Calcul harmonique dans les algèbres p-Banach involutives et applications

A. El Kinani A. Ifzarne

Abstract

We define and study a functionnal harmonic calculus in complex p-Banach algebras, $0 < p \leq 1$, with a linear involution. This calculus consists in given a sens to $f(a)$ whenever a is an element of such algebra and f is a harmonic function in an open simply connected set containing Spa. Using this calculus we give, in p-Banach algebras, a proof of the square root lemma of J. W. M. Ford. We extend K. Fan's theorem and Von Neumann's inequality to harmonic functions. As another application, we construct harmonic functionnal calculus for real p-Banach algebras.

Résumé

On définit et on étudie un calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres p-Banach, $0 < p \leq 1$, complexes munies d'une involution d'espace vectoriel. Ce calcul permet de donner un sens à $f(a)$, où a est un élément de l'algèbre et f est une fonction harmonique sur un ouvert simplement connexe contenant Spa. Comme applications, nous donnons dans les algèbres p-Banach une preuve du lemme de J. W. M. Ford, sur l'existence de la racine carrée hermitienne. Ensuite nous établissons, pour les fonctions harmoniques, des résultats analogues à ceux de Ky Fan et de Von Neumann. Enfin, comme autre application, nous construisons un calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres p-Banach réelles.

Received by the editors April 2000.

Communicated by R. Delanghe.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 46 H 30, 46 H 99.

Key words and phrases : Algèbre p-Banach. Algèbre hermitienne. Fonction harmonique. Calcul fonctionnel harmonique. Involution généralisée.

Introduction. Le calcul fonctionnel harmonique défini et étudié dans [1] permet de donner un sens à $f(a)$, où f est une fonction harmonique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et a un élément d'une algèbre de Banach à involution d'algèbre continue tel que $Spa \subset D(z_0, R)$, $R > 0$ et $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$. Dans cet article, on se propose d'étendre et d'améliorer ce calcul fonctionnel dans le cadre des algèbres p-Banach, $0 < p \leq 1$, complexes munies d'une involution d'espace vectoriel: On considère les fonctions harmoniques sur un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$. Pour ces fonctions, on donne un sens à $f(a)$, où a est un élément de l'algèbre tel que $Spa \subset \Omega$. Dans le cas où f est une fonction holomorphe, l'expression de $f(a)$ donnée dans le cas harmonique coïncide avec celle donnée dans le cas holomorphe. De même, nous prouvons que ce calcul est unique et continu. Par ailleurs, nous montrons que, dans le cas où $Spa \subset D(z_0, R)$, $R > 0$ et $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, l'expression de $f(a)$ s'obtient par la formule intégrale de Poisson. Nous prouvons que le calcul harmonique est compatible avec les morphismes involutifs et établissons le "Spectral mapping theorem". Nous passons ensuite aux applications. Ainsi, nous donnons dans les algèbres p-Banach, une preuve du lemme de J. W. M. Ford, sur l'existence de la racine carrée hermitienne. Notre preuve utilise le calcul fonctionnel harmonique et exlique donc mieux le fait que la racine carrée est hermitienne. Puis nous établissons, pour les fonctions harmoniques, des résultats analogues à ceux de Ky Fan et de Von Neumann dans les algèbres p-Banach à involution généralisée hermitiennes. Enfin, comme autre application, nous construisons un calcul fonctionnel harmonique pour les algèbres p-Banach réelles. Les propriétés les plus significatives de ce calcul sont également étudiées.

1 Préliminaires.

Une involution d'espace vectoriel sur une algèbre complexe A est une application anti-linéaire $x \mapsto x^*$, de A dans A, telle que $x^{**} = x$, pour tout $x \in A$ ([2]). Une involution généralisée, sur A, est une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$ telle que $(xy)^* = y^*x^*$, pour tous x, y dans A (auquel cas on dit que c'est une involution d'algèbre), ou $(xy)^* = x^*y^*$, pour tous x, y dans A. Dans ce dernier cas, on dira que c'est un anti-morphisme involutif. Soit $(A, \| \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$. Pour $a \in A$, on définit la partie réelle de a notée Rea par $Rea = \frac{1}{2}(a + a^*)$. Un élément a de A est dit hermitien (resp., normal) si $a = a^*$(resp., $a^*a = aa^*$). On désigne par $H(A)$ (resp., $N(A)$) l'ensemble des éléments hermitiens (resp., normaux) de A. Une algèbre p-Banach complexe à involution d'espace vectoriel sera dite hermitienne si le spectre de tout élément hermitien est réel. Dans une algèbre de Banach involutive semi-simple, le théorème de Johnson ([13]) assure la continuité de l'involution. Ce résultat reste encore valable dans le cas p-Banach à involution généralisée. Nous nous intéressons aux fonctions harmoniques et holomorphes telles qu'elles sont définies dans [3]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On désigne par $h(\Omega)$ (resp., $H(\Omega)$) l'ensemble des fonctions harmoniques (resp., holomorphes) sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera noté $h(\Omega, \mathbb{R})$. On rappelle la définition suivante.

Définition 1.1. *([18]). Soient* $(X, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, *un espace p-normé,* Γ *une courbe rectifiable de* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction de* Γ *dans* X.
1) On dit que f *est p-admissible s'il existe une suite* $(f_n)_n$ *de fonctions complexes bornées Riemann intégrables sur* Γ *et une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* X *telles que, pour tout* $z \in \Gamma$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n f_n(z), \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_p \sup_{z\in\Gamma} |f_n(z)|^p < \infty.$$

2) On dit que f *est Riemann intégrable, si pour toute décomposition de* Γ *en arcs* $(\Gamma_i^j)_{1\leq i\leq n_j}$ *telle que*

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Gamma_i^j, \;\; \Gamma_i^j \cap \Gamma_{i+1}^j = \{z_i^{(j)}\}, \;\; \lim_j \max_{1\leq i\leq n_j} |\Gamma_i^j| = 0,$$

où $|\Gamma_i^j|$ *désigne la longueur de* Γ_i^j, *la limite des sommes*

$$\sum_{i=1}^{n_j} f(z_{i,j})(z_{i+1}^{(j)} - z_i^{(j)}), \;\; z_{i,j} \in \Gamma_i^j,$$

existe. Cette limite est dite l'intégrale de Riemann de f *le long de* Γ*; elle est notée* $\int_\Gamma f(z)dz$.

Remarque 1.2. *Soient* Γ *et* X *vérifiant les conditions de la définition 1.1 et* $f : \Gamma \to X$ *une fonction p-admissible sur* Γ. *Alors, d'après le théorme 3.8 de [18],* f *est Riemann intégrable sur* Γ *et on a*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \int_\Gamma f_n(z)dz.$$

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. On désigne par $D(z_0, R)$(resp., $\overline{D(z_0, R)}$) le disque ouvert (resp., fermé) de centre z_0 et de rayon R et par $C(z_0, R)$ le cercle de centre z_0 et de rayon R. Rappelons qu'on désigne par D (resp., $\overline{D}$) le disque unité ouvert (resp., fermé) centré en zéro. Dans toute la suite, z est un abus de notation pour ze, où $z \in \mathbb{C}$ et e est l'unité de A; et ρ est le rayon spectral défini, sur A, par $\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Spa\}$.

2 Calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres p-Banach complexes.

Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in h(\Omega)$. En utilisant le fait que toute fonction réelle harmonique, dans Ω, est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans Ω, on obtient deux fonctions $g, h \in H(\Omega)$ telles que $f = g + \overline{h}$. De plus cette décomposition est unique à l'addition prés d'une constante. Soient maintenant $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe unitaire et $a \in A$ avec $Spa \subset \Omega$. Par le calcul holomorphe ([18]), les éléments $g(a)$ et $h(a)$ existent dans A. Si de plus l'algèbre A est munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$, alors $g(a) + h(a)^* \in A$. Signalons que l'élément $g(a) + h(a)^*$ est indépendant du choix de la décomposition considérée. En effet si $f = g_1 + \overline{h_1}$ avec $g_1, h_1 \in H(\Omega)$, alors il existe une constante complexe c telle que $g_1 = g - c$ et $h_1 = h + \overline{c}$, sur Ω. Donc $g_1(a) + h_1(a)^* = g(a) - c + (h(a) + \overline{c})^* = g(a) + h(a)^*$. Ceci nous amène à poser ce qui suit.

Définition 2.1. *Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe unitaire munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$, Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $a \in A$ avec $Spa \subset \Omega$ et $f \in h(\Omega)$. On pose $f(a) = g(a) + h(a)^*$, pour toute décomposition $f = g + \overline{h}$ avec $g, h \in H(\Omega)$.*

Remarque 2.2. *(1) Comme conséquence immédiate de la définition 2.1, l'application $f \mapsto f(a)$ est un homomorphisme involutif d'espaces vectoriels et si $f \in H(\Omega)$, l'expression de $f(a)$ coïncide avec celle donnée par le calcul holomorphe classique ([18]).*
(2) Si une suite de fonctions $(f_n)_n \subset h(\Omega)$ converge uniformément vers une fonction $f \in h(\Omega)$, dans un ouvert simplement connexe contenu dans Ω et contenant Spa, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n(a) - f(a)\|_p = 0.$$

Considérons maintenant l'application Φ_a définie de $h(\Omega)$ dans A par $\Phi_a(f) = f(a)$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.3. *L'application Φ_a est caractérisée par les propriétés suivantes:*
(1) *C'est un homomorphisme involutif d'espaces vectoriels et sa restriction à $H(\Omega)$ est un morphisme d'algèbres.*
(2) *Si une suite de fonctions harmoniques $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction harmonique f dans un ouvert contenu dans Ω et contenant Spa, alors la suite $\Phi_a(f_n)$ converge vers $\Phi_a(f)$ pour la p-norme $\|.\|_p$.*

Preuve. Il reste à montrer que s'il existe une application possédant les propriétés (1) et (2), alors c'est nécessairement l'application Φ_a. Soit Ψ_a une telle application de $h(\Omega)$ dans A. Par (1), il suffit de montrer que $\Phi_a(f) = \Psi_a(f)$, pour toute fonction harmonique réelle. Soit $f \in h(\Omega)$ une fonction réelle. Il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $f = Reg$. Comme Spa est un compact contenu dans Ω, il existe un recouvrement fini, de Spa, par des disques ouverts $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans Ω. De plus le fait que Ω est connexe, montre qu'on peut supposer que $\bigcup_{i=1}^n D_i$ est connexe. Soit maintenant Γ_1 un contour fermé dans Ω tel que son intérieur $int\Gamma_1$ soit connexe et $\bigcup_{i=1}^n D_i \subset int\Gamma_1$. Alors le compact $K = \Gamma_1 \cup int\Gamma_1$ est contenu dans Ω. De plus $intK$ est un ouvert simplement connexe contenant Spa. Soit Γ_2 un autre contour dans Ω tel que $K \subset int\Gamma_2$. Alors, on a

$$f(z) = Re(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{g(z')}{z' - z} dz'), z \in int\Gamma_2.$$

Donc $f(z)$ est la limite des sommes de la forme

$$f_n(z) = Re(\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} g(z'_k)(z'_k - z)(z'_{k+1} - z'_k)),$$

où $z'_k \in \Gamma_2$, pour $k \in \{0,1,...,n\}$. Comme $K \subset int\Gamma_2$, f_n converge uniformément sur $intK$. D'où, d'après (2), $\lim_{n\to+\infty} \|\Psi_a(f_n) - \Psi_a(f)\|_p = 0$. Par ailleurs, d'après (1),

$$\Psi_a(f_n) = Re(\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n} g(z'_k)(z'_k - a)(z'_{k+1} - z'_k)) = \Phi_a(f_n).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \|\Phi_a(f_n) - \Phi_a(f)\|_p = 0$. D'où $\Phi_a(f) = \Psi_a(f)$.

Le calcul fonctionnel construit est continu pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. En fait on a le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe unitaire munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$ continue, Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $a \in A$ et K un compact contenu dans Ω tel que $Spa \subset intK$. Alors l'application Φ_a de $(h(\Omega), p_K)$ dans $(A, \|.\|_p)$ est continue, où $p_K(f) = \sup_{z\in K} |f(z)|$.*

Preuve. Soient $f = g + \overline{h}$ avec $g, h \in H(\Omega)$ une décomposition de f dans Ω et $(D(z_i, R_i))_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement fini de Spa avec $\overline{D(z_i, R_i)} \subset intK$, pour tout $i = 1, 2, ...n$. Soit $\varepsilon_i > 0$ tel que $D(z_i, R_i + \varepsilon_i) \subset intK$. Alors

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)(z-a)^{-1}dz,$$

où Γ est un contour fermé contenant Spa dans son intérieur $int\Gamma$ et $\Gamma \cup$ int Γ est contenu dans $\bigcup_{i=1}^n D(z_i, R_i)$. De plus, pour $|z - z_i| < R_i + \varepsilon_i$, on a

$$g(z) = \frac{1}{4\pi}\int_{|z'-z_i|=R_i+\varepsilon_i} f(z')\frac{z' + z - 2z_i}{z' - z}\frac{|dz'|}{R_i + \varepsilon_i}.$$

Pour $i = 1, 2, ...n$, posons

$$M_i = \sup\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{|z'-z_i|=R_i+\varepsilon_i} |\frac{z' + z - 2z_i}{z' - z}|\frac{|dz'|}{R_i + \varepsilon_i} : \ z \in \overline{D(Z_i, R_i)} \cap \Gamma\right\}.$$

On a

$$\sup\{|g(z)| : \ z \in \overline{D(Z_i, R_i)} \cap \Gamma\} \leq M_i p_K(f).$$

D'où

$$p_\Gamma(g) \leq (\sum_{i=1}^{n} M_i)p_K(f).$$

De même, en utilisant le fait que

$$h(z) = \frac{1}{4\pi}\int_{|z'-z_i|=R_i+\varepsilon_i} \overline{f(z')}\frac{z' + z - 2z_i}{z' - z}\frac{|dz'|}{R_i + \varepsilon_i}, \text{ pour } |z - z_i| < R_i + \varepsilon_i.$$

On obtient également

$$\sup\{|h(z)| : \ z \in \overline{D(Z_i, R_i)} \cap \Gamma\} \leq M_i p_K(f).$$

Donc $p_\Gamma(h) \leq (\sum_{i=1}^{n} M_i) p_K(f)$. Soit maintenant $\alpha > 0$ tel que $\|x^*\|_p \leq \alpha \|x\|_p$, pour tout $x \in A$. Alors on a

$$\|f(a)\|_p \leq \|g(a)\|_p + \alpha\|h(a)\|_p \leq M(p_\Gamma(g)^p + \alpha p_\Gamma(h)^p)$$

$$\leq M(\sum_{i=1}^{n} M_i)^p(\alpha+1)(p_K(f))^p,$$

où $M = \frac{|\Gamma|^p}{(2\pi)^p} \sup\{\|(ze-a)^{-1}\|_p : \ z \in \Gamma\}$.

Le calcul fonctionnel harmonique est compatible avec les morphismes involutifs continus comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe unitaire munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$ continue, $(B, \|.\|_q)$, $0 < q \leq 1$, une algèbre q-Banach complexe unitaire munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^\#$ continue et φ un morphisme de A dans B unitaire, continu et involutif. Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $a \in A$ avec $Spa \subset \Omega$ et $f \in h(\Omega)$. Alors $f(\varphi(a)) = \varphi(f(a))$.*

Preuve. Soit $f = g + \overline{h}$ avec $g, h \in H(\Omega)$ une décomposition de f dans Ω. On a

$$\varphi(f(a)) = \varphi(g(a) + h(a)^*) = \varphi(g(a)) + \varphi(h(a))^\#$$

$$= g(\varphi(a)) + h(\varphi(a))^\# = f(\varphi(a)).$$

Comme conséquence, on a le "Spectral mapping theorem".

Corollaire 2.6. *Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe unitaire commutative munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$ continue et hermitienne, Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $a \in A$ avec $Spa \subset \Omega$ et $f \in h(\Omega)$. Alors $f(Spa) = Sp(f(a))$.*

Remarque 2.7. *Dans une algèbre p-Banach, $0 < p \leq 1$, complexe non nécessairement commutative, munie d'une involution généralisée $x \mapsto x^*$ hermitienne, on montre que le "Spectral mapping theorem" reste encore vrai pour les éléments normaux.*

Si Ω contient un disque fermé contenant Spa dans son intérieur, alors le calcul fonctionnel harmonique donné par la définition 2.1 s'exprime par la formule intégrale de Poisson.

Proposition 2.8. *Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe unitaire munie d'une involution d'espace vectoriel $x \mapsto x^*$ continue, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_o \in \Omega$ tel que $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, $R > 0$, $a \in A$ avec $Spa \subset D(z_0, R)$ et $f \in h(\Omega)$. Alors*
(i) la fonction $z \mapsto f(z)Re[(z + a - 2z_0)(z-a)^{-1}]$ est p-admissible sur $C(z_0, R)$
(ii) l'expression de $f(a)$, donnée par la définition 2.1, coïncide avec

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z) Re[(z + a - 2z_0)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{R}.$$

Preuve. Pour raison de commodité, nous prenons, sans perte de généralité, $z_0 = 0$.
(i) Comme $\rho(a) < R$, on a

$$Re[(z+a)(z-a)^{-1}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^k}{R^{2k}} a^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{R^{2k}} (a^k)^* - e.$$

Par la continuité de l'involution, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x^*\|_p \leq \alpha \|x\|_p$, pour tout $x \in A$. Soit $r > 0$ tel que $\rho(R^{-1}a) < r < 1$. Pour k assez grand, on a $\|(R^{-1}a)^k\|_p \leq r^{kp}$. Donc $\|[(R^{-1}a)^k]^*\|_p \leq \alpha r^{kp}$. Il s'en suit que la fonction $z \mapsto Re[(z+a)(z-a)^{-1}]$ est p-admissible sur $C(0,R)$. Donc la fonction $z \mapsto f(z)Re[(z+a)(z-a)^{-1}]$ est p-admissible sur $C(0,R)$ du fait que f est continue sur $C(0,R)$.
(ii) Il suffit de considérer $f \in H(\Omega)$. Soit $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ sur un disque ouvert $D(0,R_1)$, $R < R_1$, contenu dans Ω. Soient r_1 et r_2 tels que $\rho(a) < r_1 < R < r_2 < R_1$. Alors $\|a^n\|_p \leq r_1^{np}$, pour n assez grand. En prenant $M = \max\limits_{|z|=r_2} |f(z)|$, l'inégalité $|\alpha_n| \leq M r_2^{-n}$ montre que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n$ converge dans A. De plus $f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n$. Pour $n = 0, 1, 2, ...$, on montre comme pour (i) que la fonction $z \mapsto z^n Re[(z+a)(z-a)^{-1}]$ est p-admissible sur $C(0,R)$ et que l'on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} z^n Re[(z+a)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{R} = a^n \ , \ \ n = 0, 1, 2, ...$$

Finalement,

$$\|\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} f(z) Re[(z+a)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{R} \ - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n a^n \|_p$$

$$= \|\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} (\sum_{n>N} \alpha_n z^n) Re[(z+a)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{R} \|_p$$

$$\leq M^p \sup_{|z|=R} \left\{ \|Re[(z+a)(z-a)^{-1}]\|_p \right\} \sum_{n>N} (R^p r_2^{-p})^n.$$

Donc

$$\lim_{N \to +\infty} \|\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} f(z) Re[(z+a)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{R} \ - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n a^n \|_p = 0.$$

D'où

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} f(z) Re[(z+a)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{R}.$$

Remarque 2.9. *Le calcul fonctionnel harmonique donné par la définition 2.1 est une amélioration du calcul harmonique donné dans [1]. Sgnalons aussi que dans [1], les algèbres de Banach considérées sont munies d'une involution d'algèbre. Ici il s'agit d'algèbres p-Banach munies d'involution d'espace vectoriel.*

3 Applications.

Le résultat qui suit a été obtenu par J. W. M. Ford ([11]) dans le cas Banach. Nous en donnons ici une preuve qui explique mieux le fait que la racine carrée est hermitienne.

Proposition 3.1. *Soient* $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, *une algèbre p-Banach complexe unitaire à involution généralisée* $x \mapsto x^*$ *et* $h \in H(A)$ *tel que* $Sph \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. *Alors il existe* $k \in H(A)$ *tel que* $k^2 = h$.

Preuve. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ z \notin \mathbb{R}_-\}$. Il existe une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que $f^2(\lambda) = \lambda$ et $f(1) = 1$. Soit Γ un contour fermé contenant Sph dans son intérieur $int\Gamma$ et $int\Gamma \cup \Gamma$ est contenu dans Ω. Posons

$$k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - h)^{-1}d\lambda.$$

Comme le calcul fonctionnel holomorphe est un morphisme d'algèbres ([18]), on a

$$k^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^2(\lambda)(\lambda - h)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda(\lambda - h)^{-1}d\lambda = h.$$

Il reste à montrer que k est hermitien. Soient B la sous-algèbre fermée involutive commutative unitaire, contenant h et telle que $Sp_B x = Sp_A x$, pour tout $x \in B$. Soit $s : B \to B/RadB$ la surjection canonique. L'algèbre $B/RadB$ est semi-simple. De plus, on a

$$Sp_{B/RadB}s(h) = Sp_B h = Sp_A h \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re\lambda > 0\}.$$

Montrons que $s(k)$ est hermitien. Soient r et r' tels que $0 < r < r'$, $Sph \subset D(r', r)$ et $\overline{D(r', r)} \subset \Omega$. Par la proposition 2.8, on a

$$s(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-r'|=r} f(z)Re[(z + s(h) - 2r')(z - s(h))^{-1}]\frac{|dz|}{r}.$$

Donc

$$s(k)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-r'|=r} \overline{f(z)}Re[(z + s(h) - 2r')(z - s(h))^{-1}]\frac{|dz|}{r}.$$

Par ailleurs, pour tout $z \in \Omega$, on a $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$. D'où

$$s(k)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-r'|=r} f(\overline{z})Re[(\overline{z} + s(h) - 2r')(\overline{z} - s(h))^{-1}]\frac{|d\overline{z}|}{r} = s(k).$$

Ainsi $k^* - k \in RadB$. Posons $k = u + iv$, $u, \ v \in H(A)$. Comme $k^2 = h$, on a $uv = 0$. Or u est inversible vu que $0 \notin Sp_B h$ et $v \in RadB$. Donc $v = 0$ et par conséquent $k = k^*$.

Dans toute la suite, $|.|$ désignera la fonction de Ptàk ([16]) définie, sur A, par $|a|^2 = \rho(aa^*)$, où ρ est le rayon spectral. Dans le cas d'une involution d'algèbre hermitienne, on montre comme dans [16] que $|.|$ est une semi-norme d'algèbre telle que $\rho \leq |.|$ et $|x^2| = |x^*x|$, pour tout $x \in A$. De plus $RadA = \{x \in A \ : \ |x| = 0\}$. Dans le cas à anti-morphisme involutif, le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 3.2. *Soit* $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, *une algèbre p-Banach complexe à anti-morphisme involutif hermitien* $x \mapsto x^*$. *Alors* $A/RadA$ *est commutative. Donc* $|.|$ *est une semi-norme d'algèbre telle que* $\rho \leq |.|$ *et* $|x^2| = |x^*x|$ *pour tout* $x \in A$. *De plus* $RadA = \{x \in A \,:\, |x| = 0\}$.

Preuve. Quitte à remplacer A par $A/RadA$, on peut supposer que l'agèbre est semi-simple. Donc l'anti-morphisme $x \mapsto x^*$ est continu. Par conséquent l'algèbre réelle $H(A)$ est une algèbre p-Banach telle que $Sp_{H(A)}h = Sp_A h \subset \mathbb{R}$, , pour tout $h \in H(A)$. Par ailleurs, en utilisant le théorème 3.10 de [18] et le fait que le quotient d'une algèbre p-Banach par un idéal primitif est une algèbre primitive, on montre que le théorème 4.8 de Kaplansky ([14]) s'étend aux algèbres p-Banach. Ainsi $H(A)/Rad(H(A))$ est commutative. Pour finir montrons que $Rad(H(A)) = (0)$. Soit $h \in Rad(H(A))$ et $a = u + iv \in A$, avec $u, v \in H(A)$. Alors $\rho(hu) = 0$ et $\rho(hv) = 0$. Comme A est hermitienne, on a $e + ik$ qui est inversible pour tout $k \in H(A)$. Donc $\rho(ha) = 0$. D'où $h \in RadA = \{0\}$.

Soit $a \in A$ tel que $\rho(a) < 1$ et $|a| < 1$. Comme dans le cas Banach à involution d'algèbre ([12]), on montre que la transformation de Mobius

$$\Phi_a(\lambda) = (e - aa^*)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + a)(e + \lambda a^*)^{-1}(e - a^*a)^{\frac{1}{2}}$$

est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}$. De plus $\Phi_a(0) = a$ et l'image du cercle unité, par Φ_a , est dans U_e la composante connexe de l'unité dans l'ensemble des éléments unitaires de A. Rappelons qu'un élément a est dit unitaire si $a^*a = aa^* = e$. Dans la suite, l'ensemble des éléments unitaires de A sera noté $U(A)$.

Voici une version de l'inégalité de Von Neumann, pour les fonctions harmoniques dans les algèbres p-Banach à involution généralisée hermitiennes.

Théorème 3.3. *Soit* $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, *une algèbre p-Banach complexe à involution généralisée hermitienne* $x \mapsto x^*$, Ω *un voisinage de* $\overline{D}$, $a \in A$ *tel que* $|a| \leq 1$ *et* $f \in h(\Omega)$. *Si* $|f(z)| \leq 1$, *pour tout* $z \in \overline{D}$, *alors* $|f(a)| \leq 1$.

Preuve. Quitte à considérer $A/RadA$, ce qui ne change pas le spectre, on peut supposer que A est semi-simple. D'où, par le lemme 3.2, le cas d'un anti-morphisme involutif se ramène au cas d'une involution d'algèbre. De plus $|.|$ est une norme d'algèbre vue que A est semi-simple. Par ailleurs $\rho(x) = \lim\limits_n |x^n|^{\frac{1}{n}}$, pour tout $x \in A$ car $\rho \leq |.|$ et $|.|$ est une semi-norme d'algèbre. Par une preuve analogue à celle d'un résultat de Vesentini ([17]), on montre que la fonction $\lambda \mapsto \rho(\Phi_a(\lambda))$ est sous -harmonique sur un voisinage de $\overline{D}$. D'où, par le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques, $Sp(\Phi_a(\lambda)) \subset \overline{D}$, pour tout $|\lambda| \leq 1$. Par le calcul harmonique, $f(\Phi_a(\lambda))$ est bien défini pour $|\lambda| \leq 1$. Soit φ dans le dual topologique de $(A, |.|)$. Considérons la fonction $F(\lambda) = Re\varphi\bigg(f(\Phi_a(\lambda))\bigg)$. Montrons que F est harmonique sur D. Soit $r > 1$ tel que $D(0, r) \subset \Omega$. Pour $\lambda \in D$, on a

$$f(\Phi_a(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} f(z) Re[(z + \Phi_a(\lambda))(z - \Phi_a(\lambda))^{-1}] \frac{|dz|}{r}.$$

Pour $|z| = r$ fixé, la fonction

$$g : \lambda \mapsto Re[(z + \Phi_a(\lambda))(z - \Phi_a(\lambda))^{-1}]$$

est harmonique sur D et continue sur $\overline{D}$. D'où

$$\varphi(g(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} \varphi(g(w)) Re[(w + \lambda)(w - \lambda)^{-1}] |dw|.$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi[f(\Phi_a(\lambda))] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|z|=r} \int_{|w|=1} \varphi(g(w)) f(z) Re[(w + \lambda)(w - \lambda)^{-1}] \frac{|dz|}{r} |dw|.$$

On vérifie que la fonction $\lambda \mapsto \varphi[f(\Phi_a(\lambda))]$ est harmonique sur D. De plus elle est continue sur $\overline{D}$. Donc par le principe du maximum, on a $|F(0)| \leq \sup\limits_{|\lambda|=1} |F(\lambda)|$. Par conséquent

$$Re\varphi(f(a)) \leq \sup_{|\lambda|=1} Re\varphi[f(\Phi_a(\lambda))].$$

D'où

$$Re\varphi(f(a)) \leq \sup Re\varphi[f(U_e)].$$

D'après le théorème de séparation ([4], p. 417), on obtient $f(a) \in \overline{Co}f(U_e)$, où $\overline{Co}f(U_e)$ désigne la fermeture de l'enveloppe convexe de $f(U_e)$ dans $(A, |.|)$. D'où $|f(a)| \leq \sup\{|f(u)| : u \in U_e\}$. Pour finir, montrons que $|f(u)| \leq 1$, pour tout $u \in U_e$. Soit $u \in U_e$. Alors $\rho(u) = |u| = 1$. D'où $Sp(u) \subset \overline{D}$. Comme $f(u)$ est un élément normal, on a $|f(u)| = \rho(f(u))$. D'où, par le "Spectral mapping theorem" donné par la remarque 2.7, on a $Sp(f(u)) = f(Spu)$. Donc $|f(u)| \leq 1$.

Le résultat suivant est une version du principe du maximum pour le calcul harmonique dans les algèbres p-Banach hermitiennes.

Théorème 3.4. *Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe à involution généralisée hermitienne $x \mapsto x^*$ et $f \in h(D)$. Pour $0 < r < 1$, on pose $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Alors $M(r) = \max\limits_{|a|\leq r} |f(a)|$.*

Preuve. On applique le principe du maximum à la fonction $g(z) = M(r)^{-1} f(rz)$ harmonique sur $D(0, r^{-1})$ et le théorème 3.3.

Une conséquence immédiate du théorème 3.4 est l'analogue de l'inégalité de Ky Fan suivante ([10]).

Théorème 3.5. *Soit $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe à involution généralisée hermitienne $x \mapsto x^*$, $a \in A$ tel que $|a| < 1$ et $f \in h(D)$. Si $|f(z)| < 1$, pour tout $z \in D$, alors $|f(a)| < 1$.*

Remarque 3.6. *(1) Comme dans le cas classique, on montre que les théorèmes 3.3 et 3.5 sont équivalents.*
(2) En utilisant le théorème 3.3 et le lemme III.5 de [8], on obtient les analogues des résultats précédents pour les contractions topologiques ([8], p. 199).

4 Calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres p-Banach réelles.

Dans cette section, $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, est une algèbre p-Banach réelle unitaire. On désigne par $A_{\mathbb{C}} = A + iA$ la complexifiée de A. L'application $(x+iy)^* = x - iy$ définit un anti-morphisme involutif sur $A_{\mathbb{C}}$. Comme dans la définition 2.1, on peut définir le calcul harmonique pour des fonctions réelles harmoniques sur un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$. En effet, soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in h(\Omega, \mathbb{R})$. Il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $f = Reg$ sur Ω. Pour $a \in A$ avec $Spa \subset \Omega$, on pose $f(a) = \frac{1}{2}(g(a) + g(a)^*)$, où $g(a)$ est donné par le calcul fonctionnel holomorphe. Comme $f(a) = Re(g(a))$, on a $f(a) \in A$. Soit Γ un contour fermé contenant Spa dans son intérieur $int\Gamma$ et tel que $\Gamma \cup int\Gamma \subset \Omega$. Comme Spa est symétrique par rapport à l'axe réel, on a $Spa \subset int\overline{\Gamma}$, où $\overline{\Gamma}$ est l'image de Γ par l'application $z \mapsto \overline{z}$ (symétrie par rapport à l'axe réel). Si $\overline{\Gamma} \cup int\overline{\Gamma} \subset \Omega$, alors on a

$$f(a) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{\Gamma} g(z)(z-a)^{-1}dz + \int_{\overline{\Gamma}} \overline{g(\overline{z})}(z-a)^{-1}dz \right] .$$

Si maintenant Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ tel que $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, $R > 0$, $a \in A$ avec $Spa \subset D(z_0, R)$ et f une fonction harmonique réelle sur Ω. Alors, par la proposition 2.8, l'expression de $f(a)$ est donnée par la formule de Poisson

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z)[R^2 - (a-z_0)(a-\overline{z_0})][(\overline{z}-a)(z-a)]^{-1} \frac{|dz|}{R}.$$

Remarque 4.1. *(1) Comme, pour tout $|z - z_0| = R$, on a*

$$Re[(z + a - 2z_0)(z-a)^{-1}] = [R^2 - (a-z_0)(a-\overline{z_0})][(\overline{z}-a)(z-a)]^{-1},$$

l'expression précedente, de $f(a)$, n 'est autre que celle donnée par la proposition 2.8.
(2) L'application $f \mapsto f(a)$ est un homomorphisme continu d'espaces vectoriels.

Remarque 4.2. *Par la remarque 2.7, le "Spectral mapping theorem" est vrai, pour les fonctions harmoniques réelles, dans les algèbres p-Banach strictement réelles (i.e., dans lesquelles le spectre de tout élément est réel) car dans ce cas, la complexifiée de A est une algèbre p-Banach à involution généralisée hermitienne. Nous allons voir qu'il est également vrai pour les éléments dits strictement réels d'une algèbre p-Banach réelle quelconque.*

Définition 4.3. *Un élément a d'une algèbre réelle A est dit strictement réel si la bicommutante, notée $\{a\}''$, de $\{a\}$ dans A est strictement réelle.*

Proposition 4.4. *("Spectral mapping theorem"). Soient $(A, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach réelle unitaire, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ tel que $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, $R > 0$, a un élément strictement réel de A tel que $Spa \subset \{t \in \mathbb{R} : |t - z_0| < R\}$ et $f \in h(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $f(Spa) = Sp(f(a))$.*

Preuve. Il suffit de montrer que la bicommutante, notée $[a]''$, de $\{a\}$ dans la complexifiée $A_{\mathbb{C}}$ est une algèbre hermitienne. Pour cela, il est claire que $[a]''$ est une algèbre p-Banach réelle pleine contenant a, stable par l'anti-morphisme $(x+iy)^* = x - iy$ de $A_{\mathbb{C}}$. De plus on vérifie facilement que $[a]'' \cap A = \{a\}''$.

Remarque 4.5. *Le "Spectral mapping theorem" ne reste plus valide pour des éléments non strictement réels. En effet, dans l'algèbre réelle $\mathbb{C}$, on a $Sp(Imi) = \{0\}$ et $Im(Spi) = \{-1, 1\}$.*

References

[1] M. Akkar, A. El Kinani et M. Oudadess, *Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel.* Ann. Sci. Math. Quebec 12 (1988), 151-169.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras.* Springer Verlag, New York, 1973.

[3] H. Cartan, *Théories élèmentaires des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris, 1963.

[4] N. Dunford and J.T. Schwarts, *Linear operators.* interscience, New York, pt.I, 1958, pt. II, 1963.

[5] A. El Kinani, *Holomorphic functions operating in hermitian Banach algebras.* Proc. Amer. Math.Soc., 111(4) (1991), 931-939.

[6] A. El Kinani, *Harmonic functions operating in hermitian Banach algebras.* Publicacions Matematiques, Vol 41 (1997), 403-409.

[7] A. El Kinani, *Fonctions harmoniques opérant sur les algébres de Banach involutives.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 41 (1991), 493-509.

[8] A. El Kinani, *Fonctions analytiques de contractions topologiques dans les algèbres hermitiennes.* Collect. Math. 41 (1990), 197-216.

[9] A. El Kinani, *Calcul harmonique dans les algébres de Banach hermitiennes.* Rendiconti Circolo Matematico Palermo XLII (1993), 257-272.

[10] K. Fan, *Analytic functions of a proper contraction.* Math. Z . 160 (1978), 275-290.

[11] J. W. M. Ford, *A square root lemma for Banach -algebras.* J. London Math. Soc. 42 (1967) pp.521-522.

[12] L. Harris, *Banach algebras with involution and Mbius transformation.* J. Functional Analysis 11 (1972), 1-16.

[13] B. E. Johnson, *The uniqueness of the complete norm topology.* Bull. Amer. Math. Soc 73(1967), pp. 537-539.

[14] I. Kaplansky, *Normed algebras.* Duke Math. J. 16 (1949), pp. 399-418.

[15] J. V. Neumann, *Eline Spektraltheorie fr allgemeine Operatoren eines Unitren Raumes.* Math. Nachr, 4(1951), 258-281.

[16] V. Ptàk, *Banach algebras with involution.* Manuscripta Math. 6(1972), pp. 245-290.

[17] Vesentini, *On the subharmonicity of the spectral radius.* Boll, Un, Mat, Ital. 4 (1968), 427-429.

[18] W. Zelazko, *Selected topics on topological algebras.* Lecture notes series 31(1971).

Ecole Normale Supérieure
B.P. 5118-Takaddoum,
10105 Rabat (Maroc).