Convergence faible de la U-statistique empirique corrigée en condition de mélange

Michel HAREL Bouameur RAGBI

Résumé

Dans ce papier, nous étudions la convergence faible au sens de la topologie de Skorohod d'une U-statistique empirique corrigée lorsque les variables aléatoires sont absolument régulières. Nos résultats généralisent celles de Harel et Puri (1994) et de Ruymgaart et van Zuijlen (1992) pour des variables i.i.d.. Des applications sont données dans la section 5.

Abstract

In this paper, the weak convergence of weighted empirical U-statistic with respect to the Skorohod topology is obtained when the random variables are absolutely regular. It is a generalization of the results of Puri and Harel (1994) for dependent random variables and Ruymgaart and van Zuijlen (1992) for i.i.d. random variables. Applications are given in section 5.

1 Introduction

Soient $X_1, X_2,...,$ des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition commune F, et soit h une fonction de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ Borel mesurable, symétrique dans ses k arguments (k ≥ 1). On désigne par $J_n(k)$ l'ensemble de toutes les combinaisons de k éléments distincts dans $\{1, ..., n\}$ alors

Received by the editors December 1994 — In revised form May 1995

Communicated by M. Hallin

AMS Mathematics Subject Classification : 60F05.

Keywords : Convergence faible, U-statistique empirique corrigée, absolue régularité, topologie de Skorohod.

card $J_n(k) = \binom{n}{k}$; où card A désigne le cardinal de A. On note $X_I = h(X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ pour $I = \{i_1, ..., i_k\} \in J_n(k)$ et on définit :

$$H_n(t) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{I \in J_n(k)} K_n(t - X_I), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

avec K_n une suite de fonctions de répartition qui converge faiblement vers la fonction de répartition s définie par :

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.2}$$

de plus, nous supposons que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |K_n(x)| \leq M < +\infty. \tag{1.3}$$

Remarquons que cette condition n'est pas contraignante, il suffit de prendre par exemple : $K_n(x) = \int_{-\infty}^{x} a_n^{-1} k(t a_n^{-1}) dt$, où $\{a_n\}$ est une suite de nombres positifs qui converge vers 0 et k est un noyau de Parzen-Rosenblatt (Parzen (1962) et Rosenblatt (1956)) alors la condition (1.3) est vérifiée :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |K_n(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int |k(t)| dt \leq 1.$$

On définit maintenant

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^k} s(t - h(x_1, ..., x_k)) \prod_{j=1}^{k} F(dx_j), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Nous supposons que H est continue.

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la U-statistique empirique U_n définie par :

$$U_n(u) = \begin{cases} n^{\frac{1}{2}}(H_n(H^{-1}(u)) - u), & \text{si } 0 < u < 1; \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.5}$$

lorsqu'elle est corrigée par une fonction continue positive $r(u)$.

Les variables aléatoires considérées dans la suite sont supposées absolument régulières de taux d'absolue régularité :

$$\beta(m) = O(m^{-6-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.6}$$

Lorsque $K_n = s$, et dans ce cas

$$H_n(t) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{I \in J_n(k)} I_{[X_I \leq t]} = \tilde{H}_n, \qquad t \in \mathbb{R},$$

Harel et Puri (1994) ont établi la convergence faible de la U-statistique empirique corrigée pour des variables aléatoires absolument régulières.
Bien que $\tilde{H}_n$ soit dans un sens tout à fait lisse, il ne prend pas en compte complètement le fait que H soit lisse (c'est à dire l'existence d'une densité). En fait si H est continue, il semble raisonnable de considérer des estimateurs continus de H qui soient mieux adaptés à cette situation (exemples 5.2.1-5.2.5). De plus si on veut que cet estimateur soit aussi performant que $\tilde{H}_n$, il semble naturel d'exiger que la suite $\{K_n\}$ ne soit pas trop loin de s en imposant que K_n converge faiblement vers s.

Rappelons qu'une suite $\{X_i\}$ est absolument régulière si

$$\sup_{j\geq 1} E\{\sup_{A\in\sigma(X_i;i\geq j+m)} |P(A|\sigma(X_i, 1\leq i\leq j)) - P(A)|\} = \beta(m)\downarrow 0,$$

où $\sigma(X_i; 1\leq i\leq j)$ et $\sigma(X_i, i\geq j+m)$ sont les σ-tribus engendrées par $(X_1,...,X_j)$ et $(X_{j+m}, X_{j+m+1},...)$ respectivement.

Elle est dite fortement mélangeante si

$$\begin{aligned}\sup_{j\geq 1}\{|P(A\cap B) - P(A)P(B)|;\, A\in\sigma(X_i, 1\leq i\leq j),\\ B\in\sigma(X_i, i\geq j+m)\} = \alpha(m)\downarrow 0.\end{aligned}$$

On a toujours $\alpha(m)\leq\beta(m)$, donc si une suite $\{X_i\}$ est absolument régulière, elle est aussi fortement mélangeante.

Récemment, le comportement asymptotique de la U-statistique empirique corrigée à été étudié par Ruymgaart et Van Zuijlen (1992) pour des variables aléatoires i.i.d., Harel et Puri (1994) ont étendu leurs résultats aux variables dépendantes. Rappelons que, le comportement asymptotique de la U-statistique est établi pour des variables absolument régulières et stationnaires par Yoshihara (1976) et par Harel et Puri (1989a,1989b, 1990) pour des variables non stationnaires.

Arcones et Yu (1994) ont établi des conditions suffisantes assurant la convergence faible vers un processus gaussien pour une U-statistique empirique indexée par une classe de fonctions vérifiant certaines conditions d'entropie lorsque les variables aléatoires sont absolument régulières. Leurs conditions sont minimales (corollaire 2.1 et lemme 3.1) mais leurs techniques ne sont pas adaptées à notre situation puisqu'ils n'ont pas étudié le processus corrigé. Pour les mêmes raisons, il semble difficilement envisageable de considérer une fonction correctrice vérifiant les conditions (1.5) ou (1.6) d'Einmahl, Ruymgaart et Wellner (1994) dans notre théorème 2.1.

2 Convergence faible de la U-statistique empirique corrigée.

Fonction correctrice *Une fonction $r\ :[0,1]\to\mathbb{R}^+$ est appelée fonction correctrice si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. *(i) r est continue.*
2. *(ii) $r(0)=0$ et $r(1)=0$.*

Pour toute fonction bornée $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}$, et $\delta>0$, on définit $\omega(f,\delta)=\sup\{|f(u)-f(v)|,|u-v|\leq\delta\}$. On note par $D[0,1]$ l'espace des fonctions sur $[0,1]$ continues à droite et admettant une limite à gauche.
Soit α fixé tel que :

$$0<\alpha<\{(\frac{1}{2}+\delta)/(\frac{3}{2}-\delta)\}\wedge\{\frac{\delta}{(\frac{1}{2}-\delta)}\},0<\delta<\frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Nous considérons la U-statistique modifiée $\tilde{U}_n$ définie par :

$$\tilde{U}_n(u)=\begin{cases}U_n(u) & \text{si } n^{-1-\alpha}\leq u\leq 1-n^{-1-\alpha}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{2.2}$$

pour toute fonction correctrice, nous introduisons la U-statistique modifiée corrigée $\tilde{U}_n\cdot\frac{1}{r}$ définie par :

$$\tilde{U}_n\cdot\frac{1}{r}(u)=\begin{cases}U_n^*(u)/r(u) & \text{si } u\neq 0 \text{ et } u\neq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{2.3}$$

Théorème 2.1. *On suppose que la suite $\{X_i\}$ est absolument régulière dont les taux d'absolue régularité vérifient (1.6). Pour toute fonction correctrice $r(u)$ satisfaisant*

$$r(u)\geq A(u(1-u))^{\frac{1}{2}-\delta},\quad 0<\delta<\frac{1}{2}, \tag{2.4}$$

où A est une constante positive. Il existe un processus gaussien $\tilde{U}_r$ à trajectoires p.s. continues tel que $\tilde{U}_n\cdot\frac{1}{r}$ définie en (2.3) (à valeurs p.s. dans $D=D[0,1]$) converge faiblement vers $\tilde{U}_r$ sur $D[0,1]$ au sens de la topologie de Skorohod.

La démonstration de ce théorème s'obtient à partir des trois propositions suivantes.

Proposition 2.1. *On suppose que la suite $\{X_i\}$ satisfait les conditions du théorème 2.1. Alors il existe un processus gaussien U à trajectoires p.s. continues tel que, U_n converge en loi vers U sur $D[0,1]$ au sens de la topologie de Skorohod. De plus nous avons $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\exists N_0$, tel que : $\forall n\geq N_0$*

$$P_n[f\in D[0,1],\omega(f,\delta)\geq\varepsilon]\leq\varepsilon, \tag{2.5}$$

où P_n est la loi de probabilité de U_n.

Proposition 2.2. *Si $\{X_i\}$ satisfait les conditions du théorème 2.1. Alors, pour toute fonction correctrice $r(u)$ satisfaisant (2.4), nous avons $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\theta > 0$, $\exists N_0$,* tel que : $\forall n \geq N_0$

$$P[\sup_{u\in C_\theta} |\tilde{U}_n(u) \cdot \frac{1}{r(u)}| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon, \tag{2.6}$$

où $C_\theta = \{u \in [0, 1], u \leq \theta \, ou \, u \geq 1 - \theta\}$.

Proposition 2.3. *Soit $Y_n, n \in \mathbb{N}^*$, un processus à valeurs dans $D[0, 1]$, on suppose que Y_n converge en loi (au sens de la topologie de Skorohod) vers un processus gaussien Y à trajectoires p.s. continues et on suppose que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\exists N_0$, tel que : $\forall n \geq N_0$*

$$Q_n[f \in D[0, 1], \omega(f, \delta) \geq \varepsilon] \leq \varepsilon, \tag{2.7}$$

où Q_n est la loi de Y_n. Soit r une fonction correctrice tel que $Y_n \cdot \frac{1}{r}, n \in \mathbb{N}^*$, à trajectoires p.s. dans $D[0, 1]$. De plus nous supposons que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\theta > 0$, $\exists N_0$, tel que : $\forall n \geq N_0$

$$P[\sup_{u\in C_\theta} |Y_n(u) \cdot \frac{1}{r(u)}| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon, \tag{2.8}$$

Alors $Y_n \cdot \frac{1}{r}$ converge faiblement en topologie de Skorohod vers le processus gaussien $Y \cdot \frac{1}{r}$ à trajectoires p.s. continues .

3 Démonstration de la proposition 2.1

On définit :

$$\mu_n(t) = EK_n(t-h(X_1, ..., X_k)) = \int_{\mathbb{R}^k} K_n(t-h(x_1, ..., x_k)) \prod_{j=1}^{k} F(dx_j), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

(3.2)

$$g_n(x_1, ..., x_k; u) = K_n(H^{-1}(u) - h(x_1, ..., x_k)); \quad u \in [0, 1], \quad x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k$$

pour tout ℓ, $1 \leq \ell \leq k$, on définit :

$$g_{n,\ell}(x_1, ..., x_\ell; u) = \int_{\mathbb{R}^{k-\ell}} g_n(x_1, ..., x_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_k; u) \prod_{j=\ell+1}^{k} F(dx_j). \tag{3.3}$$

On pose $g_{n,0}(u) = \mu_n(H^{-1}(u))$

et

(3.4)

$$V_{n,\ell}(u) = n^{-[\ell]} \int \sum_{\{i_1,...,i_\ell\}\in J_n^*(\ell)} g_{n,\ell}(x_{i_1}, ..., x_{i_\ell}; u) \prod_{j=1}^{\ell} d[I_{[X_{i_j} \leq x_{i_j}]} - F(x_j)], 1 \leq \ell \leq k,$$

où $n^{-[\ell]} = [n(n-1)(n-2)...(n-\ell+1)]^{-1}$. $J_n^*(\ell)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles $\{i_1, ..., i_\ell\}$ de ℓ éléments distincts dans $\{1, 2, ..., n\}$ tel que $i_1 < i_2 < ... < i_\ell$.

$\forall u \in [0,1]$ on a :

$$U_n(u) = V_n(u) + n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(H^{-1}(u)) - u), \tag{3.5}$$

où pour tout $u \in [0,1]$, $V_n(u)$ est le processus empirique défini par :

$$V_n(u) = n^{\frac{1}{2}}(H_n(H^{-1}(u)) - \mu_n(H^{-1}(u))), \tag{3.6}$$

or l'hypothèse de convergence de K_n vers s implique qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$

$$n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(H^{-1}(u)) - u) = O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

On se ramène donc à l'étude de la convergence faible du processus empirique V_n. Notons d'abord que nous pouvons écrire :

$$V_n(u) = n^{\frac{1}{2}}\{\sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} V_{n,\ell}(u)\}; \quad u \in [0,1] \tag{3.7}$$

Lemme 3.1. *Si la suite $\{X_i\}$ est absolument régulière avec les taux de mélange (1.6), alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour tout s,t tel que : $s \leq t$, nous avons :*

$$E(n^{\frac{1}{2}}\hat{V}_{n,1}(t) - n^{\frac{1}{2}}\hat{V}_{n,1}(s))^4 \leq C[(H(t)-H(s))^{2-2\varepsilon} + n^{-1}(H(t)-H(s))^{1-\varepsilon}] \tag{3.8}$$

où C est une constante positive et $\hat{V}_{n,1}(t) = V_{n,1}(H(t))$.

Démonstration du lemme 3.1

Soit $s, t \in \mathbb{R}$ tel que : $s \leq t$

$$n^{\frac{1}{2}}(\hat{V}_{n,1}(t) - \hat{V}_{n,1}(s)) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} Y_{ni}(s,t)$$

avec :

$$Y_{ni}(s,t) = g_{n,1}(X_i, H(t)) - g_{n,1}(X_i, H(s)) - (\mu_n(t) - \mu_n(s))), \quad i = 1, ..., n$$

pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq n$: $0 \leq |Y_{ni}(s,t)| \leq 2$, donc d'après Doukhan et Portal (1983), avec $q = 2$, il existe une constante $C_1 > 0$ tel que :

$$E(n^{\frac{1}{2}}\hat{V}_{n,1}(t) - n^{\frac{1}{2}}\hat{V}_{n,1}(s))^4 \leq C_1[||Y_{n1}(s,t)||_\varepsilon^{2-2\varepsilon} + n^{-1}||Y_{n1}(s,t)||_\varepsilon^{1-\varepsilon}], \tag{3.9}$$

avec

$$||Y_{n1}(s,t)||_\varepsilon = E(Z_n(t) - Z_n(s))^{\frac{2}{1-\varepsilon}}$$

$$Z_n(t) = g_{n,1}(X_1; H(t)) - \mu_n(H(t)).$$

$$
\begin{aligned}
E(Z_n(t)-Z_n(s))^{\frac{2}{1-\varepsilon}} &\leq 2^{\frac{2}{1-\varepsilon}}E(Z_n(t)-Z_n(s))^2\\
&= E(g_{n,1}(X_1;H(t))-g_{n,1}(H(s)))^2+(\mu_n(H(t))-\mu_n(H(s)))^2\\
&\quad -2(\mu_n(H(t))-\mu_n(H(s)))E(g_{n,1}(X_1;H(t))-g_{n,1}(H(s)))\\
&\leq (\mu_n(H(t))-\mu_n(H(s)))(1-(\mu_n(H(t))-\mu_n(H(s))))\\
&\leq \mu_n(H(t))-\mu_n(H(s))\\
&\leq 2^{\frac{2}{1-\varepsilon}}\sup_{y\in[s,t]}\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|K_n(y)||H(t)-H(s)|=M(\varepsilon)(H(t)-H(s))
\end{aligned}
$$

où $M(\varepsilon)=M>0$ est une constante, donc

$$
\begin{aligned}
E(n^{\frac{1}{2}}(\hat{V}_{n,1}(t)-\hat{V}_{n,1}(s))^4 &\leq C_1[M^{2-2\varepsilon}(H(t)-H(s))^{2-2\varepsilon}+n^{-1}M^{1-\varepsilon}(H(t)-H(s))^{1-\varepsilon}]\\
&\leq C[(H(t)-H(s))^{2-2\varepsilon}+n^{-1}(H(t)-H(s))^{1-\varepsilon}],
\end{aligned}
$$

où C est une constante positive.

Lemme 3.2. *Sous les conditions du théorème 2.1, le processus $n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}$ converge en loi vers un processus gaussien U dans $D[0,1]$ au sens da la topologie de Skorohod. De plus nous avons :*

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N_0$:

$$Q_n[f\in D[0,1];\omega(f,\delta)\geq\varepsilon]\leq\varepsilon. \tag{3.10}$$

Q_n est la loi de probabilité de $n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}$.

Démonstration du lemme 3.2.

D'après théorème 15.1 de Billingsley (1968), on doit montrer que :

1. (i) les lois de dimension finie de Q_n convergent vers une loi normale.

2. (ii) Q_n est tendue.

La condition (i) est équivalente à : $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\forall u_\ell\in[0,1]$ et $\forall\lambda_\ell\in\mathbb{R}(1\leq\ell\leq p)$: $n^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell=1}^p\lambda_\ell V_{n,1}(u_\ell)$ converge en loi vers une loi normale.
Sans perte de généralité, on suppose que $p=2$ et que $u_1<u_2$. Nous avons :

$$E(n^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell=1}^p\lambda_\ell V_{n,1}(u_\ell))=0$$

et

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell=1}^p\lambda_\ell V_{n,1}(u_\ell) &= n^{-\frac{1}{2}}\lambda_1(\sum_{i=1}^n g_{n,1}(X_i;u_1)-\int g_{n,1}(x;u_1)dF(x))\\
&\quad +n^{-\frac{1}{2}}\lambda_2(\sum_{i=1}^n g_{n,1}(X_i;u_2)-\int g_{n,1}(x;u_2)dF(x))\\
&= n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^n[\lambda_1 g_{n,1}(X_i;u_1)+\lambda_2 g_{n,1}(X_i;u_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int(\lambda_1 g_{n,1}(x;u_1)+\lambda_2 g_{n,1}(x;u_2))dF(x)] \\
= \;& n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n} Y_{ni},
\end{aligned}
$$

où pour tout $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$

$$Y_{ni} = \lambda_1 g_{n,1}(X_i;u_1)+\lambda_2 g_{n,1}(X_i;u_2) - \int(\lambda_1 g_{n,1}(x;u_1)+\lambda_2 g_{n,1}(x;u_2))dF(x).$$

Or $|Y_{ni}| \leq M(|\lambda_1| + |\lambda_2|) < +\infty$, de plus, la suite de variables aléatoires $(Y_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ est non stationnaire fortement mélangeante avec les taux de mélangeance (1.6), d'après Withers (1975) $n^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell=1}^{p}\lambda_\ell V_{n,1}(u_\ell)$ converge vers une loi normale $N(0,\sigma^2)$,
où

$$\sigma^2 = E(A_1^2) + 2\sum_{j=2}^{+\infty} E(A_1 A_j) < +\infty,$$

et

$$
\begin{cases}
A_j & = \lambda_1 g(X_j;u_1)+\lambda_2 g(X_j;u_2) - \int(\lambda_1 g(x;u_1)+\lambda_2 g(;u_2))F(dx), \quad j \geq 1 \\
g(X_j;u) & = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} s(H^{-1}(u) - h(x_1,...,x_{k-1},X_j;u))\prod_{\ell=1}^{k-1} dF(x_\ell).
\end{cases}
$$

Montrons maintenant (ii), $\forall u, v \in [0,1]$, d'après le lemme 3.1, nous avons :
(3.11)

$$E(n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(v) - n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(u))^4 \leq C[(v-u)^{2-2\varepsilon} + n^{-1}(v-u)^{1-\varepsilon}], \quad \forall \varepsilon \in]0,1[, C > 0.$$

$\forall n \geq 1$, soit $\{u_i; i = 0,...,n\}$ une suite définie par :
$u_0 = 0 < u_1 < u_2 < ... < u_{n-1} < u_n = 1$ et $u_{i+1} - u_i = n^{-1}$,
pour tout $v \in [0,1]$, il existe $\ell \in \{0,1,...,n-1\}$ tel que : $v \in]u_\ell, u_{\ell+1}[$.

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(v) - V_{n,1}(u_\ell)) \;=\;& n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}[\int_{\mathbb{R}^{k-1}}(K_n(H^{-1}(v) - h(x_1,...,x_{k-1},X_i)) \\
& -K_n(H^{-1}(u_\ell) - h(x_1,...,x_{k-1},X_i)))\prod_{j=1}^{k-1} dF(x_j) \\
& -(\mu_n(H^{-1}(v)) - \mu_n(H^{-1}(u_\ell)))] \\
\leq\;& n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}[\int_{\mathbb{R}^{k-1}}(K_n(H^{-1}(u_{\ell+1}) - h(x_1,...,x_{k-1},X_i)) \\
& -K_n(H^{-1}(u_\ell) - h(x_1,...,x_{k-1},X_i)))\prod_{j=1}^{k-1} dF(x_j)] \\
& -n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1})) - \mu_n(H^{-1}(u_\ell))) \\
\leq\;& n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell)) + Mn^{\frac{1}{2}}(u_{\ell+1} - u_\ell) \\
\leq\;& n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell)) + Mn^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

de même, on montre que :

$$n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(u_\ell) - V_{n,1}(v)) \leq n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell)| + Mn^{-\frac{1}{2}},$$

donc

$$n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(v) - V_{n,1}(u_\ell)| \leq n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell)| + 2Mn^{-\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

(3.10) s'obtient alors à partir de (3.11) et (3.12) et Q_n est tendue.

Lemme 3.3 .

Sous les conditions du théorème 2.1, pour tout $u \in [0,1]$, nous avons :

$$E(V_{n,\ell}(u))^6 = O(n^{-5}), \quad 2 \leq \ell \leq k. \tag{3.13}$$

Preuve. Voir Harel et Puri (1994, lemme 3.2).

Lemme 3.4. *Sous les conditions du théoréme 2.1, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :*

$$P[\sup_{u \in [0,1]} n^{\frac{1}{2}} V_{n,\ell}(u) \geq \varepsilon] = O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad 2 \leq \ell \leq k \tag{3.14}$$

Démonstration :

On définit pour tout $n \geq 1$, une suite $(u_i), i = 0, ..., n$ par :

$u_0 = 0 < u_1 < ... < u_n = 1$ et $u_{i+1} - u_i = n^{-1}$.

Soit $\ell = 2$ fixé. $\forall u \in [0,1]$, il existe $\ell \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $v \in]u_\ell, u_{\ell+1}[$.

On peut écrire

$$n^{\frac{1}{2}} V_{n,2}(v) = n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(v) - V_{n,2}(u_{\ell+1})) + n^{\frac{1}{2}} V_{n,2}(u_{\ell+1})$$

où

$$|n^{\frac{1}{2}} V_{n,2}(v)| \leq |n^{\frac{1}{2}} V_{n,2}(v) - n^{\frac{1}{2}} V_{n,2}(u_{\ell+1})| + |n^{\frac{1}{2}} V_{n,2}(u_{\ell+1})|, \tag{3.15}$$

d'autre part, nous avons par définition

$$\begin{aligned}
n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(u_{\ell+1}) - V_{n,2}(v)) &= n^{\frac{1}{2}} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [g_{n,2}(X_i, X_j; u_{\ell+1}) - g_{n,2}(X_i, X_j; v) \\
&\quad -g_{n,1}(X_i; u_{\ell+1}) + g_{n,1}(X_i; v) - g_{n,1}(X_j; u_{\ell+1}) \\
&\quad +g_{n,1}(X_j; v) + \mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1})) - \mu_n(H^{-1}(v))] \\
&\leq n^{\frac{1}{2}} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [g_{n,2}(X_i, X_j; u_{\ell+1}) - g_{n,2}(X_i, X_j; u_\ell) \\
&\quad -g_{n,1}(X_i; u_{\ell+1}) + g_{n,1}(X_i; u_\ell) - g_{n,1}(X_j; u_{\ell+1}) \\
&\quad +g_{n,1}(X_j; u_\ell) + \mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1})) - \mu_n(H^{-1}(u_\ell))] \\
&\quad +n^{-\frac{1}{2}}\{\sum_{j=1}^{n} g_{n,1}(X_j; u_{\ell+1}) - g_{n,1}(X_j; u_\ell) - \mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\mu_n(H^{-1}(u_\ell))\} + n^{-\frac{1}{2}}\{\sum_{i=1}^{n} g_{n,1}(X_i;u_{\ell+1}) - g_{n,1}(X_i;u_\ell) \\
& -\mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1})) + \mu_n(H^{-1}(u_\ell))\} \\
& \quad +2n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1})) - \mu_n(H^{-1}(u_\ell))) \\
\leq \; & n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(u_{\ell+1}) - V_{n,2}(u_\ell)) \\
& \quad +2n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell)) + 2n^{\frac{1}{2}}M(u_{\ell+1} - u_\ell),
\end{aligned}
$$

d'une manière similaire on obtient :

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(v) - V_{n,2}(u_{\ell+1})) & \leq 2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}[g_{n,1}(X_i;u_{\ell+1}) - g_{n,1}(X_i;v)] \\
& \leq 2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}[g_{n,1}(X_i;u_{\ell+1}) - g_{n,1}(X_i;u_\ell) \\
& \quad -\mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1})) + \mu_n(H^{-1}(u_\ell))] \\
& \quad +|n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(u_{\ell+1}) - V_{n,2}(u_\ell))| \\
& \quad +2n^{\frac{1}{2}}M(u_{\ell+1} - u_\ell)
\end{aligned}
$$

d'après les deux inégalités précédentes on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{2}}|V_{n,2}(u_{\ell+1}) - V_{n,2}(v)| & \leq n^{\frac{1}{2}}|V_{n,2}(u_{\ell+1}) - V_{n,2}(u_\ell)| \\
& \quad +2n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell)| \\
& \quad +2Mn^{\frac{1}{2}}(u_{\ell+1} - u_\ell).
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

On déduit de (3.15) et (3.16) que :
(3.17)

$$
\sup_{v\in[0,1]}|n^{\frac{1}{2}}V_{n,2}(v)| \leq 3\sup_{0\leq\ell\leq n}|n^{\frac{1}{2}}V_{n,2}(u_\ell)| + 2\sup_{0\leq\ell\leq n-1}|n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(u_{\ell+1}) - V_{n,1}(u_\ell))| + 2n^{-\frac{1}{2}}M.
$$

D'après le lemme 3.3 et le lemme 3.2 on peut écrire pour tout $\varepsilon > 0$:

$$
P[\sup_{u\in[0,1]}|n^{\frac{1}{2}}V_{n,2}(u)| \geq \varepsilon] = O(n^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.18}
$$

Considérons maintenant le cas $\ell = 3$. Pour tout $v \in [0,1]$, il existe $\ell \in \{0,...,n-1\}$ tel que $v \in]u_\ell, u_{\ell+1}[$ et on peut écrire

$$
|n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(v)| \leq |n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(u_{\ell+1})| + n^{\frac{1}{2}}|V_{n,3}(u_{\ell+1}) - V_{n,3}(v)|. \tag{3.19}
$$

Nous avons par définition

$$
n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(u_{\ell+1}) - n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(v) = n^{\frac{1}{2}}\binom{n}{3}^{-1}\sum_{1\leq i<j<\ell\leq n}[g_{n,3}(X_i,X_j,X_\ell;u_{\ell+1})
$$

$$
\begin{aligned}
& -g_{n,3}(X_i,X_j,X_\ell;v)-g_{n,2}(X_i,X_j;u_{\ell+1})\\
& +g_{n,2}(X_i,X_j;v)-g_{n,2}(X_i,X_\ell;u_{\ell+1})\\
& +g_{n,2}(X_i,X_\ell;v)-g_{n,2}(X_j,X_\ell;u_{\ell+1})\\
& +g_{n,2}(X_j,X_\ell;v)+g_{n,1}(X_i;u_{\ell+1})-g_{n,1}(X_i;v)\\
& +g_{n,1}(X_j;u_{\ell+1})-g_{n,1}(X_j;v)+g_{n,1}(X_\ell;u_{\ell+1})\\
& -g_{n,1}(X_\ell;v)-\mu_n(H^{-1}(u_{\ell+1}))+\mu_n(H^{-1}(v))]\\
\leq\ & n^{\frac{1}{2}}(V_{n,3}(u_{\ell+1})-V_{n,3}(u_\ell))+3n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(u_{\ell+1})-V_{n,2}(u_\ell))\\
& \quad +3n^{\frac{1}{2}}(V_{n,1}(u_{\ell+1})-V_{n,1}(u_\ell))+6Mn^{\frac{1}{2}}(u_{\ell+1}-u_\ell),
\end{aligned}
$$

et d'une façon similaire, nous avons

$$
\begin{aligned}
& n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(v)-n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(u_{\ell+1})\\
& \leq 3n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(u_{\ell+1})-V_{n,2}(u_\ell))+4Mn^{\frac{1}{2}}(u_{\ell+1}-u_\ell)\\
& \leq 3n^{\frac{1}{2}}(V_{n,2}(u_{\ell+1})-V_{n,2}(u_\ell))+4Mn^{\frac{1}{2}}(u_{\ell+1}-u_\ell)\\
& \quad +n^{\frac{1}{2}}|V_{n,3}(u_{\ell+1})-V_{n,3}(u_\ell)|+3n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_{\ell+1})-V_{n,1}(u_\ell)|,
\end{aligned}
$$

les deux inégalités précédentes et (3.19) impliquent

$$
\begin{aligned}
\sup_{v\in[0,1]}|n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(v)| \leq\ & 3n^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq\ell\leq n}|V_{n,3}(u_\ell)|+6n^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq\ell\leq n}|V_{n,2}(u_\ell)|\\
& +3n^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq\ell\leq n-1}|V_{n,1}(u_{\ell+1})-V_{n,1}(u_\ell)|+6n^{-\frac{1}{2}}M.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

D'après les lemmes 3.1, 3.2 et (3.17), et pour tout $\varepsilon>0$

$$P[\sup_{u\in[0,1]}|n^{\frac{1}{2}}V_{n,3}(u)|\geq\varepsilon]=O(n^{-\frac{1}{2}})$$

(3.14) est démontrée pour $\ell=3$, pour $\ell\geq 4$, la démonstration est analogue.

4 Démonstration de la proposition 2.2

Proposition 2.2 est une conséquence des deux lemmes suivants.
Soit $\tilde{V}_{n,1}$ le processus modifié défini par

$$\tilde{V}_{n,1}(u)=\begin{cases} V_{n,1}(u) & \text{si } n^{-1-\alpha}\leq u\leq 1-n^{-1-\alpha}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\tag{4.1}$$

Lemme 4.1
Sous les conditions du théorème 2.1, $\forall\eta>0$, $\exists\theta>0$, $\exists N_0$, tel que $\forall n\geq N_0$

$$P[\sup_{u\in C_\theta}|n^{\frac{1}{2}}\tilde{V}_{n,1}(u)\frac{1}{r(u)}|\geq\eta]\leq\eta.\tag{4.2}$$

Preuve. Pour tout $n \geq 1$, on définit une suite $\{u_i^{(n)} = u_i, i = 0, ..., i_n\}$ de points équidistants tels que :

$$(\frac{1}{n})^{1+\alpha'} \leq u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)} \leq (\frac{1}{n})^{1+\alpha}, \quad i = 1, ..., i_n, \tag{4.3}$$

$0 < \alpha < \alpha'$, $\alpha > \frac{\alpha'}{2}$, $u_0^{(n)} = 0, u_{i_n-1}^{(n)} < \theta \leq u_{i_n}^{(n)}$.

Pour tout $n \geq 1$, pour tout i, j, $1 \leq i < j \leq i_n$, nous avons (d'après l'inégalité $|\sum_{e\in E} x_e|^4 \leq (2^3)^{cardE} \sum_{e \in E} x_e^4$).

$$\begin{aligned} E(n^{\frac{1}{2}}\frac{V_{n,1}(u_j)}{r(u_j)} - n^{\frac{1}{2}}\frac{V_{n,1}(u_i)}{r(u_i)})^4 &\leq 64\{E(n^{\frac{1}{2}}\frac{(V_{n,1}(u_j) - V_{n,1}(u_i))}{r(u_j)})^4 \\ &\qquad +E((n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(u_i)(\frac{1}{r(u_i)} - \frac{1}{r(u_j)}))^4\} \\ &\leq C[(u_j - u_i)^{2-2\eta} + n^{-1}(u_j - u_i)](u_j)^{-2+4\delta} \\ &\quad +[(u_i)^{2-2\eta} + n^{-1}(u_i)^{1-\eta}][(u_i)^{-\frac{1}{2}+\delta} - (u_j)^{-\frac{1}{2}+\delta}]^4 \\ &\leq 2C\{(u_j - u_i)^{2-2\eta}(u_j)^{-2+4\delta} + (u_i)^{2-2\eta}[(u_i)^{-\frac{1}{2}+\delta} \\ &\qquad -(u_j)^{-\frac{1}{2}+\delta}]^4\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

(d'après le lemme 3.1 et la condition (4.3))
on pose $u_i = u$ et $u_j = v$.
Le membre à gauche de (4.4) est inférieur ou égal à

$$\begin{aligned} & C\{(v-u)^{2-2\eta}v^{-2+4\delta} + u^{2-2\eta}[v^{-\frac{1}{2}+\delta} - u^{-\frac{1}{2}+\delta}]^4\} \\ = & C\{[(v-u)(\frac{1}{v^{\frac{1}{2}-\delta}})^{1+\gamma}]^{2-2\eta} + [u(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}-\delta}} - \frac{1}{v^{\frac{1}{2}-\delta}})^{1+\gamma}]^{2-2\eta}\} \end{aligned}$$

où $(1+\gamma)(2-2\eta) = 4$.

D'après le théorème de la moyenne, il existe γ_1 ($u \leq \gamma_1 \leq v$) tel que

$$(v-u)\frac{1}{\gamma_1^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}} = \int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}}$$

et il existe γ_2 tel que

$$\begin{aligned} \gamma_2^{1-(\frac{1}{2}-\delta)\gamma}(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}-\delta}} - \frac{1}{v^{\frac{1}{2}-\delta}}) &= \int_v^u \frac{t}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)\gamma}}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\delta}})dt \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}-\delta}\int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}} \end{aligned}$$

alors le membre à droite de (4.4) est inférieur ou égal à

$$\begin{aligned}
&C\{[(v-u)\frac{1}{\gamma_1^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}}]^{2-2\eta}+[u\frac{1}{u^{(\frac{1}{2}-\delta)\gamma}}(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}-\delta}}-\frac{1}{v^{\frac{1}{2}-\delta}})]^{2-2\eta}\} \\
&\leq C\{(\int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}})^{2-2\eta}+[\gamma_2^{1-(\frac{1}{2}-\delta)\gamma}(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}-\delta}}-\frac{1}{v^{\frac{1}{2}-\delta}})]^{2-2\eta}\} \\
&\leq C\{(\int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}})^{2-2\eta}+(\int_v^u \frac{t}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)}}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\delta}})dt)^{2-2\eta}\} \\
&\leq C\{(\int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}})^{2-2\eta}+(\frac{1}{\frac{1}{2}-\delta}\int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta(1+\gamma))}})^{2-2\eta}\}.
\end{aligned}$$

$\delta \in]0,\frac{1}{2}[$, $(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)<1$ si $\eta<2\delta$
$\nu([u,v])=\int_u^v \frac{dt}{t^{(\frac{1}{2}-\delta)(1+\gamma)}}$ est une mesure diffuse sur $]0,1[$

$$E(n^{\frac{1}{2}}\frac{V_{n,1}(u_j)}{r(u_j)}-n^{\frac{1}{2}}\frac{V_{n,1}(u_i)}{r(u_i)})^4 \leq C\nu^{2-2\eta}([u_i,u_j]) \tag{4.5}$$

si $u_i=0$,

$$E(n^{\frac{1}{2}}\frac{V_{n,1}(u_j)}{r(u_j)})^4 \leq (u_j)^{2-2\eta}(u_j)^{-2+4\delta} \leq C\nu^{2-2\eta}([0,u_j])$$

d'après l'inégalité de Markov, $\forall\eta>0$

$$P[n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_j)-V_{n,1}(u_i)| \geq \eta] \leq C\eta^{-4}\nu^{2-2\eta}([u_i,u_j]), \quad 0\leq i<j\leq i_n,$$

et d'après le lemme 1 de Balacheff et Dupont (1980), on a

$$P[\sup_{\substack{1\leq i\leq i_n \\ u_i\leq\theta}} |n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(u_i)\frac{1}{r(u_i)}| \geq \eta] \leq C\eta^{-4}\nu^{2-2\eta}(C_{2\theta}). \tag{4.6}$$

Soit $v\in[0,1]$ tel que $v\geq u_1$ et soit i tel que $u_i\leq v<u_{i+1}$, alors

$$\begin{aligned}
|n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(v)\frac{1}{r(v)}| &\leq |n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(v)\frac{1}{r(u_i)}| \\
&\leq |n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(u_i)\frac{1}{r(u_i)}|+n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_{i+1})-V_{n,1}(u_i)|\frac{1}{r(u_i)} \\
&\qquad +n^{\frac{1}{2}}((u_{i+1}-u_i)\frac{1}{r(u_i)}) \\
&\leq 2n^{\frac{1}{2}}|V_{n,1}(u_i)|\frac{1}{r(u_i)}+n^{\frac{1}{2}}\frac{r(u_{i+1})}{r(u_i)}|V_{n,1}(u_{i+1})|\frac{1}{r(u_{i+1})} \\
&\qquad +n^{\frac{1}{2}}\frac{(u_{i+1}-u_i)}{r(u_i)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

D'après (4.3)

$$n^{\frac{1}{2}}\frac{(u_{i+1}-u_i)}{r(u_i)} = 0(n^{-\alpha}), \tag{4.8}$$

de (4.6) et (4.8), on déduit

$$\sup_{\substack{v\le\theta \\ v\ge u_1^{(n)}}} |n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(v)\frac{1}{r(v)}| \le 3 \sup_{\substack{1\le i\le i_n \\ u_i\le\theta}} |n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(u_i)\frac{1}{r(u_i)}| + O(n^{-\alpha}), \tag{4.9}$$

ce qui implique

$$P\left[\sup_{\substack{v\le\theta \\ v\ge u_1^{(n)}}} |n^{\frac{1}{2}}V_{n,1}(v)\frac{1}{r(v)}| \ge \eta\right] \le C\eta^{-4}\nu^{2-2\eta}(C_{2\theta}) \tag{4.10}$$

d'autre part on a

$$P\left[\sup_{v\le u_1^{(n)}} |n^{\frac{1}{2}}\tilde{V}_{n,1}(v)\frac{1}{r(v)}| = 0\right] = 1 \tag{4.11}$$

de (4.10) et (4.11) on déduit (4.2) pour $u \le \theta$ et par symétrie, on établit (4.2) pour $u \ge 1-\theta$.
Maintenant on considère les processus modifiés $\tilde{V}_{n,\ell}$ de $V_{n,\ell}$ $(1 \le \ell \le k)$, définis par

$$\tilde{V}_{n,\ell}(u) = \begin{cases} V_{n,\ell}(u) & \text{si } n^{-1-\alpha} \le u \le 1-n^{-1-\alpha} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Lemme 4.2. *Sous les conditions du théorème 2.1,* $\forall\eta > 0$, $\exists\theta > 0$, $\exists N_0$, *tel que* $\forall n \ge N_0$

$$P[\sup_{u\in C_\theta} |n^{\frac{1}{2}}\tilde{V}_{n,\ell}(u)\frac{1}{r(u)}| \ge \eta] \le \eta, \quad \ell = 2,...,k. \tag{4.13}$$

Preuve. On considère de nouveau la suite $\{u_i^{(n)} = u_i, i = 0,...,i_n\}$ définie en (4.3) et soit $\ell = 2$ fixé.
D'après le lemme 3.1 et α satisfaisant (2.1), on déduit

$$P[\sup_{1\le\ell\le i_n} |n^{\frac{1}{2}}V_{n,2}(u_\ell)\frac{1}{r(u_\ell)}| \ge \eta] = 0(n^{-\eta}), \quad \eta > 0 \tag{4.14}$$

comme précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{v\leq\theta}|n^{\frac{1}{2}}V_{n,2}(v)| &\leq 3n^{\frac{1}{2}}\sup_{1\leq\ell\leq i_n}|V_{n,2}(u_\ell)| \\ &\quad +2n^{\frac{1}{2}}\sup_{1\leq\ell\leq i_n-1}|V_{n,1}(u_{\ell+1})-V_{n,1}(u_\ell)| \\ &\quad +2Mn^{-\delta+\alpha(\frac{1}{2}-\delta)},\end{aligned}\tag{4.15}$$

d'après (4.3) et (4.15), on déduit

$$\begin{aligned}\sup_{v\leq\theta}|n^{\frac{1}{2}}\tilde{V}_{n,2}(v)\frac{1}{r(v)}| &\leq 6n^{\frac{1}{2}}\sup_{1\leq\ell\leq i_n}|\tilde{V}_{n,2}(u_\ell)\frac{1}{r(u_\ell)}| \\ &\quad +8n^{\frac{1}{2}}\sup_{1\leq\ell\leq i_n}|\tilde{V}_{n,1}(u_\ell)\frac{1}{r(u_\ell)}|+2Mn^{-\alpha-\delta+\alpha'(\frac{1}{2}-\delta)}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

(4.13) pour $v\leq\theta$ et $\ell=2$ s'obtient alors à partir de (4.14), (4.15) et (4.16). Par symétrie, (4.13) est aussi vrai pour $v\geq 1-\theta$ et $\ell=2$, le cas $\ell\geq 3$ est identique.

Démonstration de la proposition 2.3. D'après les théorèmes 15.1 et 15.5 de Billingsley (1968), on doit montrer la convergence des projections finies de Q_n, vers une loi normale et $\forall\eta>0$, $\exists\delta>0$ et N_0 tel que $\forall n\geq N_0$

$$Q_n[f\in D[0,1],\omega(f.\cdot\frac{1}{r},\delta)\geq\eta]\leq\eta.\tag{4.17}$$

Or il suffit de montrer (4.17), puisque la première condition est une conséquence immédiate des hypothèses.

$$\begin{aligned}\omega(f\cdot\frac{1}{r},\delta) &= \sup_{|u-v|\leq\delta}|f(u)\frac{1}{r(u)}-f(v)\frac{1}{r(v)}| \\ &\leq \sup_{u\in C_{\theta-\delta}}\sup_{|u-v|\leq\delta}|f(u)\frac{1}{r(u)}-f(v)\frac{1}{r(v)}| \\ &\quad +\sup_{u\notin C_{\theta-\delta}}\sup_{|u-v|\leq\delta}|(f(u)-f(v))\frac{1}{r(u)}+f(v)(\frac{1}{r(u)}-\frac{1}{r(v)})| \\ &\leq 2\sup_{u\in C_\theta}|f(u)\frac{1}{r}(u)|+\frac{\omega(f,\delta)}{m}+\frac{\omega(r,\delta)}{m^2}\sup_{u\in[0,1]}|f(u)|\end{aligned}$$

où $m=\min_{u\notin C_{\theta-2\delta}}r(u)$.
D'où la démonstration.

5 Exemples d'applications.

Exemple 5.1 : Processus ARMA

On considére le processus $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ où

$$X_{n+1} = a_1 X_n + a_2 X_n \varepsilon_{n+1} + a_3 \varepsilon_{n+1} + a_4 \varepsilon_{n+1}^2 + a_5 \tag{5.1}$$

où les coefficients $a_1, ..., a_5$ sont des nombres réels et $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc avec une densité strictement positive. Alors si $a_1^2 + a_2^2 E(\varepsilon_1^2) < 1$ et $E(\varepsilon_1^4) < \infty$, le processus $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est géométriquement ergodique, absolument régulier avec des taux de β-mélange géométriques et on peut appliquer le théorème 2.1 à la statistique $\tilde{U}_n$ définie en (2.2).

Exemple 5.2 :

On suppose que $k \geq 2$ et on cherche à déterminer une borne supérieure de la variance de $U_n^*(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $U_n^*(t)$ est définie par :

$$U_n^*(t) = U_n(H(t)) \tag{5.2}$$

et U_n est la U-statistique définie en (1.5).
Pour cela on introduit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) &= E[I_{]-\infty,t]}(h(X_1, ..., X_k)|X_1 = x)] \\ &= P(h(x, X_2, ..., X_k) \leq t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarquons que $0 \leq \varphi_s \leq \varphi_t \leq 1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ avec $s \leq t$

$$E(\varphi_t(X_i)) = H(t).$$

Soit

$$D(t) = E\varphi_t^2(X_i)$$

par définition

$$U_n^*(t) = n^{\frac{1}{2}}(H_n(t) - H(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

et d'après (3.6) et (3.7), on peut écrire :

$$\begin{aligned} U_n^*(t) &= V_n(H(t)) + n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(t) - H(t)) \\ &= n^{\frac{1}{2}}\{\sum_{\ell=1}^{k} \binom{\ell}{k} V_{n,\ell}(H(t))\} + n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(t) - H(t)) \\ &= kn^{\frac{1}{2}} V_{n,1}(H(t)) + R_n(t) \end{aligned}$$

où

$$R_n(t) = n^{\frac{1}{2}}\{\sum_{\ell=2}^{k} \binom{\ell}{k} V_{n,\ell}(H(t))\} + n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(t) - H(t)).$$

D'après les lemmes 3.3 et 3.4 on a : R_n converge vers 0 en probabilité. D'où

$$Var(U_n^*(t)) \equiv Var(kn^{\frac{1}{2}} V_{n,1}(H(t))) \leq k^2 E\varphi_t^2(X_i) = k^2 D(t)$$

On détermine maintenant les expressions de $\varphi_t, D(t)$ et $H(t)$ dans chacun des cas particuliers suivants :

1. 5.2.1 Si $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi_t(x) = F(t - x)$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t - x) dF(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - x) dF(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

2. 5.2.2 Si $h(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi_t(x) = F(x + t) - F(x - t)$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{F(x + t) - F(x - t)\}^2 dF(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{F(x + t) - F(x - t)\} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

3. 5.2.3 Si $h(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, on a

$$\varphi_t(x) = F(tx^{-1})$$

$$D(t) = \int_{0}^{+\infty} F^2(tx^{-1}) dF(x), \quad t > 0$$

$$H(t) = \int_{0}^{+\infty} F(tx^{-1}) dF(x), \quad t > 0$$

4. 5.2.4 Si $h(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi_t(x) = I_{]-\infty, t]}(x) F(t)$$

$$D(t) = F^3(t)$$

$$H(t) = F^2(t)$$

5. 5.2.5 Si $h(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi_t(x) = I_{]-\infty, t]}(x) + I_{]t, +\infty]}(x) F(t)$$

$$D(t) = F(t) + F^2(t) - F^3(t)$$

$$H(t) = 2F(t) - F^2(t)$$

References

[1] Arcones M.A., Yu B. (1994). Central limit theorems for empirical and U-processes of stationary mixing sequences. *Journal of Theori. Proba., 7*, 1, 47-71.

[2] Balacheff S., Dupont G. (1980). Normalité asymptotique des processus empiriques tronqués et des processus de rang. *Lecture notes in Mathematics,* **821**. Springer, Berlin.

[3] Billingsley P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.

[4] Doukhan P., Portal F. (1983). Moments de variables aléatoires mélangeantes. *C. R. Acad. Sc. Paris, 297*, 129-132.

[5] Einmahl J.H.J., Ruymgaart F.H., Wellner J.A. (1988). A characterization of weak convergence of weighted multivariate empirical processes. *Acta Sci. Math. 52*, 191-205.

[6] Harel M., Puri, Madan L. (1989a). Limiting behavior of U-statistics, V-statistics and one-sample rank order statistics for non-stationary absolutely regular processes. *Journal of Multivariate Analysis,* **30**, 181-204.

[7] Harel M., Puri, Madan L. (1989b). Weak convergence of the U-statistic and weak invariance of the one-sample rank order statistic for Markov processes and ARMA models. *Journal of Multivariate Analysis,* **31**, 259-265.

[8] Harel M., Puri, Madan L. (1990). Weak invariance of generalized U-statistics for nonstationary absolutely regular processes. *Stochastic Processes and Their Applications,* **34**, 341-360.

[9] Harel M., Puri, Madan L. (1994). Weak convergence of weighted empirical U-statistics processes for dependent random variables. *Journal of Multivariate Analysis.* **48**, 297-314.

[10] Parzen E. (1962). On the estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statisti.*, **33**, 1065-1070.

[11] Rosenblatt M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* **27**, 832-837.

[12] Ruymgaart F.H., van Zuijlen, M.C.A. (1992). Empirical U-statistics processes. *J. Statist. Plann. Inference.*, **32**, 259-269.

[13] Withers C.S. (1975). Convergence of empirical processes of mixing r.v's on [0,1]. *Ann. Stat.,* **3**, 1101-1108.

[14] Yoshihara K. (1976). Limiting behavior of U-statistics for stationary absolutely regular processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete,* **35**, 237-252.

IUFM du Limousin et URA D O745, CNRS Toulouse, FRANCE,
Michel.HAREL@unilim.fr, RAGBI@unilim.fr