Remarques sur les $k((X))$-algèbres de Banach.

Bertin Diarra

Dédié à la mémoire de J.B. COFFI N'KETSIA

Abstract

Let k be a field and K = k((X)) be the field of formal Laurent series over k. Let A be an ultrametric Banach K-algebra; taking appropriated equivalent norm on A, we show that A is obtained by a deformation of the residual k-algebra of A for this norm; given a deformation of a k-algebra, the reverse construction is obvious. The same facts remain true for ultrametric complete Hopf algebras over K. One can prove similar results for ultrametric Banach Lie algebras over K.....

INTRODUCTION

Soit K un corps de valuation discrète complet, de même caractéristique que son corps résiduel k. On sait que K est isomorphe, donc peut s'identifier, au corps des séries formelles de Laurent $k((X))$.

Soit A un K-espace de Banach ultramétrique tel que $\|A\| \subset |K|$. Considérons A_0 (resp. A_1) la boule unité "fermée" (resp."ouverte") de A; alors A contient un sous k-espace vectoriel discret R isomorphe à A_0/A_1 et A est isométriquement isomorphe à l'espace $R((X))$ des séries de Laurent à coefficients dans R. Si de plus A est une algèbre de Banach unitaire, alors A_0 est une sous-k-algèbre de A et A_1 est un idéal bilatère de A_0. Ainsi A_0/A_1 est une k-algèbre unitaire et par transport de structure, on a une structure de k-algèbre sur R. Nous allons montrer que la théorie

Received by the editors May 1994
Communicated by J. Van Geel
AMS Mathematics Subject Classification : 12 J 25, 13 J 05, 16 S 80, 46 H 99, 46 S 10.
Keywords : Formal Laurent series, Banach algebras, deformation of algebras.

des algèbres de Banach unitaires sur K est équivalente à la théorie des déformations de k-algèbres unitaires.

1 Espaces de Banach sur $k((X))$

1.1 Bases orthogonales

Soit K un corps de valuation discrète complet, d'uniformisante π.
Si $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ est la valuation de K, on a sur K la valeur absolue $|a| = |\pi|^{\nu(a)}$, $|\pi| < 1$ et $|K^*| = \{|\pi|^n, n \in \mathbb{Z}\}$. On désigne par $\Lambda = \{a \in K/|a| \leq 1\}$ $(resp\mathcal{M} = \pi\Lambda)$ l'anneau de valuation de K(resp. l'idéal maximal de Λ) et on pose $k = \Lambda/\mathcal{M}$ le corps résiduel de K.

Soit E un K-espace de Banach ultramétrique de norme $\|\ \|$. Posons pour $x \in E$, $|||x||| = Inf\ \{\ |\pi\ |^n\ /\ \|\ x\ \|\ \leq\ |\pi\ |^n,\ \ n \in \mathbb{Z}\}$. On obtient ainsi sur E une norme ultramétrique telle que $|||E||| \subset |K|$ et $|\pi|\ |||x||| < \|x\| \leq |||x|||$.

Remarque 1 :

(i) *Les normes $\|\ \|$ et $|||\ |||$ sont égales lorsque $\|E\| \subset |K|$*

(ii) *Si l'on désigne par B^+ les boules fermées, on a $B^+_{\|\ \|}(0, |\pi|^n) = B^+_{|||\ |||}(0, |\pi|^n)$, $n \in \mathbb{Z}$*

Soient $E_0 = \{x \in E/|||x||| \leq 1\}$ et $E_1 = \{x \in E/|||x||| < 1\}$, on a $E_1 = \pi E_0$; E_0 est un Λ-module et $W = E_0/E_1$ est un k-espace vectoriel . Le Lemme suivant est bien connu (cf. par exemple [1],[4] ou [6]).

Lemme 1 : *Soit $(\epsilon_j)_{j\in I}$ une base du k-espace vectoriel $W = E_0/E_1$. Considérons $(e_j)_{j\in I} \subset E$ telle que $\overline{e}_j = \epsilon_j, j \in I$.*

Alors tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{j\in I} \lambda_j e_j, \lambda_j \in K, \lim_j \lambda_j = 0$ et $|||x||| = \operatorname{Sup}_{j\in I} |\lambda_j|$. En particulier $|\pi| Sup|\lambda_j| < \|x\| \leq Sup|\lambda_j|$

Démonstration

Soit $x \in E, x \neq 0$; on a $|||x||| = |\pi|^n$, donc $|||\pi^{-n}x||| = 1$. On peut alors supposer $x \in E_0$ avec $|||x||| = 1$. Ainsi, dans W, on a $\overline{x} = \sum_{j_0\in J_0} \overline{\lambda}_{j_0}\epsilon_{j_0}$ avec $\lambda_{j_0} \in \Lambda$. Posons $x_0 = \sum_{j_0\in J_0} \lambda_{j_0} e_{j_0}$ on a $\overline{x} = \overline{x}_0$ et $|||x||| = 1 = |||x_0||| = \max_{j_0\in J_0} |\lambda_{j_0}|$. Ou bien $x = x_0$, ou bien $|||x - x_0||| = |\pi|^{n_1}$, $n_1 \geq 1$, c'est-à-dire $x = x_0 + \pi^{n_1}\ x_1$ avec $|||x_1||| = 1$. Par récurrrence, on obtient $x = \sum_{\nu=0}^{q} \pi^{n_\nu} x_\nu + \pi^{n_{q+1}}\ x_{q+1}$ avec pour

$0 \leq \nu \leq q$, $x_\nu = \sum_{j_\nu \in J_\nu} \lambda_{j_\nu} e_{j_\nu}, \lambda_{j\nu} \in \Lambda$ et J_ν fini; $n_0 = 0$, $n_\nu < n_{\nu+1}$. Il vient que $x = \sum_{\nu \geq 0} \pi^{n_\nu} x_\nu$. On en déduit aussitôt que $x = \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_\nu \in J_\nu} \pi^{n_\nu} \lambda_{j_\nu} e_{j_\nu} = \sum_{j \in I} \lambda_j e_j$ avec $\lim_j \lambda_j = 0$ et $|||x||| = 1 = \operatorname{Sup}_{j \in I} |\lambda_j|$.

Appliquant le Lemme 1 au cas où $K = k((X))$ est le corps des séries formelles de Laurent à coefficients dans le corps k et où E est un $k((X))$-espace de Banach ultramétrique, on voit que le sous-k-espace vectoriel V de E engengré par $(e_j)_{j \in I}$ est isomorphe à $W = E_0/E_1$. De plus tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{n \geq n_0} X^n \cdot v_n, n_0 \in \mathbb{Z}, v_n \in V$ et $E_0 = \{x = \sum_{n \geq 0} X^n \cdot v_n, v_n \in V\}$.

Réciproquement, soit V un k-espace vectoriel. Posons $V((X)) = \{y = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset V / \ \exists n_\circ \in \mathbb{Z}$ et $v_n = 0$, pour $n < n_\circ\}$. C'est un k-espace vectoriel. Si l'on pose pour $y \in V((X))$, $ord(y) = Inf\{n \in \mathbb{Z}/v_n \neq 0\}$ et $|y| = |X|^{ord(y)}$, on a $|y_1 + y_2| \leq max(|y_1|, |y_2|)$ et $|\lambda y| = |y|$ pour $\lambda \in k, \lambda \neq 0$. On voit que $V((X))$ est un groupe topologique complet et $V_0((X)) = \{y = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}},\ v_n = 0, \forall n \leq -1\}$ est un sous k-espace vectoriel fermé de $V((X))$. Posons pour $a = \sum_{j \geq 0} \lambda_j X^j \in \Lambda = k[[X]]$ et $y = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V_0((X)), a \cdot y = ((a \cdot y)_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $(a \cdot y)_n = 0$ si $n \leq -1$ et $(a \cdot y)_n = \sum_{p+q=n} \lambda_p v_q$ si $n \geq 0$. On vérifie aussitôt que $V_0((X))$ est un Λ-module; de plus $|a \cdot y| = |a|\ |y|$. Considérons pour $m \in \mathbb{Z}$ et $y \in V_0((X))$, $X^m \cdot y = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V((X))$ où $w_n = 0$ si $n < m$ et $w_n = v_{n-m}$ si $n \geq m$; on a $ord(X^m \cdot y) = \nu(X^m) + ord(y) = m + ord(y)$. Alors si $y = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V((X))$ avec $ord(y) = n_0$, posant $y_0 = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $w_n = 0$ si $n \leq -1$ et $w_n = v_{n_0+n}$, si $n \geq 0$, on obtient $y = X^{n_0} \cdot y_0$ avec $y_0 \in V_0((X))$.

On définit donc sur $V((X))$ une structure de $k((X))$-espace vectoriel en posant, pour $a = X^{m_0} a_0, a_0 \in \Lambda$, $y = X^{n_0} \cdot y_0 \in V((X)), y_0 \in V_0((X)), a \cdot y = X^{m_0+n_0} \cdot (a_0 \cdot y_0)$. De plus $|a \cdot y| = |a|\ |y|$; c'est-à-dire $V((X))$ est un $k((X))$-espace de Banach. Soit $y = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V((X))$ d'ordre $ord(y) = n_0$ on a $y = \sum_{q=n_0}^{m} (\delta_{nq} v_q)_{n \in \mathbb{Z}} + y_m$ où $y_m = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}, w_n = 0$ si $n \leq m$ et $w_n = v_n$ si $n \geq m+1$. On a $|y_m| \leq |X|^{m+1}$ et $y = \sum_{q \geq n_0} (\delta_{nq} v_q)_{n \in \mathbb{Z}}$. Identifiant $v \in V$ à $j(v) = (\delta_{0n} v)_{n \in \mathbb{Z}}$, on voit que $(\delta_{nq} v_q)_{n \in \mathbb{Z}} = X^q \cdot v_q$, d'où $y = \sum_{q \geq n_0} X^q \cdot v_q$, ce qui justifie l'écriture $V((X))$. On a :

Théorème 1 : *Soit E un $k((X))-$espace de Banach ultramétrique. Il existe un sous-k-espace vectoriel discret V de E tel que les $k((X))$-espaces de Banach E et $V((X))$ sont isomorphes*

En fait $(E, |||\ |||)$ s'identifie à $(V((X)), |\ |)$; E_0 à $V_0((X)) = V[[X]]$ et E_1 à $X \cdot V[[X]]$.

1.2 Produits tensoriels topologiques. Applications linéaires continues

Rappelons que si E et F sont deux K-espaces de Banach ultramétriques, alors leur produit tensoriel topologique $E\widehat{\otimes}F$ est le complété du produit tensoriel $E \otimes F$ muni de la norme tensorielle $\|z\| = \operatorname*{Inf}_{\sum x_1 \otimes y_i = z} \max_i \|x_i\| \; \|y_i\|$. Soient $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ deux normes équivalentes sur E (resp. F). Les normes tensorielles $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ correspondantes sur $E \otimes F$ sont équivalentes et donnent le même espace complété $E\widehat{\otimes}F$; leurs prolongements à $E\widehat{\otimes}F$ sont équivalentes.

Théorème 2 : *Soient E et F deux $k((X))$-espaces de Banach ultramétriques. Soit V (resp. W) un sous-k-espace vectoriel discret de E (resp. F) tel que $(E, ||| \ |||)$ [resp.$(F, ||| \ |||)$] s'identifie à $V((X))$ [resp.$W((X))$].*

Alors $E\widehat{\otimes}F$ est isomorphe à $(V \otimes_k W)((X))$.

Démonstration : Soit $(e_j)_{j\in J}$ une base du k-espace vectoriel V. Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j, \lambda_j \in k((X)), \lim_j \lambda_j = 0$, avec $|||x||| = \operatorname*{Sup}_{j\in J} |\lambda_j|$; c'est-à-dire $(e_j)_{j\in J}$ est une base orthonormale de $(E, ||| \ |||)$.

Soit $(f_\ell)_{\ell\in L}$ une k-base de W. Alors $(e_j \otimes f_\ell)_{(j,\ell)\in J\times L}$ est une base orthonormale de l'espace de Banach $E\widehat{\otimes}F$ muni de la norme produit tensoriel des $||| \ |||$ (cf. [4]). Ainsi
$(e_j \otimes f_\ell)_{(j,\ell)\in J\times L}$ est $k((X))$-libre et donc k-libre. On en déduit aussitôt que
$(e_j \otimes f_\ell)_{(j,\ell)\in J\times L}$ est une k-base de $V \otimes_k W$; de plus $V \otimes_k W$ est un sous-k-espace vectoriel discret de $E\widehat{\otimes}F$.

Soit $z \in E\widehat{\otimes}F$, on a $z = \sum_{j,\ell} \lambda_{j\ell} e_j \otimes f_\ell, \ \lambda_{j\ell} \in k((X)), \ \lim_{j,\ell} \lambda_{j\ell} = 0$ avec $|||z||| = \operatorname*{Sup}_{j,\ell} |\lambda_{j\ell}|$. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ fini, $N_\epsilon \subset J \times L$ tel que
$|||z - \sum_{(j,\ell) \in N_\epsilon} \lambda_{j\ell} \ e_j \ \otimes \ f_\ell \ ||| \ \leq \ \epsilon$. Posons $n_\epsilon = \min_{(j,\ell)\in N_\epsilon} \nu(\lambda_{j\ell})$; pour tout $(j, \ell) \in N_\epsilon$, on a $\lambda_{j\ell} = \sum_{n\geq n_\epsilon} \alpha_{j\ell}(n)X^n$, avec $\alpha_{j\ell}(n) \in k$. D'où $z_\epsilon = \sum_{(j,\ell)\in N_\epsilon} \lambda_{j\ell} e_j \otimes f_\ell = \sum_{(j,\ell)\in N_\epsilon} \sum_{n\geq n\epsilon} \alpha_{j\ell}(n)X^n \ e_j \otimes f_\ell = \sum_{n\geq n_\epsilon} X^n \cdot w_n$ où $w_n = \sum_{(j,\ell)\in N_\epsilon} \alpha_{j\ell}(n) e_j \otimes f_\ell \in V \otimes_k W$.
Il vient que $E\widehat{\otimes}F$ est l'adhérence du sous-$k((X))$-espace vectoriel

$$G = \Big\{ \sum_{n\geq n_0} X_n \cdot w_n, n_0 \in \mathbb{Z}, w_n \in V \otimes_k W \Big\}.$$

Mais $(G, ||| \ |||)$ est isométriquement isomorphe à $(V \otimes_k W)((X))$; ainsi G, complet, est un sous-espace fermé de $E\widehat{\otimes}F$. Il vient que $E\widehat{\otimes}F = G$ est isomorphe à $(V \otimes_k W)((X))$.

Remarque 2 :

(i) *Le* $k[[X]]$*-module* $(E\widehat{\otimes}F)_0 = \{z \in E\widehat{\otimes}F / |||z||| \leq 1\}$ *s'identifie à* $(V \otimes_k W)[[X]]$.

(ii) *Posons* $\Lambda = k[[X]]$. *Le* Λ*-module produit tensoriel* $E_0 \otimes_\Lambda F_0$ *s'identifie à un sous-*Λ*-module de* $(E\widehat{\otimes}F)_0$ *d'adhérence* $E_0 \overline{\otimes}_\Lambda F_0$ *égale à* $(E\widehat{\otimes}F)_0$.

Soient E et F deux K-espaces de Banach ultramétriques. L'espace de Banach $\mathcal{L}(E,F)$, formé des applications K-linéaires continues $\varphi : E \to F$, est indépendant des normes équivalentes choisies sur E et F. Lorsque $K = k((X))$, identifions $(E, |||\ |||)$ à $V((X))$ et $(F, |||\ |||)$ à $W((X))$.

Théorème 3 : *Soient E et F deux $k((X))$-espaces de Banach ultramétriques. Alors*

(i) $\mathcal{L}(E,F)$ *est isomorphe à* $Hom_k(V,W)((X))$. *En particulier le dual topologique* E' *de* E *est isomorphe à* $V^*((X))$ *où* V^* *est le dual de* V.

(ii) *L'algèbre de Banach* $\mathcal{L}(E)$ *est isomorphe à l'algèbre des séries formelles de Laurent à coeffficients dans* $End_k(V)$.

(i) Considérons $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$; par définition, on a $|||\varphi||| = \operatorname{Sup}_{x\neq 0} \dfrac{|||\varphi(x)|||}{|||x|||} \in |K|$.
Supposons $\varphi \neq 0$; on a $|||\varphi||| = |X|^{n_0},\ n_0 \in \mathbb{Z}$. Puisque $V \subset E_0$, on a pour tout $v \in V,\ |||\varphi(v)||| \leq |||\varphi|||\ |||v||| \leq |X|^{n_0}$, donc $\varphi(v) \in X^{n_0} \cdot F_0 = \{\sum_{n\geq n_0} X^n \cdot w_n,\ w_n \in W\}$

et $\varphi(v) = \sum_{n\geq n_0} X^n \cdot \varphi_n(v)$ avec $\varphi_n(v) \in W,\ n \geq n_0$. Puisque φ est $k((X))$-linéaire, les applications $\varphi_n : V \to W$ sont k-linéaires.

Soit $x = \sum_{m\geq m_0} X^m \cdot v_m \in E$; on a $\varphi(x) = \sum_{m\geq m_0} X^m \cdot \varphi(v_m) =$

$= \sum_{m\geq m_0} X^m \cdot \sum_{n\geq n_0} X^n \cdot \varphi_n(v_m) = \sum_{n\geq n_0+m_0} X^n \cdot \sum_{p+q=n} \varphi_p(v_q)$ (on pose $\varphi_n = 0$ si $n < n_0$).

Il vient que φ est uniquement déterminé par la famille $(\varphi_n)_{n\geq n_0} \subset Hom_k(V,W)$. D'où l'isomorphisme d'espaces de Banach $\varphi \to \sum_{n\geq n_0} X^n \cdot \varphi_n = \widetilde{\varphi}$ de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $Hom_k(V,W)\ ((X))$.

(ii) Soit G un troisième espace de Banach avec $(G, |||\ |||) = U((X))$. Considérons $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications linéaires continues. Pour tout $v \in V$ on a $\psi \circ \varphi(v) = \sum_{n\geq n_0} X^n \cdot \psi(\varphi_m(v)) = \sum_{n\geq n_0} X^n \cdot \sum_{m\geq m_0} X^m \cdot \psi_m(\varphi_n(v)) =$

$= \sum_{n\geq n_0+m_0} X^n \cdot \sum_{p+q=n} \psi_p \circ \varphi_q(v)$. Ainsi, il correspond à $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E,G)$ l'élément $\sum_{n\geq n_0+m_0} X^n \cdot \sum_{p+q=n} \psi_p \circ \varphi_q$ de $Hom_k(V,U)((X))$.

En particulier si $E = F = G$; $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi \to \sum_{n \geq n_0} X^n \cdot \varphi_n = \widetilde{\varphi}$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $End_k(V)((X))$ est telle que $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \sum_{n \geq n_0 + m_0} X^n \cdot \sum_{p+q=n} \psi_p \circ \varphi_q = \widetilde{\psi} \cdot \widetilde{\varphi}$, ce dernier terme étant le produit de Cauchy de $\widetilde{\psi}$ et $\widetilde{\varphi}$ dans $End_k(V)((X))$.

N.B.

(i) $\widetilde{1}_E = \sum_{n \geq 0} X^n \cdot \delta_{0n} 1_V$.

(ii) $End_k(V)$ *s'identifie à une sous-k-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 1 : *Soit* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$; $|||\varphi||| = |X|^{n_0}, n_0 \in \mathbb{Z}$ *d'image* $\widetilde{\varphi} = \sum_{n \geq n_0} X^n \cdot \varphi_n$ *dans* $End_k(V)((X))$.

Alors φ *est un automorphisme de* E *tel que* $|||\varphi^{-1}||| = |X|^{-n_0}$ *si et seulement si* φ_{n_0} *est un automorphisme de* V. *En particulier,* φ *est un automorphisme isométrique de* E *si et seulement si* φ_0 *est un automorphisme de* V.

Corollaire 2 : *Soient* $\varphi : E \to F$ *et* $\psi : E_1 \to F_1$ *deux morphismes de* $k((X))$*-espaces de Banach.*

Alors $\varphi \otimes \psi : E \widehat{\otimes} F \to E_1 \widehat{\otimes} F_1$ *s'identifie à* $\sum_{n \geq n_0 + m_0} X^n \cdot \sum_{p+q=n} \varphi_p \otimes \psi_q$*; c'est-à-dire, pour* $n \geq n_0 + m_0$*, on a* $(\varphi \otimes \psi)_n = \sum_{p+q=n} \varphi_p \otimes \psi_q$.

2 $k((X))-$Algbres de Banach

Soit A une algèbre de Banach unitaire ultramétrique sur le corps de valuation discrète complet K. Soit pour $a \in A$, $|||a||| = Inf\{|\pi|^n / \|a\| \leq |\pi|^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ où π est une uniformisante de K et $\| \ \|$ la norme initiale de A. On vérifie aussitôt que $||| \ |||$ satisfait à $|||a\, b||| \leq |||a|||\ |||b|||$ et $|||e||| = 1$, e l'unité de A. Ainsi $A_0 = \{a \in A / |||a||| \leq 1\}$ est une Λ-algèbre où Λ est l'anneau de valuation de K; $A_1 = \{a \in A / |||a||| < 1\} = \pi A_0$ est un idéal bilatère de A_0 et A_0/A_1 est une k-algèbre unitaire (k le corps résiduel de K). Soit $m : A \widehat{\otimes} A \to A$ la multiplication de A, on a $|||m||| = 1$.

Dans le cas où $K = k((X))$, l'espace de Banach $(A, ||| \ |||)$ s'identifie à $(R((X)), | \ |)$ où R est un sous-k-espace vectoriel discret de A isomorphe à A_0/A_1. Alors identifiant $A \widehat{\otimes} A$ à $(R \otimes_k R)((X))$, la multiplication de A s'écrit $m = \sum_{n \geq 0} X^n \cdot \mu_n$ où $\mu_n : R \otimes_k R \to R$ est k-linéaire. L'unité de A est donnée par l'application $k((X))$-linéaire $\ell = \sum_{n \geq 0} X^n \cdot \ell_n : k((X)) \to R((X))$; c'est-à-dire $e = \ell(1) = \sum_{n \geq 0} X^n \cdot \ell_n(1)$ où $\ell_n : k \to R$ est k-linéaire.

Théorème 4 : *Soit A une $k((X))$-algèbre de Banach ultramétrique unitaire.*

(i) *Il existe un sous-k-espace vectoriel R de A tel que A est isomorphe à l'algèbre de Banach unitaire $R((X))$ de multiplication $m = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \mu_n$ et d'unité définie par $\ell = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \ell_n$ où $\mu_n : R \otimes_k R \to R,\ n \geq 0$ et $\ell_n : k \to R,\ n \geq 0$, sont k-linéaires. C'est-à-dire :*

(1) $$\sum_{p+q=n} \mu_p \circ (\mu_q \otimes 1_R) = \sum_{p+q=n} \mu_p \circ (1_R \otimes \mu_q),\ n \geq 0$$

(2) $$\sum_{p+q=n} \mu_p \circ (\ell_q \otimes 1_R) = \delta_{0n} \cdot 1_R = \sum_{p+q=n} \mu_p \circ (1_R \otimes \ell_q),\ n \geq 0$$

En particulier, R est une k-algèbre unitaire, de multiplication μ_0 et d'unité $e_0 = \ell_0(1)$.

(ii) *Réciproquement, si R est une k-algèbre unitaire de multiplication μ_0 et d'unité $e_0 = \ell_0(1)$ et si $\mu_n : R \otimes_k R \to R,\ \ell_n : k \to R,\ n \geq 0$, sont des applications k-linéaires qui vérifient (1) et (2); alors $R((X))$ devient une $k((X))$-algèbre de Banach unitaire de multiplication $m = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \mu_n$ et d'unité $\ell(1) = e$ où $\ell = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \ell_n$.*

En effet, les morphismes de structure $m : A\widehat{\otimes} A \to A$ et $\ell : k((X)) \to A$ de la $k((X))$-algèbre de Banach unitaire A sont tels que $\|m\| = 1,\ \|\ell\| = 1;\ m\circ(m\otimes 1_A) = m\circ(1_A\otimes m)$ et $m\circ(\ell\otimes 1_A) = 1_A = m\circ(1_A\otimes\ell)$. Ainsi, identifiant A à $R((X))$, on a $m\circ(m\otimes 1_A) = \sum_{n\geq 0} X^n\cdot\mu_n\circ\Big(\sum_{q\geq 0} X^q\cdot\mu_q\otimes\sum_{s\geq 0} X^s\cdot\delta_{0s}1_R\Big) = \sum_{n\geq 0} X^n\cdot\mu_n\circ\Big(\sum_{q\geq 0} X^q\cdot(\mu_q\otimes 1_R)\Big) = \sum_{n\geq 0} X^n\cdot\sum_{p+q=n}\mu_p\circ(\mu_q\otimes 1_R) = m\circ(1_A\otimes m) = \sum_{n\geq 0} X^n\cdot\sum_{p+q=n}\mu_p\circ(1_R\otimes\mu_q)$; d'où (1).

On vérifie de la même manière (2) .

Remarquons que l'on peut choisir R de telle sorte que l'unité de A est dans R; c'est-à-dire $\ell = \sum_{n\geq 0} X^n\cdot\delta_{0n}\ell_0$.

N.B. *Le relations (1) et (2) sont équivalentes respectivement à :* $\forall a, b, c \in R$,

(1') $$\sum_{p+q=n} \mu_p(\mu_q(a\otimes b)\otimes c) = \sum_{p+q=n} \mu_p(a\otimes\mu_q(b\otimes c)),\ n\geq 0$$

(2') $$\sum_{p+q=n} \mu_p(\ell_q(1)\otimes a) = \delta_{0n}\cdot a = \sum_{p+q=n} \mu_p(a\otimes\ell_q(1)),\ n\geq 0$$

En particulier pour $n = 1$ et posant $a\cdot b = \mu_0(a\otimes b)$ la multiplication de la k-algèbre R, on a $\mu_1(a\otimes b)\cdot c + \mu_1((a\otimes b)\otimes c) = a\cdot\mu_1(b\otimes c) + \mu_1(a\otimes(b\cdot c))$ ou encore $a\cdot\mu_1(b\otimes c) - \mu_1((a\cdot b)\otimes c) + \mu_1(a\otimes(b\cdot c)) - \mu_1(a\otimes b)\cdot c = 0$, c'est-à-dire μ_1 est un 2-cocycle de la k-algèbre R.

Remarque 3 : *Soit $(e_j)_{j\in I}$ une base orthogonale du $k((X))$-espace de Banach sous-jacent à l'algèbre de Banach A : tout $a \in A$ s'écrit de façon unique $a = \sum_{j\in I} a_j e_j, a_j \in k((X)),\ \lim_j |a_j| = 0,\ |||a||| = \operatorname{Sup}_{j\in I} |a_j|$. On a $m(e_i \otimes e_j) = \sum_{\ell\in I} a_{ij}^{\ell} e_\ell,\ |||m(e_i \otimes e_j)||| = \operatorname{Sup}_{\ell\in I} |a_{ij}^{\ell}| \leq 1,\ i, j \in I$. Posons $R = \bigoplus_{j\in I} k \cdot e_j$, on a $A_0 = R \oplus A_1$. La multiplication $m = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \mu_n$ de A est telle que les $\mu_n = R \otimes_k R \to R$ sont uniquement déterminées par $\mu_n(e_i \otimes e_j) = \sum_{\ell\in I} \alpha_{ij}^{\ell}(n) e_\ell,\ \alpha_{ij}^{\ell}(n) \in k,\ J_{ij}(n) = \{\ell \in I / \alpha_{ij}^{\ell}(n) \neq 0\}$ étant fini; et l'on a $a_{ij}^{\ell} = \sum_{n\geq 0} \alpha_{ij}^{\ell}(n) X^n$.*

Rappelons que (R, μ_0, ℓ_0) étant une k-algèbre unitaire, la donnée d'applications k-linéaires $\mu_n : R \otimes_k R \to R;\ \ell_n : k \to R,\ n \geq 1$, qui satisfont aux relations (1') et (2') définit ce que l'on appelle une *déformation* de l'algèbre R (cf. [3]).

On peut donc énoncer :

Corollaire 1 : *La catégorie des $k((X))$-algèbres de Banach ultramétriques unitaires (les morphismes étant les homomorphismes d'algèbres de Banach de norme ≤ 1) est en correspondance bijective avec la catégorie des déformations des k-algèbres unitaires.*

Corollaire 2 : *Le sous-k-espace vectoriel R de A isomorphe à A_0/A_1 est une sous-k-algèbre unitaire de A si et seulement si A s'identifie à l'algèbre des séries formelles de Laurent à coefficients dans R.*

En effet, on a $m = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \mu_n,\ \mu_n : R \otimes_k R \to R,\ n \geq 0$. Alors R est une sous-k-algèbre de A si et seulement si, pour tous $a, b, c \in R,\ m(a \otimes b) = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \mu_n(a \otimes b) \in R$; c'est-à-dire $m(a \otimes b) = \mu_0(a \otimes b)$ et $\mu_n(a \otimes b) = 0,\ n \geq 1$, ou encore $m = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \delta_{0n}\mu_0$. Le même raisonnement conduit à $\ell = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \delta_{0n}\ell_0$. Tout ceci équivaut à dire que A s'identifie à l'algèbre des séries formelles de Laurent à coefficients dans R.

Exemples :

a) Théorème 3. (ii)

b) Soit Ω un espace compact totalement discontinu et soit l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(\Omega, k((X)))$ des fonctions continues de Ω dans $k((X))$. Alors $\mathcal{C}(\Omega, k((X)))$ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles de Laurent à coefficients dans la k-algèbre $Loc(\Omega, k)$ formée des fonctions localement constantes de Ω dans k.

c) Soit G un groupe

Rappelons (c.f. par exemple [2]) que l'algèbre des fonctions presque périodiques

$AP(G, k((X)))$ est l'algèbre formée des fonctions $f : G \to k((X))$ telles que $(\gamma_{sf})_{s\in G}$ est un compactoïde de l'espace des fonctions bornées, $\gamma_s f(t) = f(s^{-1}t)$. Soit $R(G, k)$ la k-algèbre formée des fonctions représentatives $g : G \to k$, c'est-à-dire $(\gamma_s g)_{s\in G}$ engendre un k-espace vectoriel de dimension finie.

Alors $AP(G, k((X)))$ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles de Laurent à coefficients dans $R(G, k)$.

En fait, pour tout ensemble Ω, toute sous-$k((X))$-algèbre de Banach de l'algèbre des fonctions bornées de Ω à valeurs dans $k((X))$ est isomorphe à une algèbre de séries de Laurent à coefficients dans une k-algèbre convenable de fonctions de Ω à valeurs dans k.

N.B. : En général, les structures des algèbres A et R, bien qu'étroitement liées, ont des propriétés très différentes.

Exemple 1 :

Considérons $A = k((X^{\frac{1}{q}}))$, $q \geq 2$; c'est un corps, extension finie totalement ramifiée de $k((X))$. Soit ν la valuation de A qui prolonge celle de $k((X))$. On a pour tout $a \in A$, $|a| = |X|^{\nu(a)}$, $\nu(a) \in \frac{1}{q}\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Ainsi $|||a||| = |X|^{[\nu(a)]}$ où $[\nu(a)]$ est la partie entière de $\nu(a)$. Il vient que $A_0 = k[[X^{\frac{1}{q}}]]$; $A_1 = X \cdot k[[X^{\frac{1}{q}}]]$ et $A_0/A_1 = k[\xi]$ où $\xi^q = 0$. On en déduit aussitôt que l'on peut prendre $R = \bigoplus_{j=0}^{q-1} k \cdot X^{\frac{j}{q}}$.

Posons $Y = X^{\frac{1}{q}}$; si $m = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \mu_n$ est la multiplication de A, les $\mu_n : R \otimes_k R \to R$ sont telles que : $\mu_n(Y^i \otimes Y^j) = 0$ pour $n \geq 2$, $0 \leq i, j \leq q-1$; $\mu_0(Y^i \otimes Y^j) = Y^{i+j}$ et $\mu_1(Y^i \otimes Y^j) = 0$ lorsque $i + j \leq q - 1$; enfin $\mu_0(Y^i \otimes Y^j) = 0$ et $\mu_1(Y^i \otimes Y^i) = Y^{i+j-q}$ lorsque $q \leq i + j \leq 2q - 2$.

En résumé, tout élément a du corps $k((X^{\frac{1}{q}}))$ admet une unique écriture de la forme $a = \sum_{n\geq n_0} X^n \cdot a_n$, $a_n \in R$ tandis que la k-algèbre $(R, \mu_0) \simeq k[\xi]$, $\xi^q = 0$, est une k-algèbre locale d'idéal maximal nilpotent non nul.

Exemple 2 : Ici $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbf{F}_q, q = p^n, p$ premier ≥ 3; alors $k^*/k^{*2} = \{1, \sigma\}$, $\sigma \notin k^{*2}$.

Considérons l'algèbre de quaternions $B = \left(\begin{matrix} \sigma & X \\ k((X)) & \end{matrix}\right)$; par définition B est la $k((X))$-algèbre unitaire d'unité $e = e_0$, engendrée par les e_1 et e_2 satisfaisant aux relations $e_1^2 = \sigma e_0$, $e_2^2 = X e_0$ et $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$. Alors (e_0, e_1, e_2, e_3) est une base du $k((X))$-espace vectoriel B. Soit $a = a_0 e_0 + \sum_{j=1}^{3} a_j e_j \in B$, $a_j \in k((X))$; rappelons que $\widetilde{a} = a_0e_0 - \sum_{j=1}^{3} a_je_j,\ N(a) = a\widetilde{a}$. Alors $N(a) = N(\widetilde{a}) = a_\circ^2 - \sigma a_1^2 - X(a_2^2 - \sigma a_3^2)$; de plus $N(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$. Ainsi $B = \begin{pmatrix} \sigma & X \\ & k((X)) \end{pmatrix}$ est un *corps*, non commutatif.

On définit une valeur absolue ultramétrique sur B, extension de celle de $k((X))$, en posant pour $a \in B$, $|a| = |N(a)|^{\frac{1}{2}}$. On a $|e_0| = 1 = |e_1|; |e_2| = |X|^{\frac{1}{2}} = |e_3|$. Considérons la norme $|||a||| = Inf\{|X|^n / |a| \leq |X|^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, on a $|||e_j||| = 1,\ 0 \leq j \leq 3,\ B_0 = \{a \in B / |||a||| \leq 1\} = \{a \in B / |a| \leq 1\}$ et $B_1 = \{a \in B / |||a||| < 1\} = XB_0 = e_2^2 B_0 = e_3^2 B_0$. On vérifie que $(e_j)_{0 \leq j \leq 3}$ est une base orthonormale de B c'est-à-dire $|||\sum_{j=0}^{3} a_je_j||| = \max_{0 \leq i \leq 3} |a_j|$.

Posons $R = \bigoplus_{j=0}^{3} k \cdot e_j$; on a $B_0 = R \oplus B_1$ et $R \simeq B_0/B_1 = \bigoplus_{j=0}^{3} k \cdot \overline{e}_j$ avec $\overline{e}_1^2 = \sigma, \overline{e}_2^2 = 0$ et $\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = -\overline{e}_2 \cdot \overline{e}_1 = \overline{e}_3$. Il vient que B_0/B_1 est égale à l'algèbre de quaternions *dégénérée* $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ & k \end{pmatrix}$; en particulier la k-algèbre (R, μ_0, e_0) est *isomorphe* à $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ & k \end{pmatrix}$.

Les $\mu_n : R \otimes_k R \to R$ définissant la multiplication de B sont déterminées par les valeurs $\mu_n(e_i \otimes e_j),\ 0 \leq i, j \leq 3$. On voit que $\mu_n(e_i \otimes e_j) = 0$ pour $n \geq 2$ et $0 \leq i, j \leq 3$; tandis que
$\mu_0(e_0 \otimes e_j) = e_j = \mu_0(e_j \otimes e_0),\ 0 \leq j \leq 3$;
$\mu_1(e_0 \otimes e_j) = 0 = \mu_1(e_j \otimes e_0),\ 0 \leq j \leq 3$;
$\mu_0(e_1 \otimes e_1) = \sigma e_0,\ \mu_1(e_1 \otimes e_1) = 0$;
$\mu_0(e_1 \otimes e_2) = e_3 = -\mu_0(e_2 \otimes e_1),\ \mu_1(e_1 \otimes e_2) = 0 = \mu_1(e_2 \otimes e_1)$;
$\mu_0(e_1 \otimes e_3) = \sigma e_2 = -\mu_0(e_3 \otimes e_1),\ \mu_1(e_1 \otimes e_3) = 0 = \mu_1(e_3 \otimes e_1)$;
$\mu_0(e_2 \otimes e_2) = 0,\ \mu_1(e_2 \otimes e_2) = e_0$;
$\mu_0(e_2 \otimes e_3) = 0 = -\mu_0(e_3 \otimes e_2),\ \mu_1(e_2 \otimes e_3) = -e_1 = -\mu_1(e_3 \otimes e_2)$;
$\mu_0(e_3 \otimes e_3) = 0, \mu_1(e_3 \otimes e_3) = \sigma e_0$;

N.B. : On a $\mu_1(R \otimes R) \subset k[e_1]$ et $\mu_1 \circ (\mu_1 \otimes 1_R) = \mu_1 \circ (1_R \otimes \mu_1)$

Remarque 4 : *Tout $\alpha \in k((X))$ se décompose en $\alpha = \alpha_\circ X^{\delta(\alpha)} \gamma^2$ où $\alpha_\circ \in k^*/k^{*2}$, $\delta(\alpha) = 0, 1$ et $\gamma \in k((X))$.*

Soient $\alpha, \beta \in k((X))$.

1) *On sait, et on peut vérifier directement, lorsque $k = \boldsymbol{F}_q, q = p^n$, p premier ≥ 3, que toute algèbre de quaternions $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \boldsymbol{F}_q((X)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_\circ X^{\delta(\alpha)} & \beta_\circ X^{\delta(\beta)} \\ & \boldsymbol{F}_q((X)) \end{pmatrix}$ est isomorphe :*

(i) *ou bien à $Mat_2(\boldsymbol{F}_q((X)) = Mat_2(\boldsymbol{F}_q)((X))$ l'algèbre des séries formelles de Laurent à coefficients dans $Mat_2(\boldsymbol{F}_q)$*

(ii) *ou bien au corps des quaternions ci-dessus* $B = \left(\begin{array}{cc} \sigma & X \\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{F}_q((X))} \end{array}\right)$.

2) *Lorsque $k = \mathbb{R}$ (ou plus généralement un corps ordonné maximal), on vérifie que toute algèbre de quaternions* $\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}((X))} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \pm X^{\delta(\alpha)} & \pm X^{\delta(\beta)} \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}((X))} \end{array}\right)$ *est isomorphe à l'une des algèbres.*

(i) *$Mat_2(\mathbb{R})((X))$, l'algèbre des séries formelles de Laurent à coefficients dans $Mat_2(\mathbb{R})$.*

(ii) $\mathbf{H}((X))$, *le corps des séries formelles de Laurent à coefficients dans le corps de quaternions* $\mathbf{H} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}} \end{array}\right)$.

(iii) $B = \left(\begin{array}{cc} -1 & X \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}((X))} \end{array}\right)$ *le corps de quaternions de l'exemple 2.*

(iv) $C = \left(\begin{array}{cc} -1 & -X \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}((X))} \end{array}\right)$ *qui est un corps .*

Les corps B et C sont $\mathbb{R}$-isomorphes mais ne sont pas $\mathbb{R}((X))$-isomorphes. Ces deux corps s'obtiennent par déformation de la $\mathbb{R}$-algèbre de quaternions dégénérée $\left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}} \end{array}\right)$.

Scholie : $k((X))$-algèbres de Hopf ultramétiques complètes

Soit (H, m, c, η, σ) une $k((X))-$algèbre de Hopf ultramétrique complète unitaire. En d'autres termes, H est une algèbre de Banach unitaire de multiplication $m : H\widehat{\otimes}H \to H$; le coproduit $c : H \to H\widehat{\otimes}H$ est un morphisme continu d'algèbres, l'inversion $\eta : H \to H$ est un endomorphisme linéaire continu et la coünité $\sigma : H \to k((X))$ est un morphisme continu d'algèbres. On a les axiomes de coassociativité et de coünité, et, $m \circ (\eta \otimes 1_H) \circ c = \ell \circ \sigma = m \circ (1_H \otimes \eta) \circ c$.

Supposons $\|c\| \leq 1$ (alors c est isométrique) et $\|\eta\| \leq 1$. Considérons l'identification d'espaces de Banach $H = R((X))$ où R est un sous-k-espace discret de H. On a, avec les notations de I, $c = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot c_n$, $c_n : R \to R \otimes_k R$ application k-linéaire; $\eta = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \eta_n$, $\eta_n : R \to R$ application k-linéaire; $\sigma = \sum_{n\geq 0} X^n \cdot \sigma_n$, $\sigma_n = k \to R$ k-linéaire. En plus des relations (1) et (2) du Théorème 4, on a

(3) $\sum_{p+q=n}(c_p \otimes 1_R)\circ c_q = \sum_{p+q=n}(1_R \otimes c_p)\circ c_q$ pour la coassociativité.

(4) $\sum_{p+q=n}(1_R \otimes \sigma_p)\circ c_q = \delta_{0n}1_R = \sum_{p+q=n}(\sigma_p \otimes 1_R)\circ c_q$ pour la coünité .

(5) $\sum_{p+q=n} c_p \circ \mu_q = \sum_{p+q+r+s=n}(\mu_p \otimes \mu_q)\circ(1_R \otimes \tau \otimes 1_R)\circ(c_r \otimes c_s)$ pour c, un morphisme d'algèbres; $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$

(6) $\sum_{p+q+r=n}\mu_p \circ (\eta_q \otimes 1_R)\circ c_r = \sum_{p+q=n}\ell_p \circ \delta_q = \sum_{p+q+r=n}\mu_p \circ (1_R \otimes \eta_q)\circ c_r$ pour l'inversion.

En particulier $(R, m_0, c_0, \eta_0, \sigma_0)$ est une k-algèbre de Hopf.

On voit ainsi que *la théorie des $k((X))$-algèbres de Hopf ultramétriques complètes unitaires de coproduit isométrique et d'inversion contractante se ramène à la théorie des déformations des k-algèbres de Hopf* (cf. [5])

References

[1] Y. AMICE, *Les nombres p-adiques*, P.U.F. 1975.

[2] B. DIARRA, *Algèbres de Hopf et fonctions presque périodiques ultramétriques*, Rivista di Matematica Pura ed Applicata, n° 16 (à paraître).

[3] M. GERSTENHABER, *On the deformation of rings and algebras*, Annals of Math. vol. 79, 1964, p. 59-103.

[4] J.P. SERRE, *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*, I.H.E.S., Paris, n°12,1962, p. 69-85.

[5] S. SHNIDER, *Bialgebra deformations*, C.R.A.S., Paris, t. 312, Série I, 1991, p. 7-12.

[6] A.C.M. Van ROOIJ, *Non-archimedean functional Analysis*, M. Dekker Inc. 1978

Mathématiques Pures
Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand)
Complexe Scientifique des Cézeaux
F. 63117 AUBIERE Cedex
e-mail : diarra@ucfma.univ-bp clermont.fr