

Etude par la théorie d'extrapolation des équations différentielles à retard en dimension infinie à opérateurs de domaines non denses

B. Amir

Résumé

In this work, we use the extrapolation methods to study the existence, the uniqueness and asymptotic behavior of the bounded mild solution to the retarded differential equation $\frac{d}{dt}u(t) = Bu(t) + Lu(t) + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, with B a Hille-Yosida operator in some Banach space.

1 Introduction

Dans ce travail, nous étudions l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique de la solution faible de l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{d}{dt}x(t) = Bx(t) + Lx_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où $B : D(B) \subset E \rightarrow E$, un opérateur de Hille-Yosida à domaine non dense dans E (E étant un espace de Banach), $L : C_E := C([-1, 0], E) \rightarrow E$, un opérateur linéaire borné et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$.

Dans la première partie de ce travail, nous étudions (1) lorsque B est à domaine non dense dans E , de type négatif vérifiant une certaine condition que nous précisons ultérieurement. Nous montrons, alors, que (1) admet une unique solution faible bornée qui se comporte asymptotiquement comme le terme non homogène f .

La deuxième partie est consacrée à étudier l'équation (1) sous le cas où B est un opérateur de Hille-Yosida dont la part dans $\overline{D(B)}$ engendre un C_0 -semi-groupe hyperbolique. Nous montrons, comme précédemment, que (1) admet une seule solution faible bornée et qui hérite de f son comportement asymptotique.

Received by the editors May 1999.

Communicated by J. Mawhin.

Les techniques que nous utilisons reposent sur la notion d'espaces d'extrapolation, introduite et développée par plusieurs chercheurs, nous citons H. Amann [1], G. Da-Prato et P. Grisvard [5], R. Nagel [8] et van Neerven [10]. Cette théorie, qui présente l'intérêt de résoudre des problèmes de Cauchy, par les techniques de semi-groupes, sans que l'opérateur d'évolution introduit au départ n'engendre un C_0 -semi-groupe, a été utilisée récemment par plusieurs auteurs pour une étude quantitative des problèmes de Cauchy à valeurs initiales, dont l'opérateur d'évolution est à domaine non dense. (cf. [2], [3], [9], [11], [12]).

2 Préliminaires

Notations et définitions

Soit X un espace de Banach. On désigne par $C_b(\mathbb{R}, X)$ (resp. $C_{ub}(\mathbb{R}, X)$) l'espace des fonctions continues bornées (resp. uniformément continues bornées) sur \mathbb{R} à valeurs dans X muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$ et $t \in \mathbb{R}$, f_t est la translation de f , i.e. $f_t(s) := f(t+s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

i) Une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$ est presque périodique (resp. faiblement presque périodique au sens d'Eberlein) si le sous-espace $H(f) := \{f_t, t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact (resp. faiblement relativement compact) dans $C_b(\mathbb{R}, X)$. Un tel espace est noté $AP(\mathbb{R}, X)$ (resp. $W(\mathbb{R}, X)$).

ii) $f \in C_{ub}(\mathbb{R}, X)$ est dite asymptotiquement presque périodique si et seulement si il existe deux fonctions $g \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi \in C_{ub}(\mathbb{R}, X)$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$, telles que $f = g + \varphi$. L'espace de ces fonctions est noté $AAP^+(\mathbb{R}, X)$.

Soit $PAP_0(X)$ l'ensemble défini par

$$PAP_0(X) := \left\{ \varphi \in C_{ub}(\mathbb{R}, X) : \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \|\varphi(t)\| dt = 0 \right\}.$$

Une fonction $f \in C(\mathbb{R}, X)$ est appelée pseudo-presque périodique s'il existe deux fonctions $g \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi \in PAP_0(X)$ telles que $f = g + \varphi$.

Nous donnons, par la suite, quelques résultats concernant la théorie d'extrapolation. Pour plus de détail, nous citons comme références [1], [8] et [9].

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur de Hille-Yosida, c'est à dire qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ ($\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A) et

$$\sup\{\|(\lambda - \omega)^n R(\lambda, A)^n\| : \lambda > \omega, n \geq 0\} < \infty.$$

On pose $X_0 = \overline{D(A)}$.

La part A_0 , de l'opérateur A , définie par

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\}, \quad A_0x = Ax \quad \text{pour } x \in D(A_0),$$

engendre dans X_0 un C_0 -semi-groupe $(T_0(t))_{t \geq 0}$ (cf. [7], Thm. 12.2.4). De plus $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ et pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda, A_0)$ est la restriction de $R(\lambda, A)$ dans X_0 .

Le type ω de A est défini par

$$\omega := \inf \left\{ \delta \in \mathbb{R} : \text{il existe } M \geq 1 \text{ avec } \|T_0(t)\| \leq Me^{\delta t}, \forall t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2)$$

On définit sur X_0 les normes $\|x\|_\lambda := \|R(\lambda, A)x\|$, $\lambda \in \rho(A)$. Toutes ces normes sont équivalentes, on les note par $\|\cdot\|_{-1}$.

L'espace d'extrapolation associé à A , noté X_{-1} , est le complété de l'espace $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$. Le C_0 -semi-groupe d'extrapolation, noté $(T_{-1}(t))_{t \geq 0}$, est le prolongement continu de $(T_0(t))_{t \geq 0}$ sur X_{-1} , son générateur A_{-1} est le prolongement unique de A_0 sur X_{-1} . De plus, $D(A_{-1}) = (X_0, \|\cdot\|_{-1})$, $R(\lambda, A)$ est la restriction de $R(\lambda, A_{-1})$ à X et $R(\lambda, A_{-1})X = D(A)$, $\lambda \in \rho(A)$. On montre aussi (cf. [9], Thm. 1.7) que l'injection de X dans X_{-1} est continue.

Soit le problème de Cauchy autonome non homogène suivant

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

où A est un opérateur de Hille-Yosida sur X de type $\omega < 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow X$. Le lemme suivant, dont la démonstration utilise les mêmes démarches que celle de ([9], Prop. 2.1), permet de donner la solution faible de (3) dans X et ceci en donnant un sens à la formule de variation de la constante associée :

Lemme 2.1. *Pour f intégrable sur \mathbb{R}^- et localement intégrable sur \mathbb{R}^+ , les propriétés suivantes sont vérifiées*

(i) $\int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \in X_0, \forall t \in \mathbb{R}.$

(ii) *Il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de f et de t telle que*

$$\left\| \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \right\| \leq \alpha e^{\delta t} \int_{-\infty}^t e^{-\delta s} \|f(s)\| ds, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où δ est tel que $\omega \leq \delta < 0$.

Notons qu'au cours de la démonstration de ce lemme, on trouve que $\alpha = M^2$ où M est la constante donnée dans (2).

Le corollaire suivant montre que les propriétés du lemme précédent restent encore vraies lorsque $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Corollaire 2.2. *Soit $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$ et δ tel que $\omega \leq \delta < 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

on a :

(i) $\int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \in X_0.$

(ii) $\left\| \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \right\| \leq \alpha e^{\delta t} \int_{-\infty}^t e^{-\delta s} \|f(s)\| ds.$

(iii) $\left\| \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \right\| \leq \left[\frac{\alpha}{-\delta} \right] \|f\|_\infty.$

(iv) *L'opérateur $\mathcal{T} : C_b(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X_0)$, défini par*

$$(\mathcal{T}f)(t) := \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

est linéaire borné et $(\mathcal{T}f_t) = (\mathcal{T}f)_t$.

Preuve. Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$, définissons sur \mathbb{R} la fonction f_n ($n \in \mathbb{N}^*$) par : $f_n(t) := e^{-\frac{\delta}{n}t} f(t)$. Il est évident que f_n satisfait l'hypothèse du lemme précédent, donc (i) et

(ii) sont vérifiées par f_n . Nous avons alors, d'après le théorème de Lebesgue

$$\left\| \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f_n(s)ds - \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f_m(s)ds \right\| \leq \alpha \|f\|_{\infty} e^{\delta t} \int_{-\infty}^t e^{-\delta s} \left| e^{-\frac{\delta}{n}s} - e^{-\frac{\delta}{m}s} \right| ds \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f_n(s)ds \text{ existe dans } X_0.$$

D'autre part, il est évident que

$$\int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f_n(s)ds \longrightarrow \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \text{ dans } X_{-1},$$

l'injection continue de X_0 dans X_{-1} , implique

$$\int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f_n(s)ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \text{ dans } X_0.$$

L'assertion (ii) est satisfaite par les f_n et par passage à la limite, la fonction f vérifie aussi (ii). L'assertion (iii) et (iv) s'obtiennent immédiatement de (ii). De plus

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}f_t)(s) &= \int_{-\infty}^0 T_{-1}(-\sigma)f(s+t)d\sigma \\ &= (\mathcal{T}f)_t(s), \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3 Etude de l'équation différentielle (1).

Soient $(S_0(t))_{t \geq 0}$ le C_0 -semi-groupe engendré par la part B_0 de B dans $E_0 := \overline{D(B)}$, E_{-1} l'espace d'extrapolation par rapport à B et $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$ le C_0 -semi-groupe d'extrapolation de $(S_0(t))_{t \geq 0}$.

Définition 3.1. Une fonction $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow E_0$, continue est dite solution faible (mild solution) de (1) si elle satisfait l'équation intégrale suivante

$$x(t) = S_0(t-s)x(s) + \int_s^t S_{-1}(t-\sigma)(Lx_{\sigma} + f(\sigma))d\sigma, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad s \leq t. \quad (4)$$

3.1 Premier Cas

Dans ce paragraphe, nous étudions l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique de la solution faible bornée de l'équation (1), pour B un opérateur de Hille-Yosida à domaine non dense, de type négatif ω tel que

$$\omega + \alpha \|L\| < 0, \quad (5)$$

où α est la constante du corollaire 2.2 relative à $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2. Soit $f \in C_b(\mathbb{R}, E)$. Alors l'équation différentielle (1) admet une et une seule solution faible bornée $x(\cdot)$, qui satisfait l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma. \quad (6)$$

Preuve. Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E_0)$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} t \mapsto (\mathcal{K}\varphi)(t) &:= \int_{-\infty}^t S_{-1}(t-\sigma)(L\varphi_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^0 S_{-1}(-\sigma)(L\varphi_{t+\sigma} + f(\sigma+t))d\sigma. \end{aligned}$$

Soit $\delta \geq \omega$ tel que $\delta + \alpha \|L\| < 0$. L'application $t \mapsto (\mathcal{K}\varphi)(t)$ est continue sur \mathbb{R} . En utilisant le corollaire 2.2, $\mathcal{K}\varphi$ est à valeurs dans E_0 et vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\varphi\|_\infty &\leq \alpha (\|L\| \|\varphi\|_\infty + \|f\|_\infty) \int_{-\infty}^0 e^{-\delta\sigma} d\sigma \\ &\leq \frac{-\alpha}{\delta} (\|L\| \|\varphi\|_\infty + \|f\|_\infty), \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\varphi, \psi \in C_b(\mathbb{R}, E_0)$, nous avons :

$$\|\mathcal{K}\varphi - \mathcal{K}\psi\|_\infty \leq \frac{\alpha \|L\|}{-\delta} \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Comme le rapport $\frac{\alpha \|L\|}{-\delta} < 1$, l'application \mathcal{K} est alors une contraction de $C_b(\mathbb{R}, E_0)$.

Soit $x(\cdot)$ son unique point fixe. $x(\cdot)$ satisfait l'équation (6). De plus, il est simple de vérifier que $x(\cdot)$ satisfait l'équation intégrale (4).

Soit $y(\cdot)$ une autre solution faible bornée de (1), alors

$$y(t) = S_0(t-s)y(s) + \int_s^t S_{-1}(t-\sigma)(Ly_\sigma + f(\sigma))d\sigma \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^t S_{-1}(t-\sigma)(Ly_\sigma + f(\sigma))d\sigma,$$

car $\|S_0(t-s)y(s)\| \leq C^{ste} e^{\omega(t-s)} \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 0$. L'unicité du point fixe de \mathcal{K} dans $C_b(\mathbb{R}, E_0)$ implique alors que $x(\cdot)$ est l'unique solution faible de (1). ■

Désignons par \mathcal{F} l'une des abréviations suivantes : AP , AAP^+ , PAP ou W (notions définies dans la section précédente).

Nous montrons, dans le théorème suivant, que la solution faible $x(\cdot)$ de l'équation (1) hérite de f ses propriétés.

Théorème 3.3. Soit $f \in C_{ub}(\mathbb{R}, E)$ et $x(\cdot)$ la solution faible bornée de l'équation différentielle (1). Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$, alors $x(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$.

Preuve. Désignons par $(Tr(t))_{t \geq 0}$ le C_0 -groupe de translations sur $C_{ub}(\mathbb{R}, E)$ et considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C_{ub}(\mathbb{R}, E_0) &\longrightarrow C_{ub}(\mathbb{R}, E) \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{L}\varphi, \end{aligned}$$

$$\text{où } (\mathcal{L}\varphi)(t) = LTr(t)\varphi, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

\mathcal{L} est borné et vérifie $\mathcal{L}Tr(\tau)\varphi = Tr(\tau)\mathcal{L}\varphi$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Donc si $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$, alors $\mathcal{L}\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$.

(i) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$. Nous avons, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$ et $t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto Tr(t)(\mathcal{L}\varphi + f)(s)$ est dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$. De plus

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}\varphi)(t) &= \int_{-\infty}^0 S_{-1}(-\sigma) (LTr(t+\sigma)\varphi + Tr(t)f(\sigma)) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^0 S_{-1}(-\sigma) (Tr(t)(\mathcal{L}\varphi + f(\sigma))) d\sigma \\ &= \mathcal{T}(\mathcal{L}\varphi + f)(t), \end{aligned}$$

où \mathcal{T} est l'opérateur du corollaire 2.2. Nous déduisons que $\mathcal{K}\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$. De plus, \mathcal{K} est une contraction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$ dans lui même, donc admet un point fixe et ce point fixe n'est autre que la solution $x(\cdot)$. ■

Exemple

Nous appliquons les résultats précédents à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) - \beta u(t, x) - \frac{\pi}{2} u(t-1, x) + g(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (7)$$

où $\beta > \frac{\pi}{2}$ et $g : \mathbb{R} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée.

Soit $\bar{E} := C([0, \pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'équation (7) se transforme en une équation différentielle à retard, qui s'écrit

$$\frac{d}{dt} v(t) = Bv(t) + Lv_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

avec $v, f : \mathbb{R} \rightarrow E$ telles que $v(t) = u(t, \cdot)$ et $f(t) = g(t, \cdot)$. Nous avons $f \in C_b(\mathbb{R}, E)$, $v_t \in C([-1, 0], E)$, $L : C([-1, 0], E) \rightarrow E$ défini par

$$L\varphi = -\frac{\pi}{2}\varphi(-1)$$

et B est l'opérateur défini sur E par

$$\begin{aligned} D(B) &= \{y \in C^1([0, \pi]); y(0) = y(\pi) = 0\} \\ By &= y' - \beta y, \quad y \in D(B). \end{aligned}$$

B est un opérateur de Hille-Yosida car l'opérateur

$$D(P) = D(B), \quad Py = y', \quad \forall y \in D(P)$$

est un opérateur de Hille-Yosida (cf. [9]). Sa part dans

$$E_0 := \overline{D(B)} = \{y \in C([0, \pi]); y(0) = y(\pi) = 0\}$$

engendre le C_0 -semi-groupe défini par

$$(S_0(t)\varphi)(t) := \begin{cases} e^{-\beta t}\varphi(x-t), & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t \geq x. \end{cases}$$

La constante α du lemme 2.1 pour ce semi-groupe est 1 et $\beta + \|L\| < 0$, donc B satisfait l'inégalité (5). D'après le théorème 3.2, (8) admet une unique solution faible bornée et par suite (7) aussi. De plus, cette solution hérite de f son comportement asymptotique.

3.2 Deuxième Cas

Dans ce qui suit, nous supposons que B est un opérateur de Hille-Yosida telle que sa part dans E_0 engendre un semi-groupe hyperbolique $(S_0(t))_{t \geq 0}$, c'est à dire (cf. [6]) :

Il existe deux projections linéaires bornées P_S et P_U sur E_0 qui permutent avec $(S_0(t))_{t \geq 0}$ et $R(\lambda, B_0)$ telles que :

(i) $E_0 = P_S E_0 \oplus P_U E_0$

(ii) $S_0(t)(P_S E_0) \subset P_S E_0$ pour tout $t \geq 0$ et la famille $(P_S S_0(t))_{t \geq 0}$, restriction de $(S_0(t))_{t \geq 0}$ à $P_S E_0$ est un C_0 -semi-groupe.

(iii) $S_0(t)(P_U E_0) \subset P_U E_0$ pour tout $t \geq 0$ et $(S_0(t))_{t \geq 0}$ s'étend dans $P_U E_0$ en un C_0 -groupe $(P_U S_0(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

(iv) Il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\delta > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} \|P_S S_0(t)\| &\leq M e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0, \\ \|P_U S_0(t)\| &\leq M e^{\delta t}, \quad \forall t \leq 0. \end{aligned}$$

Cette situation peut se présenter (cf. [6]) lorsque par exemple $\sigma(S_0(t)) \subset \Gamma e^{t\sigma(B)}$ et $\sigma(S_0(t)) \cap \Gamma = \emptyset$, où $\Gamma := \{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| = 1\}$, ou par exemple $(S_0(t))_{t \geq 0}$ est éventuellement compact et $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Remarque : Les opérateurs P_S et P_U commutent avec $(S_0(t))_{t \geq 0}$ et $R(\lambda, B_0)$, $\lambda \in \rho(B)$. De plus, ils se prolongent sur E_{-1} en des opérateurs linéaires bornés $P_{S,-1}$ et $P_{U,-1}$ qui commutent avec $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$ et $R(\lambda, B_{-1})$.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Supposons que $(S_0(t))_{t \geq 0}$ est hyperbolique et $\|L\| < \frac{\delta}{2M}$ où L est l'opérateur de l'équation (1). Soit $f \in C_b(\mathbb{R}, E)$. Alors l'équation différentielle (1) admet une unique solution faible bornée $x(\cdot)$. Cette solution satisfait l'équation intégrale*

$$\begin{aligned} x(t) = & (\lambda I - B_0) \int_{-\infty}^t P_S S_0(t - \sigma) R(\lambda, B) (Lx_\sigma + f(\sigma)) d\sigma \\ & - (\lambda I - B_0) \int_t^{+\infty} P_U S_0(t - \sigma) R(\lambda, B) (Lx_\sigma + f(\sigma)) d\sigma, \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \rho(B)$ et $t \in \mathbb{R}$.

De plus, si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$ alors $x(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$.

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant (cf. [4], Lemme2) :

Lemme 3.5. Soit $\psi \in C_b(\mathbb{R}, E)$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^t P_{S,-1} S_{-1}(t-\sigma) \psi(\sigma) d\sigma \in X_0 \quad \text{et}$$

$$\left\| \int_{-\infty}^t P_{S,-1} S_{-1}(t-\sigma) \psi(\sigma) d\sigma \right\| \leq \alpha e^{-\delta t} \int_{-\infty}^t e^{\delta s} \|\psi(s)\| ds.$$

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_t^{\infty} P_{U,-1} S_{-1}(t-\sigma) \psi(\sigma) d\sigma \in X_0, \quad \text{et}$$

$$\left\| \int_t^{\infty} P_{U,-1} S_{-1}(t-\sigma) \psi(\sigma) d\sigma \right\| \leq \alpha e^{\delta t} \int_t^{\infty} e^{-\delta s} \|\psi(s)\| ds.$$

(iii) L'application $G : C_b(\mathbb{R}, E_0) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}, E_0)$ définie par

$$(G\psi)(t) := \int_{-\infty}^t P_{S,-1} S_{-1}(t-\sigma) \psi(\sigma) d\sigma - \int_t^{\infty} P_{U,-1} S_{-1}(t-\sigma) \psi(\sigma) d\sigma$$

est un opérateur linéaire borné.

Preuve du Théorème 3.4. Considérons l'opérateur \mathcal{G} défini sur $C_b(\mathbb{R}, E_0)$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}\varphi)(t) & : = \int_{-\infty}^t P_{S,-1} S_{-1}(t-\sigma) (L\varphi_\sigma + f(\sigma)) d\sigma \\ & \quad - \int_t^{\infty} P_{U,-1} S_{-1}(t-\sigma) (L\varphi_\sigma + f(\sigma)) d\sigma \\ & = \int_{-\infty}^0 P_{S,-1} S_{-1}(-\sigma) (L\varphi_{t+\sigma} + f(t+\sigma)) d\sigma \\ & \quad - \int_0^{\infty} P_{U,-1} S_{-1}(-\sigma) (L\varphi_{t+\sigma} + f(t+\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

La fonction $\sigma \mapsto L\varphi_\sigma + f(\sigma)$ est dans $C_b(\mathbb{R}, E)$. D'après le lemme précédent, $(\mathcal{G}\varphi)(t) \in E_0, \forall t \in \mathbb{R}$. De plus, $\mathcal{G}\varphi$ est continue sur \mathbb{R} et

$$\|(\mathcal{G}\varphi)\|_\infty \leq \frac{2}{\delta} \alpha (\|L\| \|\varphi\|_\infty + \|f\|_\infty).$$

Nous avons

$$\|\mathcal{G}\varphi - \mathcal{G}\psi\|_\infty \leq \frac{2}{\delta} \alpha \|L\| \|\varphi - \psi\|_\infty,$$

\mathcal{G} est alors une contraction dans $C_b(\mathbb{R}, E_0)$, donc admet un point fixe $x(\cdot)$. Ce point

vérifie la formule (4), en effet

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^t P_{S,-1} S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma - \int_t^{+\infty} P_{U,-1} S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&= P_S S_0(t-s) \int_{-\infty}^s P_{S,-1} S_{-1}(s-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad + \int_s^t P_{S,-1} S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad - P_U S_0(t-s) \int_s^{+\infty} P_{U,-1} S_{-1}(s-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad + \int_s^t P_{U,-1} S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&= S_0(t-s) P_S \int_{-\infty}^s S_{-1}(s-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad + S_0(t-s) P_U \int_s^{+\infty} S_{-1}(s-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad + \int_s^t S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&= S_0(t-s)x(s) + \int_s^t S_{-1}(t-\sigma)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, s \leq t.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
x(t) &= (\lambda I - B_0)R(\lambda, B_{-1}) \int_{-\infty}^t S_{-1}(t-\sigma)P_{S,-1}(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad - (\lambda I - B_0)R(\lambda, B_{-1}) \int_t^{+\infty} S_{-1}(t-\sigma)P_{U,-1}(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&= (\lambda I - B_0) \int_{-\infty}^t S_{-1}(t-\sigma)P_{S,-1}R(\lambda, B_{-1})(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad - (\lambda I - B_0) \int_t^{+\infty} S_{-1}(t-\sigma)P_{U,-1}R(\lambda, B_{-1})(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&= (\lambda I - B_0) \int_{-\infty}^t P_S S_0(t-\sigma)R(\lambda, B)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma \\
&\quad - (\lambda I - B_0) \int_t^{+\infty} P_U S_0(t-\sigma)R(\lambda, B)(Lx_\sigma + f(\sigma))d\sigma.
\end{aligned}$$

L'unicité se démontre comme dans le théorème 3.2.

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$, alors on démontre, de la même manière que dans le théorème 3.3, que \mathcal{G} est une contraction dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E_0)$. Son point fixe n'est autre que la solution faible bornée de (1). ■

Références

- [1] Amann, H. : Parabolic equations in interpolation and extrapolation spaces, J. Functional Anal. **78** (1988), 233-270.
- [2] Amir, B. ; Maniar, L. : Application de la théorie d'extrapolation pour la résolution des équations différentielles à retard homogènes. Extracta Mathematicae Vol.**13**, Núm.1, 95-105 (1998).
- [3] Amir, B. ;Maniar, L. : Composition of Pseudo Almost Periodic Functions and Cauchy Problems with Operator of non Dense Domain, Annales Mathématiques Blaise Pascal Vol.**6**, n°1, jan.(1999).
- [4] Amir, B. ;Maniar, L. : Asymptotic behavior of hyperbolic Cauchy problems for Hille-Yosida operators with an application to retarded differential equations, to appear in Quaestiones Mathematicae.
- [5] Da Prato, G. ; Grisvard, P. : On extrapolation spaces, Rend. Accad. Naz. Lincei. **72** (1982), 330-332.
- [6] Engel, K. J. ; Nagel, R. : One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag 1999.
- [7] Hille, E. ; Philips, R.S. : Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Providence 1957.
- [8] Nagel, R. : One-Parameter Semigroups of Positive Operators, Lecture Notes in Mathematics **1184**, Springer-Verlag 1986.
- [9] Nagel, R. ; Sinestrari, E. : Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators, Marcel Dekker, Lecture Notes Pure Appl. Math. **150** (1994).
- [10] van Neerven, J. : The Adjoint of a Semigroup of Linear Operators, Lecture Notes Math. **1529**, Springer-Verlag 1992.
- [11] Nickel, G. ; Rhandi, A. : On the essential spectral radius of semigroups generated by perturbations of a Hille-Yosida operators, to appear in J. Diff. Integ. Equat..
- [12] Rhandi, A. : Extrapolation methods to solve non-autonomous retarded partial differential equations, Studia Math. **126** (3) (1997), 219-233.

Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure BP S/41
Marrakech
Morocco