Quelques remarques sur l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel complexe singulier particulier

Tocka Diagana

Résumé

Le but dans cet article est l'étude de l'opérateur de Schrödinger à potentiel complexe singulier. Un potentiel V choisi de telle sorte que l'on ne puisse définir la somme algébrique $S = -\Delta + V$. En effet en supposant que V vérifie : $V \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $V \notin L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $\Re e V > 0$ et si $N < 4$, alors S n'a pas de sens. Ainsi on montre qu'il existe une somme $(-\Delta \oplus V)$, étendant la somme algébrique telle que l'on puisse résoudre les équations du type $\lambda u + (-\Delta \oplus V)u = v$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Introduction

Le problème que l'on aborde dans ce papier est très classique. Il a été étudié par plusieurs mathématiciens par le passé, Brézis, Kato, Lapidus, Nelson, Simon ... Ces auteurs ont étudié l'opérateur de Schrödinger à potentiels singuliers complexes, singuliers positifs, singuliers imaginaires dans (cf [12], [5], [11], [13])... La nouveauté dans cet article c'est le choix d'un potentiel singulier complexe de sorte que l'on ne puisse définir la somme algébrique $S = -\Delta + V$, de façon précise on choisit le potentiel V de telle façon que $D(\Delta) \cap D(V) = \{0\}$. Dans ces conditions, il est tout a fait naturel de chercher à définir des extensions maximales de S. On peut définir une somme étendant la somme algébrique, la forme somme généralisée d'opérateurs

Received by the editors June 1999.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 47B44, 35J10, 49R20, 81Q05.
Key words and phrases : Forme somme, potentiel singulier, opérateur de Schrödinger, théorème du point fixe.

maximaux accrétifs (cf [7]). A l'aide du théorème du point fixe, on montre que les équations du type $\lambda u + (-\Delta \oplus V)u = v$, admettent une unique solution $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, pour $\Re e\lambda \geq \lambda_0$, pour cela on donnera une méthode directe permettant de montrer l'existence d'une solution, lorsque $N = 1$ et lorsque $N > 1$, on peut faire le même travail. Il est a noter que le choix de V dépend, dans le cas présent de la dimension N. En effet lorsque $N < 4$, on sait que l'opérateur somme S n'est pas défini mais lorsque $N \geq 4$, on ne sait pas si $D(\Delta) \cap D(V)$ est trop petit ou s'il est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ce fait est donné par les injections de Sobolev.

1 Préliminaires

1.1 Opérateur de Schrödinger

Dans la suite on se place dans l'espace de Hilbert complexe des fonctions mesurables de carrés sommables, $L^2(\mathbb{R}^N)$. Dans cet espace on considère les opérateurs

$$Au = -\Delta u, \quad D(A) = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N),$$

$$B_V u = Vu, \quad D(B_V) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \ Vu \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

L'opérateur A est autoadjoint monotone et $(-A)$ engendre un c_o semi-groupe $\exp(-At)_{t>0}$ et l'on a $\exp(-At)u = K_t \star u, \quad t > 0, \quad K_t = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Ainsi on a $(-\Delta + \lambda)^{-1}u = G_\lambda \star u$ ($\Re e\lambda > 0$) avec :

$$G_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \exp(-t\lambda) dt.$$

L'opérateur B_V est linéaire m-sectoriel ($\Re eV > 0$).

Théorème 0 (Sobolev). Soient k un entier naturel et $s > k + \frac{N}{2}$; alors l'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$ est continûment plongé dans l'espace $B^k(\mathbb{R}^N)$, des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^N$ ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur à k (Muni de sa norme naturelle). De plus on a

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} |D^\alpha u(x)| = 0 \quad \forall u \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N) \ \text{ et } \ |\alpha| \leq k.$$

1.2 Hypothèse sur V

On suppose dans la suite que le potentiel V vérifie :

$$H_V \quad \Re e(V) > 0, \ \ V \in L^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ et } \ V \notin L^2_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

2 Principaux résultats

Proposition 1. Sous l'hypothèse H_V et si $N < 4$, on a $D(A) \cap D(B_V) = \{0\}$.

Preuve. Soit $u \in D(A) \cap D(B_V)$. On suppose que $u \not\equiv 0$. Mais puisque u est continue (selon le théorème 0 de Sobolev, $N < 4$), il existe alors un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et $\mu > 0$ tels que $|u(x)| > \mu$ sur Ω. Soit Ω' une partie compacte de Ω, muni de la topologie induite par celle de Ω, donc par celle de $\mathbb{R}^N$. Ainsi Ω' est aussi une partie compacte de $\mathbb{R}^N$. On a $(|V|)|_{\Omega'} = \frac{(|Vu|)|_{\Omega'}}{(|u|)|_{\Omega'}} \notin L^2(\Omega')$. Mais $(|Vu|)|_{\Omega'} \in L^2(\Omega')$ et $\dfrac{1}{(|u|)|_{\Omega'}} \in L^\infty(\Omega')$ ce qui entraîne que $V\,|_{\Omega'} \in L^2(\Omega')$. D'où la contradiction.

Question. La Proposition 1 est-elle vraie lorsque $N \geq 4$?

Proposition 2. Sous l'hypothèse H_V, on a :

1. $D(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow D(B_V^{\frac{1}{2}})$, lorsque $N = 1$
2. $D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(B_V^{\frac{1}{2}}) \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ lorsque l'entier $N < 4$.

Preuve. Soit $u \in D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$. On a $D(B_V^{\frac{1}{2}}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : V|u|^2 \in L^1(\mathbb{R})\}$. Mais $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, $V^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R})$, alors $V^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $u \in D(B_V^{\frac{1}{2}})$. Ainsi on a $D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(B_V^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. De la même façon $D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(B_V^{\frac{1}{2}}) \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ lorsque l'entier $N < 4$. ce qui veut dire que $D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(B_V^{\frac{1}{2}})$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2.1 Exemple de potentiel vérifiant H_V

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ une partie compacte. Soit $g \in L^1(\Omega)$ telle que $g \notin L^2(\Omega), \Re e(g) > 0$ et $g \equiv 0$ sur Ω^c.
Soit $\mu_n = (\mu_n^1, ..., \mu_n^N) \in \mathbb{Q}^N$, une N - énumération rationnelle. On pose alors

$$V(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(x - \mu_k)}{k^2}.$$

Ainsi le potentiel V donné ci-dessus vérifie l'hypothèse H_V.

2.2 Forme somme généralisée

Les opérateurs A et B_V étant respectivement, auto-adjoint monotone et m-sectoriel. Si l'on considère les formes sesquilinéaires associées à ces deux opérateurs :

$$\Phi(u, v) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \overline{\nabla} v dx \quad u\ ,\ v \in D(\Phi) = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N),$$

$$\Psi(u, v) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} V u \overline{v} dx \quad u\ ,\ v \in D(\Psi) = D(B_V^{\frac{1}{2}}),$$

et soit $$\Xi(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \overline{\nabla} v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V u \overline{v} dx \quad \forall u, v \in D(\Xi) = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N) \cap D(B_V^{\frac{1}{2}}).$$

Alors la forme sesquilinéaire Ξ est strictement accrétive (Elle est sectorielle) fermée, de domaine $D(\Xi) = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N) \cap D(B_V^{\frac{1}{2}})$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, selon la proposition 2. Selon le premier théorème de représentation de Kato (cf [10] ou [7]), il existe alors un unique opérateur m-sectoriel $(-\Delta \oplus V)$ tel que : $\Xi(u, v) =< (-\Delta \oplus V)u, v >$ $\forall u \in D((-\Delta \oplus V)), \quad v \in D(\Xi)$.
Par ailleurs selon l'auteur dans ([7]), l'opérateur $(-\Delta \oplus V)$ vérifie la condition de Kato : $D((-\Delta \oplus V)^{\frac{1}{2}}) = D(\Xi) = D((-\Delta \oplus V)^{*\frac{1}{2}})$.

2.3 Méthode de résolution directe

On se limitera au cas $N = 1$. On sait selon ce qui précède que $D(\Delta) \cap D(V) = \{0\}$. La somme algébrique $S = -\Delta + V$ n'est donc pas définie. Le but est ici d'utiliser le théorème du point fixe pour montrer l'existence d'une solution pour les équations :

$$(E) \quad \lambda u + (-u'' \oplus Vu) = f \quad \text{dans} \;\; L^2(\mathbb{R}).$$

En effet soit $T_\lambda : \; u \longrightarrow G_\lambda \star (f - Vu)$, une application de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, où $G_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}|x|}$ (On peut supposer que $\lambda > 0$, le cas complexe se traite de la même façon).

Théorème 1. L'application T_λ applique $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ et admet un unique point fixe, solution de l'équation (E) si λ est assez grand ($\lambda \geq \lambda_0$).

Preuve. soit $T_\lambda(u) = G_\lambda \star f - G_\lambda \star (Vu)$. Montrons que $G_\lambda \star f$ et $G_\lambda \star (Vu) \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ si $u \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. En effet $G_\lambda \star f \in L^2(\mathbb{R})$ du fait que $G_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$ et en plus $\|G_\lambda \star f\|_2 \leq \|G_\lambda\|_1 \|f\|_2 = \frac{\|f\|_2}{\lambda}$. De même $(G_\lambda \star f)' = G'_\lambda \star f \in L^2(\mathbb{R})$, car $G'_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$. De plus, $\|G'_\lambda \star (f)\|_2 \leq \|G'_\lambda\|_1 \|f\|_2 = \frac{\|f\|_2}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$. Il vient que : $\|G_\lambda \star f\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} \leq (\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$. Par ailleurs $G_\lambda \star (Vu) \in L^2(\mathbb{R})$ car $G_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$ et $Vu \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi on a

$$\|G_\lambda \star (Vu)\|_2 \leq \|G_\lambda\|_2 \|QV\|_1 \leq \frac{C\|V\|_1 \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R})}}{2\lambda^{\frac{3}{4}}}.$$

De la même manière, $\|G'_\lambda \star (Vu)\|_2 \leq \frac{C'\|V\|_1 \|u\|_{\mathbb{H}^1(R)}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}$. L'application T_λ applique donc $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, cette application est affine en u, on ne s'intéresse qu'à l'expression en u, c'est à dire $G_\lambda \star (Vu)$. selon ce qui précède, on a : $\|G_\lambda \star (Vu)\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} \leq a(\frac{1}{\lambda^{1/2}} + \frac{1}{\lambda^{3/2}})^{\frac{1}{2}} \|V\|_1 \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R})}$.
Si on pose $C(\lambda) = a(\frac{1}{\lambda^{1/2}} + \frac{1}{\lambda^{3/2}})^{\frac{1}{2}} \|V\|_1$ alors $C(\lambda) \ll 1$ si $\lambda \geq \lambda_0$. Il vient donc que si $\lambda \geq \lambda_0$ l'application T_λ est une contraction stricte, par le théorème du point fixe il existe un unique point fixe $u_0 \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ pour T_λ. Ainsi u_0 est l'unique solution de (E) pourvu que λ soit assez grand.

On pose $Mu = (-\Delta \oplus V)u$, avec $u = G_\lambda \star f - G_\lambda \star (Vu)$ dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$.

Théorème 2. L'opérateur M défini ci-dessus est monotone si et seulement si $J_\lambda^M = (I + \lambda M)^{-1}$ est une contraction pour $\lambda \leq \frac{1}{\lambda_0}$.

Théorème 3. Soit $u \in \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors on a

$$< u, v >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{v}dx.$$

Théorème 4. Si $V \in L^1(\mathbb{R})$, $u \in L^2(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ et si $uv \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors

$$< Vu, v >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} Vu\overline{v}dx.$$

Preuve du théorème 4.
Première étape :
On suppose que $V \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, d'après le Théorème 3, on a :

$$< Vu, v >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} Vu\overline{v}dx.$$

Deuxième étape :
On suppose que $V > 0$ car $V = \Re eV + i\Im mV$, $\Re eV > 0$ et $\Im mV = (\Im mV)^+ - (\Im mV)^-$.
Troisième étape :
On pose $V_n = V \vee \{n\} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on a $\lim_{n\to\infty} \|V_n u - Vu\|_1 = 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \|V_n u - Vu\|_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})} = 0.$$

$$< V_n u, u >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} V_n|u|^2dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} V|u|^2dx =< Vu, v >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^1(\mathbb{R})},$$

par le Théorème de convergence dominée.

Preuve du théorème 2. Par hypothèse, $u + \lambda Mu = f$ dans $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})$. On a : $< u, u >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} + \lambda[< -u'', u >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} + < Vu, u >_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^1(\mathbb{R})}] =< f, u >$. Selon ce qui précède, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2dx + \lambda[\int_{-\infty}^{+\infty} |u'|^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty} V|u|^2dx] = \int_{-\infty}^{+\infty} fudx.$$

M est supposé monotone donc si λ est assez petit ($\lambda \leq \frac{1}{\lambda_0}$). Alors on a $\|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_2$, ce qui entraîne que $(I + \lambda M)^{-1}$ est une contraction et réciproquement.

Remarque. On peut faire la même chose lorsque $N > 1$.

Remerciements. On remercie le professeur J-B. BAILLON pour toutes les discussions que nous avons eues sur le sujet.

Références

[1] ADAMS, R.A : Sobolev spaces (Pure and applied. math., vol 65) New York : Academic Press. (1975).

[2] BIVAR-WEINHOLTZ, A and PIRAUX, R : Formule de Trotter pour l'opérateur $-\Delta + Q^+ - Q^- + iQ'$. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5 (1983), 15-37.

[3] BREZIS, H : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam. (1973).

[4] BREZIS, H : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Coll. Math. Appliquées Masson. (1983).

[5] BREZIS, H and KATO, T : Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials, J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 137-151.

[6] CHERNOFF, P-R : Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators. Memoirs. Amer. Math. Soc. 140 (1974).

[7] DIAGANA, T : Sommes d'opérateurs et conjecture de Kato-McIntosh. Thèse de spécialité, Lyon 1 (1999).

[8] KATO, T : On some schrödinger operators with a singular complex potential, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 5 (1978), 105-114.

[9] KATO, T : A second look at the essential selfadjointness of the Schrödinger operators, physical reality and Mathematical description, D. Reidel Publishing Co., 1974, pp. 193 - 201.

[10] KATO, T : Perturbation theory for linear operators, springer, 1966.

[11] LAPIDUS, M : Formule de Trotter et calcul opérationnel de Feynman, Thèse de Doctorat d'État.Université Paris VI, (1986)

[12] NELSON, E : Feynman integrals and the Schrödinger equation. J. Math. Phys., Vol 5, 1964, pp. 332 - 343.

[13] SIMON, B : Essential selfadjointness of Schrödinger operators with positive potentials. Math. Ann., Vol. 201, 1973, pp. 211 - 220.

Howard University
Department of Mathematics
2441 6th Street, N.W
Washington, DC 20059. USA.
E-Mail : tdiagana@howard.edu