Algèbres $A - p$-normées advertiblement complètes

A. El Kinani M. Chahboun M. Oudadess

Abstract

In this paper, we give examples of $A - p$-normed algebras. We study their spectral properties under the assumption of advertible completeness as generalized by A. Mallios.

Introduction

Dans [9] et [10], W. Zelazko a montré que les algèbres localement bornées complètes sont exactement les algèbres p-Banach i.e., les algèbres p-normées complètes. Dans le cas non nécessairement complet, nous sommes amenés à considérer les algèbres $A-p$-normées. Nous commençons par justifier leur étude par de nombreux exemples dont en particulier, des espaces de fonctions mesurables et des espaces d'Orlicz, munis de topologies non localement convexes. Nous étudions ensuite quelques propriétés spectrales des algèbres $A - p$-normées. Nous montrons que, dans ces dernières, le spectre de tout élément est non vide (Proposition 3.2). Dans le cas d'une algèbre $A - p$-normée advertiblement complète $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, nous prouvons que le spectre de tout élément est compact (Proposition 3.4) ; et que si $r(x) < 1$, alors $e - x$ est inversible et d'inverse $\sum_{n\geq 0} x^n$, où $r(x) = \overline{\lim\limits_{n}} \|x^n\|_p^{\frac{1}{n}}$, (Proposition 3.6). Comme conséquence, nous obtenons que $\rho(x)^p \leq r(x)$, pour tout $x \in E$. Le lien entre r et le rayon de régularité β est donné par $\beta(x)^p = r(x)$; pour tout $x \in E$ (Proposition 3.9). Ceci nous permet de montrer que dans le cas fortement séquentiel, une algèbre $A-p$-normée advertiblement complète est en fait une Q-algèbre. Enfin, nous donnons un résultat concernant les séries entières.

Received by the editors November 1998.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* Primary: 46A16. Secondary: 46H05.
Key words and phrases : $A - p$-norme, Algèbre $A - p$-normée, advertiblement complète.

1 Préliminaires

Soient E une algèbre complexe commutative et $\|.\|_p$, $0 < p \leq 1$, une p-norme d'espace vectoriel sur E. On dit que $\|.\|_p$ est une p-norme d'algèbre si $\|xy\|_p \leq \|x\|_p\|y\|_p$, pour tous $x, y \in E$. Une algèbre est dite p-normée si elle est munie d'une p-norme d'algèbre. Signalons que les algèbres p-normées considérées ne sont pas nécessairement complètes comme c'est le cas dans [9] et [10]. Ici, une algèbre p-normée complète sera dite p-Banach. Dans [9] et [10], W. Zelazko a montré que les algèbres localement bornées complètes sont exactement les algèbres p-Banach. Dans le cas non nécessairement complet, on considère les algèbres dites $A - p$-normées.

Définition 1.1. *Soit E une algèbre complexe commutative et $\|.\|_p$, $0 < p \leq 1$, une p-norme (resp., une p-semi-norme) d'espace vectoriel sur E. On dit que $\|.\|_p$ est une $A - p$-norme (resp., $A - p$-semi-norme) si, pour tout $x \in E$, il existe une constante $M(x) > 0$ telle que $\|xy\|_p \leq M(x)\|y\|_p$, pour tout $y \in E$.*

Si $\|.\|_p$ est une $A - p$-norme (resp., une $A - p$-semi-norme) sur E, on dit que $(E, \|.\|_p)$ est une algèbre $A - p$-normée (resp. $A - p$-semi-normée). Si $p = 1$, on retrouve les algèbres A-normées (resp., A-semi-normées) ([1]).

Remarque 1.2. Toute algèbre topologique localement bornée est une algèbre $A-p$-normée, pour un certain p, $0 < p \leq 1$. En effet, par un résultat de S. Rolewicz ([6]), l'espace vectoriel sous-jacent est p-normé. Et on conclut par la continuité séparée du produit.

Remarque 1.3. On peut aborder l'étude des algèbres $A-p$-normées par l'intermédiaire des parties $A - p$-convexes définies comme suit : soient E une algèbre complexe commutative et B une partie de E. On dit que B est $A - p$-convexe, $0 < p \leq 1$, si elle est p-convexe et absorbe xB, pour tout $x \in E$. Il est clair que si $\|.\|_p$, $0 < p \leq 1$, est une $A - p$-norme sur E, alors $\{x \in E : \|.\|_p \leq 1\}$ est une partie $A - p$-convexe. Réciproquement, la p-jauge d'une partie $A - p$-convexe de E, est une $A - p$-norme sur E.

Remarque 1.4. Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée unitaire d'unité e. Quitte à remplacer $\|.\|_p$ par $\|e\|_p^{-1}$, on peut toujours supposer que $\|e\|_p = 1$.

Dans [8], S. Warner a défini la notion “advertibly complete” pour les *a. l. m. c.* et A. Mallios ([4]) l'a étendue aux algèbres topologiques quelconques. Dans le cas métrisable, on a la définition suivante :

Définition 1.5. *Soient E une algèbre topologique métrisable commutative, unitaire et $(x_n)_n$ une suite dans E. On dit que $(x_n)_n$ est advertiblement convergente s'il existe un élément x dans E tel que la suite $(xx_n)_n$ converge vers l'unité e. L'algèbre E est dite advertiblement complète, si toute suite de Cauchy, advertiblement convergente, est convergente.*

Rappelons également les définitions suivantes :

Définitions 1.6. *Soit E une algèbre topologique unitaire.*
1) *On dit que E est une Q-algèbre si le groupe des éléments inversibles $G(E)$ est ouvert.*

2) *On dit que E est fortement séquentielle s'il existe un voisinage U, de zéro, tel que $x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, pour tout $x \in U$* ([2]).

Dans la suite, les algèbres seront complexes et commutatives. Pour tout élément x d'une algèbre unitaire, le spectre de x est l'ensemble $Spx = \{\lambda \in C : \lambda e - x \notin G(E)\}$. Le rayon spectral de x est donné par $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Spx\}$. Si de plus E est topologique, le rayon de régularité de x est définie par $\beta(x) = \inf\{\alpha > 0 : (\alpha^{-1}x)^n$ soit bornée$\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

2 Exemples

1) Toute algèbre p-normée, $0 < p \leq 1$, ([9]), est $A-p$-normée.

2) Soient $(E, \|.\|)$ est une algèbre A-normée non normée et $p \in]0,1]$. En posant $\|x\|_p = \|x\|^p$, pour tout $x \in E$, l'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est $A-p$-normée non p-normée.

3) Soit E l'algèbre des fonctions f, mesurables sur $[0,1]$ à valeurs complexes et qui sont de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de $[0,1]$ tels que $mes(A_i) > 0$, pour tout $i = 1, ..., n$. On munit E de la p-norme d'espace vectoriel définie par $\|f\|_p = \int_{[0,1]} |f(t)|^p dt$, $0 < p \leq 1$. L'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est $A-p$-normée. Elle n'est pas A-normée pour $0 < p < 1$. Car sinon, elle serait localement convexe. Soit alors U un voisinage convexe, de l'origine, et $\varepsilon > 0$ tels que $\{f \in E : \|f\|_p \leq \varepsilon\} \subset U \subset \{f \in E : \|f\|_p < 1\}$. Choisissons $n \in N^*$ tel que $n > \varepsilon^{-(1-p)^{-1}}$ et les nombres complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de modules égaux à $n^{-1}(\varepsilon.n)^{\frac{1}{p}}$. Pour $i = 1, ..., n$, considérons la fonction donnée par $f_i = n\lambda_i \chi_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[}$. On a $\|f_i\|_p = \varepsilon$, pour tout $i = 1, ..., n$. Donc $f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \in U$ alors que, $\|f\|_p = \sum_{i=1}^{n} n^{-1}|\lambda_i|^p = \varepsilon.n^{1-p} > 1$. Contradiction. Cette algèbre est advertiblement complète. En effet soit $(f_n)_n \subset E$ une suite de Cauchy, advertiblement convergente. Il existe $f \in E$ telle que $\|f_n f - 1\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $f_n f \underset{n}{\longrightarrow} 1$, en mesure. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de $[0,1]$ vérifiant $mes(A_i) > 0$, pour tout i, telle que $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{A_i}$. Il existe alors une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ telle que $f_{n_k} f \underset{k}{\longrightarrow} 1$ *p.p.*, ce qui entraîne que $f(x) \neq 0$ *p.p.* Donc $\lambda_i \neq 0$, pour tout i. Par conséquent f est inversible dans E. Donc $f_n \overset{\|.\|_p}{\underset{n}{\longrightarrow}} f^{-1}$. L'algèbre $(E, \|.\|_p)$ n'est pas une Q-algèbre. Car sinon, il existerait $r > 0$ tel que $\|f\|_p < r$ entraînerait $1 - f \in G(E)$. Or si on pose $f(x) = 1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et 0 sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $\|f\|_p = \frac{r}{2}$ et $1 - f \notin G(E)$.

4) Soit E une algèbre $A-p$-normée advertiblement complète qui n'est pas une Q-algèbre. Le produit de E et de toute algèbre p-normée qui est une Q-algèbre est une algèbre $A-p$-normée advertiblement complète non Q-algèbre.

5) Soit $A = C^{(\mathbb{N})}$ l'algèbre des suites complexes nulles à partir d'un certain rang. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite strictement positive et bornée. On munit A de la p-norme, $\|x\|_p = \sum_{n\geq 1} \alpha_n |x_n|^p$, $0 < p \leq 1$, avec $x = (x_n)_{n\geq 1}$. Si on pose $M(x) = \sup\{|x_n|^p : n \geq 1\}$, on a $\|xy\|_p \leq M(x)\|y\|_p$, pour tout $y \in A$. Ainsi $(A, \|.\|_p)$ est une algèbre $A-p$-normée. Elle n'est pas A-normée pour $0 < p < 1$. Car sinon, il existerait un voisinage convexe U, de l'origine, et $\varepsilon > 0$ tels que $\{x \in A : \|x\|_p \leq \varepsilon\} \subset U \subset$

$\{x \in A : \|x\|_p < 1\}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, considérons la suite $x_{(k)} = (0, 0, ..., (\frac{\varepsilon}{\alpha_k})^{\frac{1}{p}}, 0, ...)$ où $(\frac{\varepsilon}{\alpha_k})^{\frac{1}{p}}$ est le k-ième élément de $x_{(k)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_{(k)} \in U$. Posons maintenant $x'_{(n)} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_{(k)}$, $n \geq 1$. On a $\|x'_{(n)}\|_p = \varepsilon n^{1-p} > 1$ pour n assez grand ; ceci contredit le fait que $x'_{(n)} \in U$ et $U \subset \{x \in A : \|x\|_p < 1\}$. On vérifie facilement que $(A, \|.\|_p)$ est une Q-algèbre ; elle est donc advertiblement complète. Elle n'est pas complète. Sa complétée est exactement $\tilde{A} = \{(x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n \geq 1} \alpha_n |x_n|^p < \infty\}$.

6) Soit (Ω, m) un espace mesuré. On désigne par $L_p(\Omega)$ l'espace d'Orlicz sur (Ω, m) défini par $L_p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$, m-mesurables et $\int_\Omega |f|^p dm < \infty\}$, $0 < p \leq 1$. Pour $f \in L_p(\Omega)$, posons $\|f\|_p = \int_\Omega |f|^p dm$. L'espace $(L_p(\Omega), \|.\|_p)$ est un p-Banach. Il n'est pas nécessairement une algèbre pour le produit ponctuel. Posons $L_p^b(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) : f$ est bornée$\}$. Si, pour $f \in L_p^b(\Omega)$, on note $M(f) = \sup\{|f(x)|^p : x \in \Omega\}$, on a $\|fg\|_p \leq M(f)\|g\|_p$, pour tout $g \in L_p^b(\Omega)$. Donc $(L_p^b(\Omega), \|.\|_p)$ est une algèbre $A - p$-normée. Cette algèbre n'est pas, en général, A-normée pour $0 < p < 1$. Car sinon, elle serait localement convexe. Soit alors un voisinage convexe U, de l'origine, contenant la boule $\{f \in L_p^b(\Omega) : \|f\|_p \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Soit f_0 un élément arbitraire de $L_p^b(\Omega)$. Choisissons $n \in \mathbb{N}^*$ et une partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Ω tels que $\|f_0\|_p \leq \varepsilon . n^{1-p}$ et $\int_{A_i} |f_0|^p dm \leq n^{-1} \|f_0\|_p$, pour tout $i = 1, ..., n$. Pour tout $i = 1, ..., n$, on considère la fonction f_i donnée par $f_i = n f_0 \chi_{A_i}$. On a $\|f_i\|_p \leq \varepsilon$. Donc $f_0 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_i \in U$. Par conséquent U coïncide avec $L_p^b(\Omega)$. L'algèbre $A - p$-normée $(L_p^b(\Omega), \|.\|_p)$ n'est pas p-normée puisque $\overline{L_p^b(\Omega)} = L_p(\Omega)$ et $L_p(\Omega)$ n'est pas une algèbre.

Plus généralement, soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction d'Orlicz ([5]) (i.e., continue, croissante, sous-additive et $\varphi(0) = 0$) et (Ω, m) un espace mesuré. Posons $L_\varphi^b(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$, m-mesurable, bornée et $\int_\Omega \varphi(|f|) dm < \infty\}$ et $q_\varphi(f) = \int_\Omega \varphi(|f|) dm$, $f \in L_\varphi^b(\Omega)$. On vérifie facilement que q_φ est une F-norme ([7]) sur l'espace $L_\varphi^b(\Omega)$, et que l'algèbre $(L_\varphi^b(\Omega), q_\varphi)$ est topologique. En utilisant un résultat de S. Rolewicz ([6]) et un autre de L. Waelbroeck ([7]), on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.1. **(i)** *Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\varphi(\alpha t) \geq (1+\varepsilon)\varphi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors $(L_\varphi^b(\Omega), q_\varphi)$ est une algèbre $A - p$-normée pour un certain $p \in]0, 1]$.*
(ii) *Si la mesure m est diffuse et bornée, alors $(L_\varphi^b(\Omega), q_\varphi)$ est une algèbre $A - p$-normée, $p \in]0, 1]$ si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\varphi(\alpha t)}{\varphi(t)} > 1$.*

7) Soient $C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et bornée$\}$ et $\psi \in C_b(\mathbb{R})$. Pour $f \in C_b(\mathbb{R})$, posons $\|f\|_p = \sup\{|f(x)|^p |\psi(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Si on pose $M(f) = \sup\{|f(x)|^p : x \in \mathbb{R}\}$, on a $\|fg\|_p \leq M(f)\|g\|_p$, pour tout $g \in C_b(\mathbb{R})$. Donc $(C_b(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ est une algèbre $A - p$-normée. On montre facilement que la $A - p$-norme $\|.\|_p$ n'est pas une p-norme d'algèbre si ψ est strictement positive telle que $\inf\{\psi(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$. L'algèbre $(C_b(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ n'est pas, en général, p-normée, puisque le produit n'est pas toujours globalement continu. En effet pour $\psi \in C_b(\mathbb{R})$ définie par $\psi(x) = x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\psi(x) = 1 - x$, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $\psi(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$, la suite $(f_n)_{n \geq 3}$, de fonctions de $C_b(\mathbb{R})$, donnée par $f_n(x) = n^{\frac{1}{p}}$ si $x \in]-\infty, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, +\infty[$, $f_n(x) = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{p}}$ si $x \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ et $f_n(x) = (\frac{1}{1-x})^{\frac{1}{p}}$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n}]$, est telle que $\|f_n\|_p = 1$ et $\|f_n^2\|_p = n$, pour tout $n \geq 3$. L'algèbre $(C_b(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ n'est pas nécessairement une Q-algèbre. En effet, soit $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, strictement positive telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et il existe V_n, un voisinage de a_n, tels que $\psi(x) < \frac{1}{n}$

pour tout $x \in V_n$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues telle que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(a_n) = 0$ et $f_n = 1$ en dehors de V_n. On a $\|f_n - 1\|_p = \sup\{\psi(x)|f_n(x) - 1|^p : x \in V_n\} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors que f_n n'est pas inversible, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2.2. La $A-p$-norme $\|.\|_p$ peut ne pas être équivalente à $\|.\|_\infty^p$, où $\|.\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme. En effet, si $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, strictement positive et $p \in]0,1]$, alors $\|.\|_p$ est non équivalente à $\|.\|_\infty^p$ si, et seulement si, $\inf\{\psi(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

L'algèbre $(C_b(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ n'est pas complète puisque $\|.\|_p$ est comparable à $\|.\|_\infty^p$ sans lui être équivalente.

Remarque 2.3. L'application inverse, $x \mapsto x^{-1}$, n'est pas, en général, continue sur l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre $A-p$-normée. En effet, dans l'algèbre $(C_b(\mathbb{R}), \|.\|_p)$, avec ψ strictement positive, l'application inverse n'est pas continue si $\inf\{\psi(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

Toute sous-algèbre d'une algèbre $A-p$-normée est $A-p$-normée. Il y a stabilité par produit fini et par quotient. De plus, si $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, est une algèbre $A-p$-normée non nécessairement unitaire et $E^1 = E \oplus \mathbb{C}$, l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à E, alors l'algèbre $(E^1, \|.\|_p)$, où $\|(x,\lambda)\|_p = \|x\|_p + |\lambda|^p$, pour tout $(x,\lambda) \in E^1$, est aussi une algèbre $A-p$-normée.

3 Propriétés spectrales des algèbres $A-p$-normées advertiblement complètes

Soit (E, q) une F^*-algèbre ([9]). On considère $L(E)$ l'espace des endomorphismes continus sur E. Pour $T \in L(E)$, posons $\tilde{q}(T) = \sup\{\frac{q(T(x))}{q(x)} : x \neq 0\}$. Si (E,q) une algèbre $A-p$-normée, il est clair que l'algèbre $(L(E), \tilde{q})$ est p-normée. La réciproque est également vraie.

Proposition 3.1. *Soit (E,q) une F^*-algèbre. Si $(L(E), \tilde{q})$ est une algèbre p-normée, alors (E,q) est une algèbre $A-p$-normée.*

Preuve. Par un résultat de S. Rolewicz [6], il suffit de montrer que l'espace (E,q) est localement borné. Posons $B = \{x \in E : q(x) \leq 1\}$. Pour toute suite $(x_n)_n \subset B$ et toute suite $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{C}$, qui tend vers zéro, on a $q(\lambda_n x_n) \leq |\lambda_n|^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc B est borné.

Dans une algèbre p-normée, le spectre de tout élément est non vide. Ce résultat est encore vrai dans une algèbre $A-p$-normée.

Proposition 3.2. *Dans une algèbre $A-p$-normée, le spectre de tout élément est non vide. Une telle algèbre vérifie donc le théorème de Gelfand-Mazur.*

Preuve. Soit $(E, \|.\|_p)$ une algèbre $A-p$-normée. L'algèbre $(L(E), \tilde{q})$ est p-normée. Pour $a \in E$, l'application $T_a : x \mapsto ax$, de E dans E, est dans $L(E)$. Donc $Spa \neq \emptyset$ vu que $SpT_a \subset Spa$.

Une autre preuve de la proposition ci-dessus peut être donnée en utilisant la remarque suivante :

Remarque 3.3. Dans une algèbre $A-p$-normée unitaire $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, il existe une p-norme d'algèbre plus fine. En effet, en posant, pour tout $x \in E$, $|||x|||_p = \sup\{\|xy\|_p : \|y\|_p \leq 1\}$, on vérifie facilement que $|||.|||_p$ est une p-norme d'algèbre telle que $\|x\|_p \leq |||x|||_p$, pour tout $x \in E$.

Dans une algèbre $A-p$-normée qui est une Q-algèbre, le spectre de tout élément est compact. Plus généralement, on a le résultat suivant qui englobe celui donné dans le cas p-Banach ([9]).

Proposition 3.4. *Dans une algèbre $A-p$-normée $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, unitaire et advertiblement complète, le spectre de tout élément $x \in E$ est compact.*

Preuve. On va montrer que l'algèbre E munie de la p-norme d'algèbre $|||.|||_p$, définie dans la remarque 3.3 est une Q-algèbre. Pour cela, montrons qu'elle est advertiblement complète. Soit alors $(x_n)_n$ une suite de Cauchy, advertiblement convergente dans $(E, |||.|||_p)$ et $x \in E$ tels que $xx_n \underset{n}{\overset{|||.|||_p}{\longrightarrow}} e$. La suite $(xx_n)_n$ est aussi de Cauchy et advertiblement convergente dans $(E, \|.\|_p)$. Elle est donc convergente dans $(E, \|.\|_p)$. Par suite x est inversible et la suite $(x_n)_n$ est alors convergente dans $(E, |||.|||_p)$.

Dans une algèbre p-normée $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, on sait que, pour tout $x \in E$, la suite $(\|x^n\|_p^{\frac{1}{n}})_n$ est convergente et que sa limite est exactement $\inf\{\|x^n\|_p^{\frac{1}{n}} : n \in N^*\}$. Dans le cas $A-p$-normé, on ne sait même pas si la suite $(\|x^n\|_p^{\frac{1}{n}})_n$ est convergente. Dans ce qui suit, posons $r(x) = \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{n}}$, pour tout $x \in E$.

Proposition 3.5. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée. On a alors :*
(i) *$r(x) < \infty$, pour tout $x \in E$.*
(ii) *Pour tous $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $r(\alpha x) = |\alpha|^p r(x)$.*
(iii) *Pour tout $x \in E$, il existe une constante $M(x) > 0$ tel que $r(xy) \leq M(x) r(y)$, pour tout $y \in E$.*
(iv) *Pour tout $x \in E$, $r(x) < 1$ si, et seulement si, $x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$.*

Preuve. **(i)** Soit $x \in E$ et $M(x) > 0$ tel que $\|xy\|_p \leq M(x)\|y\|_p$, pour tout $y \in E$. Par récurrence, on a $\|x^n\|_p \leq (M(x))^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et par conséquent $r(x) \leq M(x)$.
(ii) et **(iii)** résultent de la définition de r.
(iv) Il est clair que si $r(x) < 1$, alors $x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Inversement, supposons que $r(x) \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ telle que $\|x^{k_n}\|_p \geq 1$, et donc x^n ne tend pas vers zéro.

Proposition 3.6. *Soient $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée unitaire advertiblement complète et $x \in E$. Si $r(x) < 1$, alors $e - x$ est inversible et d'inverse $\sum_{k \geq 0} x^k$.*

Preuve. Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $r(x) < \alpha < 1$. On a $\|x^n\|_p \leq \alpha^n$, pour n assez grand. La suite de terme général $x_n = \sum_{k=0}^n x^k$ est de Cauchy car, pour n grand, $\|\sum_{k=n}^{n+m} x^k\|_p \leq \sum_{k=n}^{n+m} \alpha^k \underset{n}{\longrightarrow} 0$. De plus, elle est advertiblement convergente. En effet, $(e-x)x_n = x_n(e-x) = e - x^{n+1} \underset{n}{\longrightarrow} e$. Comme $(E, \|.\|_p)$ est advertiblement complète, la suite $(x_n)_n$ est convergente. Soit a sa limite. Par la continuité séparée du produit, on a $(e-x)a = a(e-x) = e$. Ainsi $e - x$ est inversible.

Comme conséquence immédiate, on a :

Corollaire 3.7. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée unitaire advertiblement complète. Alors $(\rho(x))^p \leq r(x)$, pour tout $x \in E$.*

Remarque 3.8. Dans une algèbre $A-p$-normée $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, unitaire, le rayon de régularité β est toujours fini. En effet, par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe une constante $M(x) > 0$ tel que $\|xy\|_p \leq M(x)\|y\|_p$, pour tout $y \in E$. On vérifie, par récurrence que $\|x^n\|_p \leq (M(x))^n$, et donc $\left\|\left(\frac{x}{(M(x))^{\frac{1}{p}}}\right)^n\right\|_p \leq 1$, pour tout n. D'où le résultat.

Le rayon de régularité β est lié à r comme suit :

Proposition 3.9. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée advertiblement complète. Alors, on a pour tout $x \in E$, $\beta^p(x) = r(x)$. Et en particulier $\rho(x) \leq \beta(x)$.*

Preuve. Soit $\lambda > \beta(x)$. Alors $(\lambda^{-1}x)^n \longrightarrow 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x^n\|_p \leq \lambda^{np}$, pour tout $n \geq n_0$. Ce qui entraîne que $r(x) \leq \lambda^p$. Donc $r(x) \leq \beta^p(x)$. Soit maintenant $\alpha > 0$ tel que $r(x) < \alpha$. Alors $(\alpha^{-1}x)^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, d'où $\beta(x) \leq \alpha^{\frac{1}{p}}$. Donc $\beta^p(x) \leq r(x)$.

Comme conséquence, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 3.10. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée fortement séquentielle. Si $(E, \|.\|_p)$ est advertiblement complète, alors c'est une Q-algèbre.*

Preuve. Si $(E, \|.\|_p)$ est fortement séquentielle, il existe un voisinage U, de zéro, tel que $x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, pour tout $x \in U$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\{x \in E : \|x\|_p \leq \alpha\} \subset U$. Comme, d'après la proposition 3.9, $\rho(x) \leq \beta(x)$ pour tout $x \in E$, on a $\rho(x) \leq \alpha^{\frac{-1}{p}}\|x\|_p^{\frac{1}{p}}$ pour tout $x \in E$. Il en résulte que $(E, \|.\|_p)$ est une Q-algèbre.

Les algèbres $A-p$-normées complètes sont des p-Banach. Dans ces dernières, les séries entières opèrent. Dans le cas non nécessairement complet, ce résultat n'est pas, en général, vrai. Cependant, on a ce qui suit :

Proposition 3.11. *Soient $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre $A-p$-normée unitaire et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Alors*
(i) *Pour tout $x \in E$, $a_n x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$.*
(ii) *Pour tout $x \in E$, la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|_p)$.*
(iii) *De plus,* **(i)** *et* **(ii)** *sont équivalentes.*

Preuve. Montrons d'abord que les deux assertions sont équivalentes. **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)** est évidente. Pour **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**, elle résulte du fait que, pour $x \in E$, on a $\|a_n x^n\|_p \leq \frac{1}{2^n}$, pour n assez grand. Montrons maintenant **(i)**. Soient $x \in E$ et $s_1 > 0$ tels que $r(x) < s_1^p$. Soit de plus s_2 tel que $r(s_1^{-1}x) < s_2 < 1$. Alors, pour n, assez grand, on a : $\|s_1^{-1}x^n\|_p \leq s_2^n$. Posons $M = \sup\{|\sum_{n\geq 0} a_n z^n| : |z| = s_1\}$. Par les estimations de Cauchy, $|a_n| \leq s_1^{-n}M$, pour tout n. Par conséquent $\|a_n x^n\|_p \leq M^p\|s_1^{-1}x^n\|_p \leq M^p s_2^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Références

[1] A. C. Cochran, R. Keown, C. R. Williams, *On a class of topological algebras.* Pacific J. Math. 34 (1970), pp. 17-25.

[2] T. Hussain, *Infrasequential topological algebras.* Can. Math. Bull. 22 (1979), pp. 413-418.

[3] G. Köthe, *Topological vector spaces I.* Springer Verlag, 1983.

[4] A. Mallios, *Topological algebras. Selected topics.* North-Holland, 1986.

[5] W. Orlicz, *On space of ϕ integrable functions.* Proc. Inter. Symp. on linear spaces (Jerusalem, 1960), pp. 357-365.

[6] S. Rolewicz, *On a certain class of linear metric spaces.* Bull. acad. Pol. sci. III.5 (1957), pp. 471-473.

[7] L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras.* Lecture notes in mathematics, vol. 230, Springer Verlag (1971).

[8] S. Warner, *Polynomial completeness in locally multiplicatively convex algebras.* Duke Math. 1956, pp. 1-11.

[9] W. Zelazko, *On the locally bounded and m-convex topological algebras.* Studia Math. t. XIX, pp. 333-355.

[10] W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras.* Lecture notes, Series 31 (1971), Matimatisk Institut Aarhus Universitet-Aarhus.

Ecole Normale Supérieure
B.P. 5118 Takaddoum
10105 Rabat
Maroc