Formalité des espaces sphériques

ElHassan Idrissi

Résumé

La classe des espaces sphériques contient la classe des espaces riemanniens symétriques. Généralisant le résultat de Deligne et al [2], nous montrons que les espaces sphériques (simples, compacts et connexes) qui ne sont pas l'espace total d'un S^1-fibré principal de base un espace hermitien symétrique sont formels.

Abstract

The set of spherical spaces contains the set of symmetric spaces as subset. The connected symmetric spaces are formal in the sense of Deligne et al [2]. We prove that, except those which are a total space of a principal S^1-bundle over hermitian symmetric space, all (connected, compact, simple) spherical spaces are formal.

1 Introduction.

La notion de variété formelle a été introduite par Deligne, Griffiths, Morgan et Sullivan en 1975, [2]. Ils ont démontré que les variétés Kählerienne compactes sont formelles. Pour rappel, Une variété (différentiable) M est formelle s'il existe une algèbre différentielle graduée commutative A et des quasi-isomorphismes d'algèbres différentielles graduées

$$A(M) \xleftarrow{\simeq} A \xrightarrow{\simeq} (H^*(M, \mathbb{R}), 0),$$

lorsque $A(M)$ désigne l'algèbre des formes différentielles de De Rham sur M.

Received by the editors August 2001.
Communicated by Y. Félix.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 55P62, 53C35.
Key words and phrases : Formalité. Modèle de Sullivan. Espaces sphériques.

Dans cet article nous nous intéressons plus particulièrement aux espaces homogènes sphériques : Un espace homogène G/K est *sphérique* si pour toute représentation continue irréductible de G, l'ensemble des vecteurs invariants par K constitue un espace vectoriel de dimension au plus 1 [1].

Les espaces sphériques sont des cas particuliers des espaces faiblement symétriques [7] dont l'intérêt en analyse harmonique nous a été signalé par D.N. Akhieser que nous remercions ici profondément.

Les espaces homogènes sphériques G/K, lorsque G est un groupe de Lie simple connexe et K est un sous-groupe fermé réductif connexe, ont été classifiés par M. Krämer , [6], de la manière suivante :

I) espaces symétriques. (cf. la liste de Cartan, [8])

II) S^1-fibrés principal de base un espace symétrique hermitien :

$$\begin{cases} SU(n+m)/SU(n)\times SU(m) \quad , & n>m>0 \\ SO(2n)/SU(n) \quad , & n>2,\ n \ \textit{impair} \\ E_6/D_5 & \end{cases}$$

III) $\begin{cases} SU(2n+1)/Sp(n)\,, & n>0 \\ SU(2n+1)/Sp(n)U(1) \quad , & n>0 \end{cases}$

IV) $\begin{cases} SO(8)/Spin(7) \\ SO(7)/G_2 \\ G_2/A_2 \end{cases}$

V) $\begin{cases} SO(10)/SO(2)\times Spin(7) \\ SO(9)/Spin(7) \\ SO(8)/G_2 \end{cases}$

VI) $\begin{cases} SO(2n+1)/U(n) \quad , & n>1 \\ Sp(n)/Sp(n-1)\times U(1) \quad , & n>0 \end{cases}$

Notre principal résultat s'énonce:

Théorème. *a) Tous les espaces G/K de type I), III), IV), V) et VI) sont formels.*
b) Il existe des espaces de type II) qui ne sont pas formels.

2 Formalité

Rappelons ici les principales propriétés concernant la formalité.

Propriété 1. [2] *Si M est formelle, alors les produits de Massey définis dans $H^*(M;\mathbb{R})$ sont nuls.*

En remplaçant l'algèbre des formes différentielles par l'algèbre des PL-formes sur un espace topologique, ([3]-§10), on définit la notion d'espace topologique $\mathbb{K}$-formel et ceci pour tout sur-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Q}$. Une variété formelle M est un espace $\mathbb{K}$-formel. La $\mathbb{K}$-formalité d'un espace est indépendante du corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, [5].

Si deux espaces M et M' ont le même type d'homotopie rationnelle ($M \simeq_{\mathbb{Q}} M'$) alors M est un espace formel ssi M' est un espace formel [5].

Notons, $\wedge V$ l'algèbre commutative graduée libre engendrée par l'espace vectoriel gradué V. Un espace homogène $M = G/K$, avec G compact, connexe et K un sous-groupe fermé de G, admet un modèle minimal de Sullivan de la forme :

$$(\wedge Q \otimes \wedge P \otimes \wedge V, d)$$

avec Q est un espace vectoriel gradué concentré en degrés pairs, P et V des espaces vectoriels concentrés en degrés impairs, $dQ = 0$, $dP \subset \wedge Q$, $dV = 0$ et V maximal pour cette propriété parmi toutes les écritures du modèle minimal, [3, 4].

Propriété 2. [4] *G/K est formel ssi $dim(P) = dim(Q)$ et dans ce cas $H^*(G/K; \mathbb{R}) = (\wedge Q/(dP)) \otimes \wedge V$.*

Propriété 3. *Si rang G = rang K alors G/K est formel.*

Propriété 4. *G/K est formel ssi G/T_K est formel, où T_K désigne un tore maximal de K.*

Propriété 5 *Si l'inclusion $K \hookrightarrow G$ induit une application surjective $H^*(G; \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(K; \mathbb{R})$ alors G/K est formel.*

Propriété 6 [3] *Si G/K est un espace riemannien symétrique avec G compact, connexe et K un sous-groupe fermé de G alors G/K est formel.*

3 Preuve du théorème

a) (**1**) D'après [4], l'injection $Sp(n) \longrightarrow U(2n)$ induit un homomorphisme surjectif $H^*(U(2n)) \longrightarrow H^*(Sp(n))$. De l'homéomorphisme $S^1 \times SU(n) \to U(n)$ nous déduisons alors que l'homomorphisme $H^*(SU(2n+1)) \to H^*(Sp(n))$ est aussi surjectif. La propriété 5 entraîne alors la formalité de $SU(2n+1)/Sp(n)\,, n \geq 1$.

Nous en déduisons aussi que $H^*(SU(2n+1)/Sp(n)) = \wedge(x_5, x_9, ..., x_{4n-1}, x_{4n+1})$.

(**2**) Il résulte de la suite exacte longue de Gysin de la fibration

$$S^1 \to SU(2n+1)/Sp(n) \to SU(2n+1)/Sp(n).U(1)$$

que

$$H^*(SU(2n+1)/Sp(n).U(1); \mathbb{R}) = \wedge(a_2))/(a_2^3) \otimes \wedge(a_9, a_{13}, ..., a_{4n+1}).$$

La forme de l'algèbre de cohomologie entraîne la formalité de $SU(2n+1)/Sp(n).U(1)$.

(**3**) $SO(8)/Spin(7) \simeq_{\mathbb{Q}} SO(8)/SO(7) \cong S^7$, donc $SO(8)/Spin(7)$ est formel.

(**4**) L'espace $SO(7)/G_2 \simeq_{\mathbb{Q}} S^7$ est formel ([3]-Theorem 21.6 et Proposition 16.6).

(**5**) $G_2/A_2 \cong S^6$ est formel ([8]-prop.8.12.7).

(**6**) $SO(10)/(SO(2) \times Spin(7))$ est formel par la propriété 2.

(**7**) $SO(9)/Spin(7) \simeq_{\mathbb{Q}} SO(9)/SO(7) \simeq_{\mathbb{Q}} S^{15}$ est formel.

(**8**) Considérons la fibration

$$SO(7)/G_2 \longrightarrow SO(8)/G_2 \longrightarrow SO(8)/SO(7) \simeq S^7\,.$$

Comme nous l'avons établi, $SO(7)/G_2 \simeq_{\mathbb{Q}} S^7$. Par suite $SO(8)/G_2 \simeq_{\mathbb{Q}} S^7 \times S^7$ est formel.

(**9**) Puisque

$$\text{rang } SO(2n+1) = \text{rang } U(n) = \text{rang } Sp(n) = \text{rang } (Sp(n-1) \times U(1)) = n$$

il résulte de la propriété 3 que $SO(2n+1)/U(n)$, $n > 1$ et $Sp(n)/Sp(n-1) \times U(1)$, $n > 0$, sont formels.

b) Considérons le S^1-fibré principal

$$SU(9)/(SU(5) \times SU(4)) \to SU(9)/S(U(5) \times U(4)).$$

A partir des techniques de([3]-§12-e) nous établissons que le modèle minimal de $SU(9)/(SU(5) \times SU(4))$ est de la forme :

$$\wedge(x_4, x_6, x_8, y_{11}, y_{13}, y_{15}, y_{17})$$

avec

$$dy_{11} = 2x_4x_8 - x_4^3 + x_6^2 \quad , \quad dy_{13} = x_6(x_4^2 + 2x_8)\,,$$
$$dy_{15} = x_4^2x_8 - 2x_4x_6^2 - x_8^2 \quad , \quad dy_{17} = 2x_4x_6(x_4^2 - x_8).$$

Ceci montre directement la non formalité de $SU(9)/(SU(5) \times SU(4))$.

Remerciement. Je tiens à remercier le professeur Jean-Claude Thomas pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et ses précieuses idées, au referee pour ses remarques et suggestions considérables.

References

[1] M. Brion, D. Luna, Th. Vust,*Espaces homogènes sphériques.* Invent. math. **84** (1986), 617-632 .

[2] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan, *Real homotopy theory of Kähler manifolds.* Inv. Math. **29** (1975), 245-274.

[3] Y. Félix, S. Halperin, J-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory.* Graduate Text in Math. **205** Springer Verlag 2000.

[4] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, curvature and cohomology.* Tome III Academic Press 1972.

[5] S. Halperin, J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences.* Adv. Math. **32** (1979), 233-279.

[6] M. Krämer, *Sphärishe untergruppen in Kompakten zusammenhängenden Liegruppen.* Compositio Mathematica **38** (1979) 129-153.

[7] H. Nguyên, *Compact weakly symmetric spaces and spherical pairs.* Math. DG/9808039 7aug 1998.

[8] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature.* McGraw-Hill 1967.

Université Mohamed 1er, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques, Oujda, Maroc.

Université D'Angers, Département de Mathématiques,
2, bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01 France