro avec $\lim\limits_{b \longrightarrow 0} \varphi(b) = 0$.

Preuve :

Soit $a \in \Omega$, c'est à dire que $sp_\alpha a \subset D(z_o,R)$. Il existe $u : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $(\tilde{\mathbf{z}}-\tilde{a})\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{z}}-\tilde{a}) = \tilde{1}$ dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a, A/\alpha)$. D'après la proposition 1, pour b voisin de zéro dans A on a $sp_\alpha(a+b) \subset D(z_o,R)$. Il existe $u' : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha(a+b) \longrightarrow A$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $(\tilde{\mathbf{z}}-\tilde{a}-\tilde{b})\tilde{u}' = \tilde{u}'(\tilde{\mathbf{z}}-\tilde{a}-\tilde{b}) = \tilde{1}$ dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\backslash sp_\alpha(a+b), A/\alpha)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$ et pour tout b voisin de zéro dans A on a $z-\tilde{a}-\tilde{b} = (\tilde{1}-\tilde{b}\widetilde{u(z)})(z-\tilde{a})$. u est bornée sur le compact $\{z \in \mathbb{C} | \ |z-z_o| = R\}$, donc il existe $r > 0$ tel que pour tout $\|b\| < r$ et pour tout

$|z-z_o| = R$ on a $\|bu(z)\| < 1/2$. Alors pour tout $\|b\| < r$ et pour tout $|z-z_o| = R$ on a $1-bu(z)$ est inversible dans A. $\tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)u(z)[R^2-(a-z_o)(a-z_o)^*]u(z)^* d\theta, z = z_o + Re^{i\theta}.$$

$\tilde{f}(\tilde{a}+\tilde{b})$ est la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)u'(z)[R^2-(a+b-z_o)(a+b-z_o)^*]u'(z)^* d\theta, z = z_o + Re^{i\theta}.$$

Pour $\|b\| < r$ et $|z-z_o| = R$ on a $u'(z) - u(z)(1-bu(z))^{-1} \in \alpha$. Donc pour $\|b\| < r$ $\tilde{f}(\tilde{a}+\tilde{b})$ est la classe d'équivalence modulo α de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)[u(z)(1-bu(z))^{-1}][R^2-(a+b-z_o)(a+b-z_o)^*][u(z)(1-bu(z))^{-1}]^* d\theta$.

On a $\tilde{f}(\tilde{a}+\tilde{b}) = \tilde{f}(\tilde{a}) + \tilde{\varphi(b)}$ pour tout $\|b\| < r$ avec $\varphi(b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)[u(z)(1-bu(z))^{-1}][R^2-(a+b-z_o)(a+b-z_o)^*][u(z)(1-bu(z))^{-1}]^* d\theta$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)u(z)[R^2-(a-z_o)(a-z_o)^*]u(z)^* d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)u(z)(1-bu(z))^{-1}\Big[R^2-(a+b-z_o)(a+b-z_o)^* - (1-bu(z))[R^2-(a-z_o)(a-z_o)^*](1-bu(z))^*\Big][(1-bu(z))^{-1}]^*u(z)^* d\theta$$

En utilisant le fait que f et u sont bornées sur le compact $\{z \in \mathbb{C} |\ |z-z_o| = R\}$ et le fait que $\|1-bu(z)^{-1}\| \leq [1-\|bu(z)\|]^{-1} \leq 1/2$, il existe $K > 0$ tel que $\forall \|b\| < r, \|\varphi(b)\| \leq K\|b\|$. D'où le résultat chérché.

Théorème 2 : (Théorème de VON NEUMANN (K.FAN [3]) dans une algèbre de Banach involutive quotient, voir aussi le cas $\alpha = 0$ dans A.ELKINANI [2]).

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{D}(0,1)$ telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{D}(0,1)$ et a un élément de A tel que $|a|_\alpha \leq 1$. Alors il existe $a_1 \in A$ tel que $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$ avec $|a_1|_\alpha \leq 1$.

Preuve :

On peut supposer que f n'est pas constante sur $D(0,1)$. Donc d'après le principe du maximum on a $|z| < 1$ pour tout $|f(z)| < 1$. Donc d'après le théorème 2, pour tout $0 < r < 1$ il existe a_r de A tel que $\tilde{f}(r\tilde{a}) = \tilde{a}_r$ avec $|a_r|_\alpha < 1$. D'après la proposition 2 on a $\tilde{f}(r\tilde{a}) = \tilde{f}(\tilde{a}) + \tilde{b}_r$ avec $\lim_{r\longrightarrow 1^-} b_r = 0$. On pose $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$, donc $|a_1|_\alpha = |a_r - b_r|_\alpha \leq |a_r|_\alpha + |b_r|_\alpha \leq 1 + \|b_r\|$. En faisant tendre r vers 1^- on obtient $|a_1|_\alpha \leq 1$.

Théorème 3 :

Soient $f : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $0 < r < 1$.
On pose $M(r) = sup\{|f(z)|\ |\ |z| = r\}$. Pour tout $a \in A$ vérifiant $|a|_\alpha \leq r$, $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$ avec $a_1 \in A$. Alors $M(r) = sup\{|a_1|_\alpha|\ |a|_\alpha \leq r\}$.

Preuve :

On peut supposer que f est non identiquement nulle, donc $M(r) > 0$. On pose

$g(z) = \dfrac{f(rz)}{M(r)}$. g est définie est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1/r\}$. D'après le principe du maximum on a $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{D}(0,1)$. D'après Le théorème 2, si $a \in A$ et $|a|_\alpha \leq 1$ alors $\tilde{g}(\tilde{a}) = \tilde{b}$ avec $|b|_\alpha \leq 1$. Autrement dit si $a \in A$ et $|a|_\alpha \leq 1$ alors $\tilde{f}(r\tilde{a}) = \tilde{b}$ avec $|b|_\alpha \leq M(r)$. Ou encore si $a \in A$ et $|a|_\alpha \leq r$ alors $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$ avec $|a_1|_\alpha \leq M(r)$. Donc $M(r) \geq sup\{|a_1|_\alpha|\ |a|_\alpha \leq r\}$. D'autre part il existe z_o tel que $|z_o| = r$ et $|f(z_o)| = M(r)$. Donc $|z_o|_\alpha = r$, $\tilde{f}(z_o\tilde{1}) = f(z_o)\tilde{1}$ et $|f(z_o)|_\alpha = M(r)$. D'où $M(r) = sup\{|a_1|_\alpha|\ |a|_\alpha \leq r\}$.

Références

[1] M.AKKAR H.ARROUB *Calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive quotient.* A paraître dans Bulletin of The Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[2] A.ELKINANI *Fonctions harmoniques opérant sur les algèbres de Banach involutives.* Annales de l'Institut Fourier. Université Joseph Fourier Grenoble. Tome 41 _ Fascicule 2 (1991), 493_509.

[3] K.FAN *Analytic functions of a propre contraction.* Math. Z. 160 (1978) 275_290.

[4] V.PTAK *Banach algebras with involution.* Manuscripta Math. 6 (1972) r 245_290.

[5] S.SHIRALI J.W.FORD *Symmetry in complex involutory Banach algebra.* II Duke Math. J. 37 (1970) 275_280.

[6] L.WAELBROECK *Quotient Banach spaces.* Spectral Theory. Banach center publications. Volume 8. PWN_POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS. WARSAW (1982) 553_562.

[7] L.WAELBROECK *Holomorphic functional calculus and quotient Banach algebras.* STUDIA MATHEMATICA , T LXXV (1983) 273_286.

Université Bordeaux I
U.F.R. Mathématiques et Informatique
33405 Talence Cedex (France)