Caractères continus dans les algèbres à poids

H. El Adlouni L. Oubbi

Abstract

If V is a system of weights (not necessarily upper semi-continuous) on a Hausdorff completely regular space X and A is a locally convex algebra. We give a description of all continuous characters of some locally convex algebras contained either in $CV(X)$ or in $CV_0(X, A)$. This contains several results of different authors.

1 Introduction et préliminaires

Dans cette note nous donnons une description des caractères continus de certaines algèbres localement convexes contenues soit dans $CV(X)$ soit dans $CV_0(X, A)$, où V est un système de poids non nécessairement semi-continus supérieurement sur X et A une algèbre localement convexe (a.l.c). Dans toute la suite A sera donc une a.l.c séparée sur le corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dont la topologie est engendrée par la famille $\mathbb{P}$ de semi-normes, X un espace complètement régulier séparé et V une famille de fonctions positives définies sur l'espace X et vérifiant :
1. pour tout $x \in X$, il existe $v \in V$ tel que $v(x) > 0$.
2. pour tous $v_1, v_2 \in V$ et $\lambda > 0$, il existe $w \in V$ tel que $\max(\lambda v_1, \lambda v_2) \leq w$.
Une telle famille V est dite système de poids sur X. Si de plus chaque poids $v \in V$ est semi-continu supérieurement (s.c.s), on dit alors que V est une famille de Nachbin sur X. On désigne par $C(X, A)$ (resp. $C_b(X, A)$) l'espace de toutes les applications continues (resp. applications continues et bornées) de X à valeurs dans A. Si $A = \mathbb{K}$, on les note respectivement par $C(X)$ et $C_b(X)$. On note par $M^*(A)$ (resp. $M(A)$) l'ensemble de tous les caractères (resp. caractères continus) de A.

Received by the editors April 2000.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 46H05, 46E25.
Key words and phrases : Algèbre localement convexe, caractère continu, algèbre à poids.

D'habitude ([2], [5], [7], [8]), pour une famille de Nachbin V sur X, les espaces à poids $CV(X,A)$ et $CV_0(X,A)$ sont définis comme suit :

$$CV(X,A) := \{F : X \to A \text{ continue} : vp \circ F \ \text{ bornée sur } X; v \in V, p \in \mathbb{P}\}$$

$$CV_0(X,A) := \{F : X \to A : vp \circ F \ \text{ tend vers zéro à l'infini; } \ v \in V, p \in \mathbb{P}\}.$$

La semi-continuité supérieure des poids donne que $CV_0(X,A)$ est un sous-espace vectoriel de $CV(X,A)$. A défaut de cette condition, cette inclusion n'est plus vraie, puisque une fonction non s.c.s qui tend vers zéro à l'infini n'est pas nécessairement bornée, comme le montre l'exemple où $X = \mathbb{R}^+$ et $V := \{lv_n; n \in \mathbb{N}, l > 0\}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n(t) = p$ si $t = \frac{1}{p}; p \in \mathbb{N}, v_n(t) = 0$ si $|t| \geq n$ et $v_n(t) = 1$ sinon. Alors V est un système de poids sur X tel que $1 \in CV_0(X,\mathbb{K})$ mais $1 \notin CV(X,\mathbb{K})$. Ainsi adoptons-nous dans toute la suite la définition suivante :

$$CV_0(X,A) := \{F \in CV(X,A) : vp \circ F \text{ tend vers zéro à l'infini; } v \in V, p \in \mathbb{P}\}.$$

Dans le cas d'une famille de Nachbin V, ces deux définitions coïncident évidemment. Nous munissons alors les deux espaces de la topologie à poids $\tau_{V,\mathbb{P}}$ engendrée par les semi-normes $(p_v)_{v \in V, p \in \mathbb{P}}$; où

$$p_v(F) := \sup_{x \in X} v(x)p(F(x)), F \in CV(X,A).$$

Dans le cas scalaire, on omettra des notations les symboles A et $\mathbb{P}$ et on écrira $CV(X)$ (resp. $CV_0(X)$) au lieu de $CV(X,\mathbb{K})$ (resp. $CV_0(X,\mathbb{K})$) et τ_V au lieu de $\tau_{V,|\ |}$.
Remarquons que, dans plusieurs travaux sur les espaces à poids, lorsque V est une famille de Nachbin, chaque poids v coïncide avec son poids associé

$$\check{v}(x) := \frac{1}{\sup\{|f(x)|; |f|_v \leq 1\}}, x \in X.$$

Quand on omet la semi-continuité supérieure des poids, cette égalité tombe évidemment en défaut puisque $\check{v}$ est toujours s.c.s.
Dans le cas où $A = \mathbb{K}$ et V est une famille de Nachbin sur X, la description des caractères continus de toute a.l.c $E \subset CV(X)$ qui est auto-adjointe et un $C_b(X)$-module a été donnée dans [6]. Le cas vectoriel a été examiné dans différentes situations par différents auteurs. W. Govaerts considère dans [4] une algèbre A à produit continu et un système sous-multiplicatif V (i.e. vérifiant $V \leq V.V$) de poids bornés et tendant vers zéro à l'infini, de sorte que $CV(X,A)$ coïncide avec $CV_0(X,A)$ et soit une algèbre localement convexe à produit continu. Il montre alors que tout caractère continu χ de $CV_0(X,A)$ est de la forme $\chi = \phi \circ \delta_x$, où ϕ est un caractère continu de A et δ_x est l'évaluation $F \mapsto F(x)$ au point $x \in X$. Plus tard, J.B. Prolla [8] considère une famille de Nachbin V et une algèbre A à produit continu telles que $CV_0(X,A)$ est une algèbre à produit continu. Il montre alors que tout caractère continu sur $CV_0(X,A)$ a encore la même forme que ci-dessus. Récemment, S. Dierolf et al [3] montrent que, pour une algèbre à produit continu A, les caractères (algébriques) de $C(X,A)$ ont toujours la même forme sous certaines

conditions supplémentaires sur A et X.
Ici, pour un système de poids quelconques V, nous caractérisons les caractères de toute algèbre localement convexe $E \subset CV(X)$ qui est un $C_b(X)$-module auto-adjoint (cf. Théorème 1). Ensuite, pour une algèbre solide $E \subset CV_0(X)$, on définit l'espace vectoriel

$$EV(X, A) := \{F \in CV_0(X, A) : p \circ F \in E \text{ pour tout } p \in \mathbb{P}\}.$$

Nous montrons que, chaque fois que $EV(X, A)$, munie de la topologie $\tau_{V,\mathbb{P}}$, est une a.l.c, tout caractère continu de $EV(X, A)$ s'écrit $\chi = \phi \circ \delta_x$ avec ϕ un caractère continu de A et x un point de $coz(E)$. Il est à rappeler ici que si F est une sous-algèbre d'une algèbre localement convexe E, il n'existe pas nécessairement de lien entre $M(E)$ et $M(F)$. Ceci justifie la considération des algèbres $EV(X, A)$.

2 Caractères continus des algèbres à poids

On note le compactifié de Stone-Čech de X par βX, l'extension de Stone de $f \in C(X)$ par $\tilde{f}$ et l'évaluation en $z \in \beta X$ par δ_z. Ainsi $\tilde{f}$ est une application continue de βX dans le compactifié d'Alexandroff $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{K}$ et $\delta_z(f) := \tilde{f}(z)$. Si E est une sous-algèbre de $C(X)$, on considère les ensembles :

$$coz(E) := \{x \in X : \delta_z(f) \neq 0 \text{ pour un certain } f \in E\},$$

$$N(E) := \{z \in \beta X : \delta_z(f) \neq 0, \text{ pour un certain} f \in E\}$$

et

$$\mathbb{F}(E) := \{z \in \beta X : \delta_z(f) \neq \infty \text{ pour tout } f \in E\}.$$

Dans [6], L. Oubbi montre que, pour toute algèbre $E \subset C(X)$ qui est auto-adjointe et un $C_b(X)$-module, $M^*(E)$ est homéomorphe à $\mathbb{F}(E) \cap N(E)$. Si en plus $E \subset CV(X)$, nous associons à tout $v \in V$ la fonction notée encore par $\check{v}$ et définie sur $M^*(E)$ par :

$$\check{v}(z) := \frac{1}{sup\{|\tilde{f}(z)|, f \in B_v(E)\}},$$

où $B_v(E)$ est la boule unité fermée de $|\ |_v$ dans E. Il est facile de voir que $\check{v}$ est finie et s.c.s sur $M^*(E)$. On pose alors $\check{V} := \{\check{v} : v \in V\}$ et

$$N_{\check{V}} := \{z \in M^*(E) : \check{v}(z) > 0, \text{ pour un certain } v \in V\}.$$

Pour $v \in V$ et $r > 0$, l'ensemble de niveau $L(v, r)$ est défini comme étant $\{x \in X : v(x) \geq r\}$. Le support de V est défini (cf. [4]) par

$$\text{supp}(V) := \cup_{v \in V, r > 0} \overline{L(v, r)}^{\beta X}.$$

Le résultat suivant améliore Proposition 1 de Govaerts dans le cas scalaire et étend Théorème 19 de [6].

Théorème 1 : *Soient X un espace complètement régulier séparé, V un système de poids sur X et $E \subset CV(X)$ une algèbre localement convexe auto-adjointe et qui est un $C_b(X)$-module. Alors les espaces $M(E)$, $M^*(E) \cap \text{supp}(V)$ et $N_{\check{V}}$ sont* *homéomorphes.*

Preuve : Comme tous ces ensembles sont contenus dans $M^*(E)$, il suffit de montrer qu'il sont égaux. Supposons que $z \in M(E)$. Alors il existe $v \in V$ tel que $|\tilde{f}(z)| \leq |f|_v$, pour tout f dans E. Nous affirmons que $z \in \bigcup_{n>0} \overline{L(v, \frac{1}{n})}^{\beta X}$. Car sinon, soit $f_0 \in E$ tel que $\tilde{f}_0(z) = 1$ et, pour tout $n \in N$, $f_n \in C_b(X)$ tel que $0 \leq f_n \leq 1$, $\tilde{f}_n(z) = 1$ et $\tilde{f}_n = 0$ sur $\overline{L(v, \frac{1}{n})}^{\beta X} \cup \{x \in \beta X : |\tilde{f}_0(x)| \geq 2\}$. De $f_0 f_n \in E$ découle

$$|\widetilde{f_0 f_n}(z)| = |\tilde{f}_0(z)\tilde{f}_n(z)| \leq |f_0 f_n|_v;\ n \in \mathbb{N}.$$

C'est à dire :

$$1 \leq \sup\{|f_0(x)| : x \notin L(v, \frac{1}{n}) \cup \{x \in X : |f_0(x)| \geq 2\}\}.$$

D'où $1 \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \in N$; ce qui est absurde.
Maintenant, si $z \in M^*(E) \cap \overline{L(v,r)}^{\beta X}$ pour un certain $r > 0$ et $f \in E$, pour tout $x \in L(v,r)$, on a $|f(x)| \leq \frac{1}{r}|f|_v$. La continuité de f donne alors $|\tilde{f}(z)| \leq \frac{1}{r}|f|_v$. Ainsi, $\sup\{|\tilde{f}(z)| : f \in B_v(E)\} \leq \frac{1}{r}$. Par suite $\check{v}(z) \geq r$. D'où $z \in N_{\check{V}}$.
Enfin, si pour $r > 0$ et $v \in V$ on a $\check{v}(z) \geq r$, alors $\sup\{|\tilde{f}(z)| : f \in B_v(E)\} \leq \frac{1}{r}$. Si $|g|_v \neq 0$, on aura $\frac{g}{|g|_v} \in B_v(E)$ et donc $|\tilde{g}(z)| \leq \frac{1}{r}|g|_v$. Dans le cas où $|g|_v = 0$, on considère $h \in E$ tel que $|h|_v \neq 0$ et l'on a $g + \frac{1}{n}h \in E$ et $|g + \frac{1}{n}h|_v \neq 0$. On se ramène au cas précédent et on fait tendre n vers l'infini pour obtenir $\tilde{g}(z) = 0$. D'où $|\tilde{g}(z)| \leq \frac{1}{r}|g|_v$ pour tout $g \in E$. Par suite $z \in M(E)$.

Si E est contenue dans $CV_0(X)$, tout comme dans le cas d'une famille de Nachbin, $M(E)$ n'est rien que $coz(E)$.

Corollaire 2 : *Si $E \subset CV_0(X)$ est une algèbre localement convexe auto-adjointe qui est un $C_b(X)$-module, alors $M(E)$ est homéomorphe à $coz(E)$.*

Preuve : Supposons que $z \in M(E) \backslash X$. Alors il existe $v \in V$ tel que $|\tilde{f}(z)| \leq |f|_v$ pour tout $f \in E$. Or il existe $f \in E$ tel que $\tilde{f}(z) = 1$. Comme fv tend vers zéro à l'infini, il existe un compact K de X tel que $|(fv)(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \notin K$. Soit alors $g \in C_b(X)$ vérifiant $\tilde{g}(z) = 1, 0 \leq g \leq 1$ et $g = 0$ sur K. Comme E est un $C_b(X)$-module, $fg \in E$ et donc $1 = |\widetilde{fg}(z)| \leq |fg|_v = \sup\{|fgv|(x) : x \in X\}$. Or $|fg|_v \leq \sup\{|fv|(x) : x \in K\}$. Donc $1 \leq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

Théorème 1 s'applique aussi aux algèbres de Schmets $C_{\mathcal{P}}(X)$ [9].

Corollaire 3 : *Soit $\mathcal{P}$ une famille de parties bornantes du replété υX de X et $E := C_{\mathcal{P}}(X)$ l'algèbre de Schmets correspondante. Alors $M(E) = \cup_{B \in \mathcal{P}} \overline{B}^{\upsilon X}$.*

Preuve : Par Théorème 1, $M(E) = M^*(E) \cap (\cup_{B \in \mathcal{P}} \overline{B}^{\beta X})$. Mais $M^*(E) = \upsilon X$ et tout $B \in \mathcal{P}$ est relativement compact dans υX. Donc $\overline{B}^{\beta X} = \overline{B}^{\upsilon X}$. Par suite $M(E) = \cup_{B \in \mathcal{P}} \overline{B}^{\upsilon X}$.

Proposition 4 : *Soit V un système de poids sur un espace complètement régulier séparé X et $E \subset CV(X)$ une a.l.c auto-adjointe qui est un $C_b(X)$-module. Alors $\check{v}$ est la plus petite fonction positive s.c.s sur $M^*(E)$ dont la restriction à $coz(E)$ majore v. Si de plus v est s.c.s, alors $\check{v}$ prolonge v de $coz(E)$ à $M^*(E)$.*

Preuve : Soit w une fonction positive s.c.s sur $M^*(E)$ telle que $w \geq v$ sur $coz(E)$ et soit $z \in M^*(E)$. Si $\check{v}(z) = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $\check{v}(z) > 0$. Comme à la fin de la preuve de Théorème 1, $|\tilde{f}(z)| \leq \frac{|f|_v}{\check{v}(z)}$ quelle que soit $f \in E$. D'où

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{1}{\check{v}(z)} \sup\{|\tilde{f}(t)|w(t) : t \in M^*(E)\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$U_n := \{t \in M^*(E) : |\tilde{f}(t)| < |\tilde{f}(z)| + \frac{1}{n} \text{ et } w(t) < w(z) + \frac{1}{n}\}.$$

C'est un ouvert de $M^*(E)$ contenant z. Soient alors W_n un ouvert de βX tel que $U_n = W_n \cap M^*(E)$ et $f_n \in C(\beta X)$ tel que $f_n(z) = 1, 0 \leq f_n \leq 1$ et $f_n = 0$ sur $\beta X \setminus W_n$. Alors

$$|\widetilde{ff_n}(z)| \leq \frac{1}{\check{v}(z)} \sup\{|\tilde{f}(t)||\tilde{f}_n(t)|w(t) : t \in M^*(E)\}.$$

D'où

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{1}{\check{v}(z)}(|\tilde{f}(z)| + \frac{1}{n})(w(z) + \frac{1}{n}).$$

On prend $f \in E$ telle que $\tilde{f}(z) = 1$ et on fait tendre n vers l'infini. On obtient à la limite $\check{v}(z) \leq w(z)$.

Lorsque v est semicontinue supérieurement, $\check{v}$ coïncide avec le prolongement minimal $\tilde{v}$ de [6]. Ainsi, Theorem 16 de [6] découle de Théorème 1.

3 Caractères continus de quelques algèbres contenues dans $CV_0(X, A)$

Dans toute cette section on suppose que V est un système de poids sur X et E une sous-algèbre solide de $CV(X)$ (i.e. si $g \in C(X)$ est telle que $|g| \leq |f|$ pour un certain $f \in E$, alors $g \in E$). Il est facile de voir que E est alors un $C_b(X)$-module auto-adjoint. Les algèbres $C_lV_{(0)}(X), C_AV_{(0)}(X), C_{uA}V_{(0)}(X), CV_{00}(X)$ introduites dans [6] sont toutes des exemples d'algèbres solides contenues dans $CV(X)$. On considère l'espace vectoriel

$$EV(X, A) := \{F \in CV(X, A) : p \circ F \in E \text{ pour tout } p \in \mathbb{P}\}.$$

Il est facile de voir que l'espace $EV(X, A)$ est à la fois un $C_b(X)$- et un A-module et que l'espace $E \otimes A$ engendré par EA est contenu dans $EV(X, A)$. Enfin, si $E = CV(X)$ (resp. $CV_0(X)$), alors l'espace $EV(X, A)$ n'est rien que $CV(X, A)$ (resp. $CV_0(X, A)$).

Le résultat suivant est analogue à Lemma 1 de [4] et se démontre de la même manière. Nous en omettons donc la preuve.

Lemme 5 : *Soient P une semi-norme sur A, $\epsilon > 0$ et $F \in C(X, A)$. Alors Il existe des familles $\{a_i, i \in I\} \subset A$ et $\{f_i, i \in I\} \subset C(X)$ telles que*
(i) $0 \leq f_i$ et $\sum_{i\in I} f_i = 1$
(ii) $\{f_i, i \in I\}$ est localement finie
(iii) $P(f(x) - \sum_{i\in I} f_i(x)a_i) \leq \epsilon$ pour tout $x \in X$.

Lemme 6 : *Soient V un système de poids sur un espace complètement régulier X, $E \subset CV_0(X)$ une algèbre solide et A une algèbre localement convexe. Alors les espaces $E.EV(X, A)$ et $E \otimes A$ sont denses dans $EV(X, A)$.*

Preuve : Puisque E est une algèbre solide, $E.EV(X, A)$ est contenu dans $EV(X, A)$. Maintenant, soient $F \in EV(X, A), v \in V, p \in \mathbb{P}$ et $\epsilon > 0$. Alors

$$K := \overline{\{x \in X : v(x)p \circ F(x) \geq \frac{\epsilon}{2}\}}$$

est un compact de X. Pour $x \in K$, il existe $f_x \in E$ tel que $f_x(x) = 1$ et $0 \leq f_x \leq 1$ (e.g. $\min(1, \frac{p\circ F}{p\circ F(x)})$). Par compacité de K, il existe $x_1, \ldots, x_m$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in X : f_{x_i}(x) > \frac{1}{2}\}.$$

Posons $h := \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}$ et

$$k(t) := \begin{cases} \frac{1}{2h(t)} \text{ si } h(t) \geq \frac{1}{2} \\ 2h(t) \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors $k \in C_b(X)$ et $0 \leq k \leq 1$ sur tout X. De plus $g := 2kh \in E$, $g = 1$ sur K et $0 \leq g \leq 1$ sur tout X. Par ailleurs

$$\begin{aligned} p_v(F - gF) &= \sup_{t\in X} v(t)p(F(t) - g(t)F(t)) \\ &= \sup_{t\notin K} v(t)p(F(t) - g(t)F(t)) \\ &= \sup_{t\notin K} v(t)(1 - g(t))p(F(t)) \\ &\leq 2\sup_{t\notin K} v(t)p(F(t)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Il en résulte que $E.EV(X, A)$ est dense puisque F est quelconque.
Montrons maintenant que $E \otimes A$ est aussi dense dans $EV(X, A)$. Soient $F \in EV(X, A), p \in \mathbb{P}$ et $v \in V$. On considère le compact $K := \overline{\{x \in X : v(x)p \circ F(x) \geq \frac{\epsilon}{4}\}}$ et l'on procède comme ci-dessus pour exhiber une fonction $g \in E$ telle que $0 \leq g \leq 1$ et $g = 1$ sur K. On applique alors Lemme 5 à F, p et $\delta = \frac{\epsilon}{2(1+|g|_v)}$ pour obtenir une famille $\{f_i\}_{i\in I} \subset C_b(X)$ localement finie et une autre $\{a_i\}_{i\in I} \subset A$ telles que
i. $0 \leq f_i \leq 1$ et $\sum_{i\in I} f_i = 1$,
ii. $p(F(x) - \sum_{i\in I} f_i(x) \otimes a_i) \leq \delta$.
Pour tout $x \in K$, il existe un ouvert U_x de X contenant x et tel que $f_i = 0$ sur U_x sauf pour les indices i dans un ensemble fini $J_x \subset I$. Par compacité de K,

il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de K tels que $K \subset \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Soit $f \in C_b(X)$ vérifiant $f = 1$ sur K, $0 \leq f \leq 1$ sur X et $f = 0$ sur $X \setminus \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Soient $F' = \sum_{i \in I} f_i(x) \otimes a_i$ et $J := \cup_{i=1}^{n} J_{x_i}$. Alors $gfF' := \sum_{i \in J} gff_i \otimes a_i$ appartient à $E \otimes A$. De plus

$$\begin{aligned} p_v(F - gfF^{'}) &= p_v(F - gf(F^{'} + F - F)) \\ &\leq p_v(F - gfF) + p_v(gf(F' - F)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + |gf|_v \sup_{x \in X} p(F'(x) - F(x)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon |fg|_v}{2(1 + |g|_v)} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

La preuve est donc achevée puisque F est quelconque.

Dorénavant, nous supposerons que $EV(X, A)$ est une algèbre localement convexe. Pour en caractériser les caractères continus, nous avons besoin du lemme suivant dont un analogue est aussi donné dans [4]. Ici nous omettons la multiplicativité de V ainsi que la bornitude des poids.

Lemme 7 : *Si $E \subset CV_0(X)$ et $\chi \in M(EV(X, A))$, alors il existe $\phi \in M(E)$ et $\psi \in M(A)$ uniques tels que :*
1. $\chi(fF) = \phi(f)\chi(F), \forall f \in E \quad F \in EV(X, A)$.
2. $\chi(fa) = \phi(f)\psi(a), \forall f \in E \quad a \in A$.

Preuve : Remarquons d'abord que si ϕ et ψ existent, alors ils sont uniques.
1. Pour $f \in E$, posons $\phi(f) := \frac{\chi(fF)}{\chi(F)}$ pour un certain F tel que $\chi(F) \neq 0$. Alors ϕ ne dépend pas de F. En effet, soit $F^{'} \in EV(X, A)$ tel que $\chi(F') \neq 0$. Alors $\chi(fFF^{'}) = \chi(fF)\chi(F^{'}) = \chi(fF^{'})\chi(F)$. D'où $\frac{\chi(fF)}{\chi(F)} = \frac{\chi(fF^{'})}{\chi(F^{'})}$. Par Lemme 6 et la continuité de χ, ϕ est non nul et continu.
2. Pour la définition de ψ, on pose $\psi(a) := \frac{\chi(Fa)}{\chi(F)}$, avec $\chi(F) \neq 0$. Montrons encore que ψ ne dépend pas de F. Commençons d'abord par montrer que pour $a \in A$ et $G \in EV(X, A)$, $\chi(Ga) = \chi(aG)$. Soit $f \in E$ vérifiant $\phi(f) = 1$. Comme G et $f \otimes a$ sont dans $EV(X, A)$, $\chi(Gf \otimes a) = \chi(f \otimes aG)$. Mais $\chi(Gf \otimes a) = \chi(fGa) = \phi(f)\chi(Ga)$ et $\chi(f \otimes aG) = \phi(f)\chi(aG)$. D'où $\chi(Ga) = \chi(aG)$. Soit maintenant $F, F^{'} \in EV(X, A)$ tels que $\chi(F) \neq 0$ et $\chi(F^{'}) \neq 0$. Alors $\chi(FF^{'}a) = \chi(F)\chi(F^{'}a) = \chi(Fa)\chi(F^{'})$. D'où $\frac{\chi(Fa)}{\chi(F)} = \frac{\chi(F^{'}a)}{\chi(F^{'})}$. Pour $f \in E$ et $F \in EV(X, A)$ telles que $\chi(F) \neq 0$, $\chi(f \otimes a) = \frac{\chi(fF^2 a)}{\chi(F^2)}$. Donc $\chi(fa) = \frac{\chi(fF)}{\chi(F)} \frac{\chi(Fa)}{\chi(F)}$, d'où $\chi(fa) = \phi(f)\psi(a)$. De la densité de $E \otimes A$ dans $EV(X, A)$ et de la continuité de χ, on conclut que ψ est non nul et continu.

Dans le cas où $EV(X, A)$ est unitaire, Lemme 7 reste vrai pour $\chi \in M^*(EV(X, A))$. La définition de ϕ et de ψ se fait de la même manière que dans [4].

En combinant Corollaire 2, Lemme 6 et Lemme 7, nous obtenons

Théorème 8 : *Soient V un système de poids sur X, $E \subset CV_0(X)$ une algèbre solide telle que $EV(X, A)$ est une a.l.c et $\chi \in M(EV(X, A))$. Alors il existe $x_0 \in coz(E)$ et $\psi \in M(A)$ uniques tels que $\chi = \psi \circ \delta_{x_0}$.*

Ce résultat contient, en particulier, ceux donnés dans [1], [4] et [8] concernant la description des caractères continus de $CV_0(X,A)$.

Si maintenant on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{G}: & coz(E)\times M(A) & \to & M(EV(X,A)) \\ & (x,\varphi) & \mapsto & \varphi\circ\delta_x \end{array}$$

alors, d'après Théorème 8, c'est une bijection. De plus on a

Proposition 9 : *Soit V un système de poids sur X et $E\subset CV_0(X)$ une algèbre solide telle que $EV(X,A)$ est une a.l.c. Alors G est ouverte. Si en plus $M(A)$ est localement équicontinu, alors G est un homéomorphisme.*

Preuve : Soient $\Omega_0\subset coz(E)$ et $W\subset M(A)$ deux ouverts, $x_0\in\Omega_0$ et $\varphi_0\in W$. Soit $f\in E$ telle que $f(x)=1$ et $\Omega:=\{x\in X:|f(x)|>\frac{2}{3}\}$. Alors Ω est un ouvert contenant x_0. Comme E est solide, il existe $f\in E$ telle que $f\equiv 1$ sur Ω (e.g. $g:=\frac{3}{2}\min(|f|,\frac{2}{3})$). Par ailleurs, puisque G est une bijection, on peut se restreindre aux ouverts W de la forme

$$V(\varphi_0,a,\epsilon):=\{\varphi\in M(A):|\varphi(a)-\varphi_0(a)|<\epsilon\},$$

avec $a\in A$ et $\epsilon>0$. Ainsi on a

$$G(\Omega_0\times W)\supset G(\Omega\times W)=V(\varphi_0\circ\delta_{x_0},g\otimes a,\epsilon)\cap\{\varphi\circ\delta_x,\varphi\in M(A),x\in\Omega\}.$$

Mais $V(\varphi_0\circ\delta_{x_0},g\otimes a,\epsilon)$ et $\{\varphi\circ\delta_x,\varphi\in M(A),x\in\Omega\}$ sont tous deux ouverts et contiennent $G((x_0,\varphi_0))$. Donc G est ouverte. Pour la continuité de G, supposons que $M(A)$ est localement équicontinu et considérons $x_0\in coz(E)$, $\varphi_0\in M(A)$, $F\in EV(X,A)$ et $\epsilon>0$. Nous allons exhiber deux ouverts $\Omega\ni x_0$ et $U\ni\varphi_0$ tels que $G(\Omega\times W)\subset V(\varphi_0\circ\delta_{x_0},F,\epsilon)$. Or $V(\varphi_0\circ\delta_{x_0},F(x_0),\frac{\epsilon}{2})$ contient un ouvert équicontinu $U\ni\varphi_0$. Donc il existe un ouvert $W\ni F(x_0)$ tel que

$$|\varphi(a)-\varphi(F(x_0))|<\frac{\epsilon}{2},\ a\in W\ \varphi\in U.$$

Mais la continuité de F donne un voisinage ouvert Ω de x_0 tel que $F(\Omega)\subset W$. Par suite $G(\Omega\times U)\subset V(\varphi_0\circ\delta_{x_0},F,\epsilon)$ et G est continue.

Références

[1] J. Arhippainen : On the ideal structure of algebras of LMC-algebra valued functions. Studia Math. 101 (3) (1992), 311-318.

[2] K. D. Bierstedt, R. Meise and W. H. Summers : A projective description of weighted inductive limits. Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 107-160.

[3] S. Dierolf, K.H. Schröder, J. Wengenroth : Characters on certain function algebras. Funct. Approx. Comment Math. 26 (1998), 53-58.

[4] W. Govaerts : Homomorphisms of weighted algebras of continuous functions. Annali di Matematica pura ed applicata, 116 (4) (1978), 151-158.

[5] L. Oubbi : Weighted algebras of continuous functions. Res. Math. 24 (1993), 298-307.

[6] L. Oubbi : On different types of algebras contained in $CV(X)$. Bull. Bel. Soc. 6 (1999), 111-120.

[7] L. Oubbi : Weighted algebras of vector-valued continuous functions. Math. Nachr. 212 (2000), 117-133.

[8] J. B. Prolla : Topological algebras of vector-valued continuos functions. Adv. Math. Suppl. Studies 7B (1981), 727-740.

[9] J. Schmets : Espaces de fonctions continues, Lecture Notes in Math. 519, Springer-verlag, (1976).

Département de Mathématiques,
Ecole Normale Supérieure
B. P. 5118, Takaddoum, 10105 Rabat (Maroc)
Email : l_oubbi@hotmail.com