Sur la stabilisation des systèmes non linéaires en cascade

A. Ferfera*   M.A. Hammami†

Résumé

On s'intéresse dans ce travail, au problème de la stabilisation globale de certains systèmes non linéaires en cascade. Celle-ci ne se déduisant pas, en général, des propriétés de stabilité asymptotique globale des sous-systèmes mis en cascade, on donne ici des conditions supplémentaires suffisantes pour assurer la stabilité asymptotique globale du système composé bouclé. On considère, en particulier, la classe des systèmes partiellement linéaires qui joue un rôle important dans la littérature, en raison des résultats connus sur la linéarisation partielle par feedback.

Abstract

This paper deals with the problem of the global stabilization for a class of cascade nonlinear control systems. It is well known that, in general, the global asymptotic stability of the cascaded subsystems does not imply the global asymptotic stability of the composite closed-loop system. In this paper, we give additional sufficient conditions for the global stabilization of a cascade nonlinear system. In particular, we consider the class of partially linear systems that are prominent because of well known results on partial feedback linearization.

*Projet-CONGE INRIA-Lorraine Metz (France)
†Faculté des Sciences de Sfax (Tunisie)
Received by the editors September 1998.
Communicated by J. Mawhin.
Key words and phrases : cascade nonlinear systems, stabilization, Lyapunov function, feedback.

1 Introduction

Ce travail traite le problème de la stabilisation globale des systèmes non linéaires en cascade de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(y,u) \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ et $u \in \mathbb{R}^p$. Les fonctions f et g sont supposées de classe C^∞ vérifiant $f(0,0) = 0$ et $g(0,0) = 0$.

Pour cette classe de systèmes, il est bien connu que si l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x,0) \tag{2}$$

admet $x = 0$ comme point d'équilibre localement asymptotiquement stable et si le système

$$\dot{y} = g(y,u) \tag{3}$$

est localement stabilisable par une loi de commande (ou feedback) $u = u(y)$, alors le système composé est localement stabilisable par ce même feedback (voir [1]).

Notons d'autre part que ce résultat local n'a pas d'analogue global : la stabilisation globale de (1) ne se déduit pas nécessairement de celle de (2) et de la stabilité asymptotique globale de (3). A titre de contre exemple, considérons le système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2y^2 - 1) \\ \dot{y} = u \end{cases}$$

qui est localement (mais non globalement) stabilisable par la loi de commande $u(y) = -y$ alors que les deux sous-systèmes associés sont globalement asymptotiquement stables (GAS).

On peut, en effet, vérifier que l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / x^2y^2 = 2\}$$

est invariant pour le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2y^2 - 1) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

ce qui exclut la stabilité asymptotique globale de ce dernier.

En fait, la stabilisation globale de (1), (voir [2], [3], [4]), ne se déduit de celle de (2) et de la stabilité asymptotique globale de (3) qu'au prix de conditions supplémentaires. Rappelons, en particulier, un théorème dû à Seibert-Suarez [2] , que nous utiliserons par la suite.

Théorème 1 : On suppose que le système (2) est GAS et que (3) est globalement stabilisable par un feedback $u(y)$. Si de plus toutes les orbites du système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g\Big(y, u(y)\Big) \end{cases}$$

sont bornées pour $t \geq 0$, alors le système est globalement stabilisable par le feedback $u(y)$.

Utilisant ce résultat, nous donnons dans la suite, une condition suffisante de stabilisation globale pour le système lorsque $f(x,0)$ est un champ homogène sur $\mathbb{R}^n$. La difficulté mentionnée plus haut subsiste même pour les systèmes partiellement linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = Ay + Bu \end{cases} \tag{4}$$

où A et B sont des matrices de dimensions convenables, (il suffit de prendre l'exemple du système précédent). Pour ces systèmes nous donnons une condition suffisante par un feedback obtenu grâce à une fonction de Liapounov contrôlée.

2 Préliminaires

L'objet de cette section est de rappeler quelques résultats classiques que nous utiliserons par la suite.
Soit X un champ de vecteur continu sur $\mathbb{R}^n$ tel que $X(0) = 0$. Une fonction de classe C^1, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, est une fonction de Liapounov stricte pour l'équation différentielle

$$\dot{x} = X(x) \tag{5}$$

si V est définie positive ($V(x) > 0$ pour $x \neq 0$, $V(0) = 0$), propre ($V(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$) et vérifie

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) X(x) < 0, \ \forall x \neq 0.$$

Une fonction $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est de classe $\mathcal{K}$ si elle est définie, continue et strictement croissante vérifiant $\gamma(0) = 0$. Une fonction $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est de classe $\mathcal{KL}$ si pour tout t fixé l'application $\beta(.,t)$ est de classe $\mathcal{K}$ et pour tout s fixé, l'application $\beta(s,.)$ décroît vers zéro lorsque t croit vers $+\infty$.

Notons que si l'origine est un point d'équilibre GAS pour (5), alors (voir [5]) :
• D'une part, il existe une fonction $\beta(s,t)$ de classe $\mathcal{KL}$, tel que, pour tout état initial $y(0)$, la solution $y(t)$ existe pour tout $t \geq 0$ et satisfait l'estimation

$$\|y(t)\| \leq \beta\Big(\|y(0)\|, t\Big) \tag{6}$$

• D'autre part, si X est homogène de degré p ($X(\lambda x) = \lambda^p X(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$), alors (5) admet une fonction de Liapounov stricte homogène.

Considérons à présent un système affine en contrôle de la forme

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + \cdots + u_p g_p(x) \tag{7}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, .., u_p)^T \in \mathbb{R}^p$ et $f, g_1, .., g_p$ sont des champs de vecteurs de classe C^∞ tel que $f(0) = 0$. Une fonction de classe C^∞, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, est une fonction de Liapounov contrôlée pour le système (5) si elle est définie positive, propre et vérifie

$$\inf_{u\in\mathbb{R}^m} \nabla V(x)\,[f(x)+u_1g_1(x)+\cdots+u_pg_p(x)]<0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Remarquons que si (7) admet un feedback stabilisant $u(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ($u(0)=0$), alors, d'après le théorème inverse de Liapounov (voir [6], [7]), le système bouclé admet une fonction de Liapounov stricte de classe C^∞, et donc (7) admet une fonction de Liapounov contrôlée. Reprenant un résultat d'Arstein [8] dont il donne une démonstration constructive, Sontag [9] montre que si un système affine en contrôles admet une fonction de Liapounov contrôlée, alors il est stabilisable par un feedback de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Rappelons ici le résultat de Sontag dans le cas d'une entrée scalaire ($p=1$) pour simplifier. Dans ce cas, une fonction de classe C^∞, définie positive et propre, est une fonction de Liapounov contrôlée pour le système si et seulement si

$$\nabla V(x)g(x)=0 \Rightarrow \nabla V(x)f(x)<0$$

Si une telle fonction existe, posons pour tout $x\in\mathbb{R}^n$

$$a(x)=\nabla V(x)f(x)\ \text{ et }\ b(x)=\nabla V(x)g(x)$$

alors le feedback de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ défini par

$$\begin{cases}\frac{-a(x)-\sqrt{-a^2(x)+b^4(x)}}{b(x)} & si\ \ b(x)\ \neq\ 0\\ 0\quad si\ \ b(x)=0\end{cases}$$

stabilise le système.

3 Stabilisation pour une classe de systèmes en cascade

Considérons un système non linéaire en cascade de la forme (1). Notons que, grâce à la régularité de f, il est toujours possible de décomposer $f(x,y)$ sous la forme

$$f(x,y)=f(x,0)+\varphi(x,y)y$$

un choix possible de φ étant donné par

$$\varphi(x,y)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(x,\lambda y)\,d\lambda$$

On suppose de plus que $f(x,0)$ est un champ de vecteurs homogène sur $\mathbb{R}^n$, et que le système (1) vérifie les hypothèses suivantes :

$\mathcal{H}_1$: Le point d'équilibre $x=0$ de

$$\dot{x}=f(x,0)$$

est GAS, et il existe une fonction de Liapounov stricte homogène $V(x)$ telle que $\forall x\neq 0$

$$\nabla V(x) f(x,0) \leq -aV(x), \ a > 0 \tag{8}$$

$\mathcal{H}_2$: Il existe une fonction scalaire décroissante $\gamma(\|y\|) \geq 0$, bornée pour tout y borné, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tout y dans $\mathbb{R}^m$

$$\|\varphi(x,y)\| \leq \gamma(\|y\|) \tag{9}$$

$\mathcal{H}_3$: Il existe un feedback $u = u(y)$, qui rend le point d'équilibre $y = 0$ du système bouclé

$$\dot{y} = g\Big(y, u(y)\Big)$$

globalement asymptotiquement stable.

On a alors, le théorème suivant :

Théorème 2 : Sous les hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, $(x,y) = (0,0)$ est un point d'équilibre GAS pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,0) + \varphi(x,y)\ y \\ \dot{y} = g\Big(y, u(y)\Big) \end{cases} \tag{10}$$

Preuve : Suivant $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_3$, il suffit de montrer, en vertu du théorème 1, que la composante $x(t)$ de n'importe quelle trajectoire $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, du système (10) est bornée. En vue de cela, notons d'une part que, la fonction de Liapounov V de l'hypothèse $\mathcal{H}_1$ étant homogène, ses dérivées partielles le sont aussi et on a

$$\|\nabla V(x)\| \leq \alpha V(x), \ \alpha > 0$$

D'autre part, d'après l'hypothèse $\mathcal{H}_3$, $y(t)$ vérifie une estimation de la forme (6). Tenant compte de (8) et (9), il s'ensuit que la dérivée de V le long des trajectoires de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x,0) + \varphi\Big(x, y(t)\Big)\ y(t)$$

donnée par

$$\dot{V}\Big(x(t)\Big) = \nabla V(x)\ f(x,0) + \nabla V(x)\ \varphi\Big(x, y(t)\Big)\ y(t)$$

vérifie

$$\dot{V}\Big(x(t)\Big) \leq -aV(x) + \|\nabla V(x)\| \|\varphi\Big(x, y(t)\Big)\|\ \|y(t)\|$$

$$\leq -aV(x) + \nu\beta(\|y(0)\|, t) V(x)$$

où

$$\nu = \alpha\gamma\Big(\beta(\|y(0)\|, 0)\Big).$$

Comme, β est une fonction de classe $\mathcal{KL}$, $\beta\left(\|y(0)\|, t\right)$ décroît vers zéro lorsque t croit, et il en résulte que

$$\exists\, T > 0,\ \forall\, t \geq T,\ \beta\left(\|y(0)\|, t\right) \ < \ \frac{a}{2\nu}$$

et donc

$$\dot{V}\Big(x(t)\Big) \leq -\frac{a}{2}V\Big(x(t)\Big),\ \ \forall\, t \geq T.$$

On en déduit que

$$V\Big(x(t)\Big) \leq k\ \exp(-\frac{a}{2}\, t),\ \ \forall\, t \geq T \tag{11}$$

où

$$k = V\Big(x(T)\Big)\ \exp(\frac{a}{2}\, T)$$

$[0, T]$ étant un compact, l'inégalité (11) prouve que $x(t)$ est bornée pour tout $t \geq 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque : A la suite du théorème 2, on peut considérer des systèmes en cascade de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v) + \varphi(x, y)\, y, & x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^q \\ \dot{y} = g(y, u)\ , & y \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{12}$$

vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ et la condition suivante :

$\mathcal{H'}_1$: Il existe un feedback $v = v(x)$ stabilisant globalement le sous-système $\dot{x} = f(x, v)$, et une fonction de Liapounov stricte homogène V telle que

$$\forall x \neq 0,\ \nabla V(x) f\Big(x, v(x)\Big) \leq -aV(x),\ a > 0$$

Sous ces hypothèses, le système (12) est alors globalement stabilisable par le feedback $\Big(v(x), u(y)\Big)$.

Comme exemple, considérons le système suivant dans le plan :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^3 - x_1^4 - \frac{1}{2}x_1^5 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + x_1^2x_2 + v \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}$. On peut vérifier que le feedback suivant $v(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_2^3$ stabilise ce système avec comme fonction de Lyapunov $V(x) = \|x\|^2$, qui satisfait $\mathcal{H}'_1$. En effet, un simple calcul montre que la dérivée de V le long des trajectoires en boucle fermée avec $v(x)$, vérifie $\dot{V}(x) = -4V(x) - (x_1^2 + x_1^3 - x_2^2)^2 \leq -4V(x)$.

4 Stabilisation pour une classe de systèmes partiellement linéaires

On considère un système partiellement linéaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = Ay + Bu \end{cases} \tag{13}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$, la paire $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ est stabilisable et f est un champ de vecteurs de classe C^∞ de la forme

$$f(x,y) = f(x,0) + \varphi(x,y)Cy$$

avec $C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{R})$. On suppose, sans perte de généralité, que les matrices B et C sont de rang maximum, et que $q \leq p$.
Notons que cette classe de systèmes est considérée dans [10] et [11] où l'on donne une condition suffisante de stabilisation dans le cas $q = p$.
Dans la suite de cette section, on suppose de plus que le système (13) vérifie les hypothèses suivantes :
H_1 : $x = 0$ est un point d'équilibre GAS pour

$$\dot{x} = f(x,0) \tag{14}$$

et une fonction de Liapounov stricte $V(x)$ associée à (14) est connue.

H_2 : Il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ et une matrice $P \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive tel que

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q < 0 \tag{15}$$

et

$$Ker\ B^T P \subset\ Ker\ C \tag{16}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3 :
Sous les hypothèses H_1 et H_2, il existe une fonction $v(x,y)$ de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)\backslash\{(0,0)\}$ tel que le feedback

$$u(x,y) = Ky + v(x,y)$$

stabilise globalement le système (13).

Preuve : On prend la commande u sous la forme

$$u = Ky + v$$

où v est un nouveau contrôle, et, tenant compte de l'hypothèse H_1 et de (15), on considère la fonction de Liapounov

$$W(x,y) = V(x) + y^T Py$$

La dérivée de W le long des trajectoires du système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,0) + \varphi(x,y)Cy \\ \dot{y} = (A+BK)y + Bv \end{cases} \tag{17}$$

est alors donnée par

$$\dot{W}(x,y) = \nabla V(x)[f(x,0) + \varphi(x,y)Cy] - \left(y^T Qy - 2y^T PBv\right)$$

On a par ailleurs, suivant (16), pour tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$$B^T Py = 0 \ \Rightarrow \ Cy = 0$$

Posons

$$a(x,y) = \nabla V(x) f(x,0) - y^T Qy + \nabla V(x)\varphi(x,y)Cy$$

et

$$b(y) = 2y^T PB$$

Il s'ensuit alors, d'après H_1 et H_2, que

$$b(y) = 0 \ \Rightarrow \ a(x,y) < 0$$

ce qui équivaut à dire que W est une fonction de Liapounov contrôlée pour le système (17). Posons alors

$$\beta(y) = \|b(y)\|^2 \text{ et } b_i(y) = 2y^T PB_i, \ i = 1,..,p$$

où B_i est le i-ème vecteur colonne de B, de sorte que

$$b(y) = (b_1(y),..,b_p(y))$$

Il vient alors, d'après [9], que le feedback $v(x,y)$ de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus \{(0,0)\}$, défini par

$$v(x,y) = \Big(v_1(x,y),...,v_p(x,y)\Big)^T$$

où

$$v_i(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \sigma_i(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\sigma_i(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \beta = 0 \text{ et } a < 0 \\ -b_i \frac{a + \sqrt{a^2 + \beta^4}}{\beta} & \text{sinon} \end{cases}$$

stabilise globalement le système (17), ce qui achève la démonstration.

Références

[1] M.Vidyasagar. *Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions stability and stabilizability.* IEEE trans. Aut. Cont., 25 (1980), 773-779.

[2] P. Seibert and R. Suarez. *Global stabilization of nonlinear cascade systems.* Systems Control Letters. 14 (1990), 347-352.

[3] A.Ferfera and M.A.Hammami. *Growth conditions for global stabilization of cascade nonlinear systems.* The IFAC C.S.Control, Nantes, France (1995) 522-526.

[4] E.D.Sontag.*Further facts about input to state stabilization.* IEEE trans. Aut. Cont., 4 vol 35 (1990), 473-476.

[5] W. Hahn. *Stability of motion.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1967).

[6] J.L.Massera. *Contribution to stability theory.* Annals of Mathematics, 64 (1956),182–206.

[7] J.Kurzweil. *On the inversion of Liapunov's second theorem on stability of motion.* AMS Translations, 24 (1963), 19–77.

[8] Z. Arstein. *Stabilization with relaxed controls.* Nonlinear Anal. TMA, 7 (1983), 1163–1173.

[9] E.D. Sontag. *A universal construction of Arstein's Theorem on nonlinear stabilization.* Systems Control Letters, 13 (1989), 117-123.

[10] P.V.Kokotovic and H.J.Sussmann. *A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems.* Systems Control Letters, 13 (1989), 125–133.

[11] A.Saberi, P.V.Kokotovic and H.J.Sussmann. *Global stabilization of partially linear composed systems.* SIAM J. Control and Optimisation, 28 (1990), 1491–1503.

Faculté des Sciences de Sfax,
Département de Mathématiques,
Laboratoire des Systèmes Dynamiques,
BP 763 Rte de soukra km4
Sfax (3038) Tunisie.