Propriété d'holomorphie et représentation intégrale de certains champs de Whitney

M. Elhodaibi M. Hemdaoui

Abstract

Let δ be a lipschitz positive function in an open set U of $\mathbb{C}^n$. We suppose that δ is rapidely decreasing in a neighborhood of $K = \delta^{(-1)}\{0\}$ then all puissances of $d(.,K)$. We introduce a $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ algebra and prove that the Bochner-Martinelli formula for $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ is valid uniquely on K. We define by this formula a Whitney field on K associated to h, and prove that the restriction of h to K is C^∞ and $\bar{\partial}$-flat. In particular h is holomorphic in the interior of K (if the interior of K is not void).

Résumé

Soit δ une fonction positive lipschitzienne sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, qui décroît au voisinage de $K = \delta^{-1}\{0\}$ plus vite que les puissances de $d(.,K)$. On introduit l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ et on montre que la formule de Bochner-Martinelli est valable pour $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ uniquement sur K. On définit grâce à cette formule un champ de Whitney sur K associé à h puis on montre que la restriction de h à K est de classe C^∞ au sens de Whitney et $\bar{\partial}$-plate.En particulier h est holomorphe à l'intérieur de K (si K est d'intérieur non vide).

1 Introduction

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre localement convexe complète à unité, $a \in A$ et δ une fonction lipschitzienne, positive sur $\mathbb{C}$ vérifiant au voisinage de l' infini :

$$\varepsilon \leq \frac{\delta(t)}{|t|} \leq M$$

Received by the editors January 2000.
Communicated by J. Mawhin.

où ε et M sont des constantes positives indépendantes de t telle que l'ensemble $\{\delta(t)(a-t)^{-1}/t \notin \delta^{-1}(0)\}$ soit borné. L.Waelbroeck [20] introduisit une algèbre de fonctions X définies et continues sur un voisinage U du spectre de a et vérifiant

$$\int_U \delta^{-1}(t)|\bar{\partial} f(t)dt| < +\infty.$$

où $\bar{\partial} f(t) = \frac{d}{d\bar{t}} f(t) d\bar{t}$.

Si $h \in X$ alors il définissa $h[a]$. Il est naturel dans le problème du calcul fonctionnel envisagé par Waelbroeck, de considérer des fonctions vivant uniquement sur le spectre.

C.Wrobel [21] introduisit aussi une algèbre utile au calcul fonctionnel multi-dimensionnel dans une algèbre de Banach commutative et unitaire.

Ngyen The Hoc [14] et [15] étudia aussi mais dans le cas bornologique le calcul fonctionnel multi-dimensionnel lié à la croissance des coefficients spectraux.

M.Hemdaoui [9] considéra pour l'opérateur de Laplace $(-\Delta)$ opérant sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. Son spectre est $\mathbb{R}^+$,une algèbre de fonctions définies sur un secteur Γ voisinage de $\mathbb{R}^+$. Il étudia contrairement aux autres les propriétés de la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'un élément de cette algèbre. Dans [10] il résoud le problème d'extension dans ce cas là.

J.Chaumat et A-M.Chollet [4] ont considéré une fonction f continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial} f$ soit continue sur U et décroît rapidement par rapport aux puissances de $d(.,K)$. Ils montrent ainsi qu'on peut associer à f un champ de Whitney $(F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}}$ défini sur K et $\bar{\partial}$-plat sur K.

Soient U un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ et δ une fonction définie positive lipschitzienne sur U qui décroît au voisinage de $K = \delta^{-1}\{0\}$ plus vite que les puissances de $d(,K)$.

Dans cet article, nous établissons le résultat de J.Chaumat et A-M.Chollet [4] pour une classe de fonctions f telles que $\int_U |\bar{\partial} f(t)|\delta^{-1}(t)|dt| < +\infty$ pour au moins un voisinage U du compact K. Ce travail est une extension d'un résultat établi pour $n = 1$ [7],où on a utilisé le noyau de Cauchy qui est déjà holomorphe. Tandis qu' ici on utilise le noyau de Bochner - Martinelli et le calcul fonctionnel pour établir le résultat désiré.

Il est bon de rappeler aussi que A.Soigatt [18] a étudié le cas particulier d'un compact réduit à un point , où δ contrôle la résolvante d'un opérateur quasi-nilpotent. Dans ce cas, le champ obtenu est une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ qui est finie si l'opérateur est nilpotent.

2 L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ et Calcul Fonctionnel

Dans cette partie on définit l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ et l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$. On montre que si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors sa restriction à K s'exprime en fonction de h et du noyau de Bochner-Martinelli.

Soient K un compact de $\mathbb{C}^n$ et U un voisinage de K ouvert et borné.

Définition 2.1. *Une fonction δ définie, positive et lipschitzienne sur U, est dite très plate au voisinage de K si et seulement si pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m \geq 0$ tels que $\forall z \in U$:*

$$\delta(z)\, d(z,K)^{-m} \leq C_m \tag{2.1}$$

On désigne par $\Delta(K)$ l'ensemble des fonctions δ très plates au voisinage de K.

Définition 2.2. *On dit que $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ si et seulement si :*
(i) h est continue et bornée sur U,
(ii)$\bar{\partial} h$ est à coefficients mesurables dans U,
(iii) $\int_U (\delta(z))^{-1} |\bar{\partial} h(z)| \, dm(z) < +\infty$.

où
$$|\bar{\partial} h(z)| = \sum_{i=1}^{n} |\partial_{\bar{z}_i} h(z)|$$

Remarque 2.1. *Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors h vérifie $\bar{\partial} h = 0$ p.p à l'intérieur de K.*

Proposition 2.1. *L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ normée par*
$$||f||_\delta = \sup_U |f(t)| + \frac{1}{2\pi} \int_U \delta^{-1}(t) |\bar{\partial} f(t) dt|$$
est une algèbre de Banach commutative et unitaire.

Sur l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$, on considère la relation d' equivalence suivante :
$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \; f = g \text{ sur } K$$

L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R}$ est de Banach, car le noyau de la relation $\mathcal{R}$ est fermé. Si $U" \subset U' \subset U$ sont trois voisinages ouverts de K alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R} \arrow[rr, "\mathcal{R}_{U,U'}"] \arrow[dr, "\mathcal{R}_{U,U"}"'] & & \mathcal{C}^1_\delta(U')/\mathcal{R} \arrow[dl, "\mathcal{R}_{U',U"}"] \\ & \mathcal{C}^1_\delta(U")/\mathcal{R} & \end{tikzcd}$$

avec :
$$\mathcal{R}_{U,U"} = \mathcal{R}_{U',U"} o \mathcal{R}_{U,U'}$$

Où $\mathcal{R}_{U,U'}$ est la restriction d'un élément de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ à l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U')$. D'où la famille $(\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R})_{U \in \mathcal{V}(K)}$ est un système inductif. On écrit :
$$\mathcal{C}^1_\delta(K) = \lim_{U \in \vec{\mathcal{V}}(K)} (\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R})$$

Comme pour $U \in \mathcal{V}(K)$ l'application $\mathcal{R}_{U,K}$ de $\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R}$ dans $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est injective ; dès lors l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est une algèbre topologique séparée et complète.

Proposition 2.2. *L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est une limite inductive sequentielle décroissante d'algèbres de Banach avec morphismes injectives.*

Démonstration
K étant un compact de $\mathbb{C}^n$, on sait que la suite d'ensembles ouverts définis par :
$$U_m = \{z \in \mathbb{C}^n / d(z, K) \; < \frac{1}{m} \; \} \;\; m \in \mathbb{N}^*.$$
constitue un système fondamental de voisinages de K il suffit alors de considérer les algèbres de Banach $\mathcal{C}^1_\delta(U_m)$. Et on a
$$\mathcal{C}^1_\delta(K) = \lim_{U_m \in \vec{\mathcal{V}}(K)} (\mathcal{C}^1_\delta(U_m)/\mathcal{R})$$

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ le n-uplet des fonctions suivantes :

$$v_j(\zeta) = \frac{\overline{\zeta_j - z}}{|\zeta - z|^2} \tag{2.2}$$

où $j \in \{1, \ldots, n\}$, la famille de ces fonctions est définie pour chaque $z \in \mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^n \backslash \{z\}$ et vérifie pour $\zeta \in \mathbb{C}^n \backslash \{z\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j(\zeta)\,(\zeta_j - z_j) = 1 \tag{2.3}$$

Le noyau de Bochner-Martinelli est la forme différentielle suivante :

$$\varpi_z = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \bar{\partial} v_1 .. \hat{\bar{\partial}} v_j .. \bar{\partial} v_n \tag{2.4}$$

où $\widehat{\bar{\partial} v_j}$ signifie qu'on omet ce terme.

Proposition 2.3. *Soit f une fonction de classe C^1 à support compact dans $\mathbb{C}^n$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on a la formule de Bochner-Martinelli suivante :*

$$f(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial} f \varpi_z d\zeta_1 .. d\zeta_n \tag{2.5}$$

avec $C_n = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$.

Démonstration

C'est une conséquence de la formule de Stokes, voir par exemple [11].

Théorème 2.1. *Soit $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$. Si $\psi \in D(U)$ vérifie $\psi = 1$ sur un voisinage de K et si $z \in K$ alors on a :*

$$h(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\psi) \varpi_z d\zeta_1 d\zeta_n \tag{2.6}$$

Démonstration

Soit V un ouvert relativement compact dans U et contenant le support de ψ, on pose $K' = \bar{V}$. Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors $h \in C(K')$, donc il existe une suite de fonctions $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définies, de classe C^1 sur K' et convergeant uniformément vers h dans K'.

La suite $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge aussi au sens des distributions vers h dans $D'(V)$.

D'après la proposition(2.3) on a pour $j \in \mathbb{N}$ et $z \in K$:

$$h_j(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h_j\psi) \varpi_z d\zeta_1 .. d\zeta_n$$

Or sur K la suite h_j converge uniformément vers h, donc il reste à montrer que :

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h_j\psi) \varpi_z d\zeta_1 .. d\zeta_n = \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\psi) \varpi_z d\zeta_1 .. d\zeta_n \tag{2.7}$$

Tout d'abord on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soient Ω un ouvert de U contenant K et $z \in K$, on pose :*

$$K_m = \{x \in U \ / \ d(x, \Omega) \leq 1/m\}$$

Alors il existe une famille de fonctions $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ dans $D(\mathbb{C}^n)$ telle que :

$$\begin{cases} supp\, \psi_m \subseteq K_{m/3} \backslash B_o(z, 1/m) \\ \psi_m = 1 \ \text{sur} \ K_m \backslash B_o(z, 3/m) \ \text{et} \ 0 \leq \psi_m \leq 1 \\ \text{pour} \ \alpha \in \mathbb{N}^{2n} \ \text{il existe} \ c_\alpha > 0 \ \text{tels que} \ \|D^\alpha \psi_m\| \ \leq \ c_\alpha \ m^{|\alpha|} \end{cases} \tag{2.8}$$

Démonstration

La démonstration de ce lemme ressemble à celle dans [12], sauf qu'ici on choisit la fonction caractéristique de $K_{m/2}\backslash B_o(z,2/m)$ au lieu de la fonction caractéristique de $K_{m/2}$. ∎

Soient $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ et α une forme différentielle de classe C^∞ de degré $2n-1$ et à support compact dans U alors $<\bar\partial h,\alpha>$ vérifie :

$$<\bar\partial h,\alpha>=\int_{\mathbb{C}^n}\bar\partial h\alpha \tag{2.9}$$

Soient Ω un voisinage ouvert, relativement compact de K dans U et $\psi \in \mathcal{D}(U)$ une fonction à support compact dans Ω vérifiant $\psi = 1$ sur un voisinage de K. Soient aussi $z \in K$ et $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite associée à Ω dans le lemme (2.1). On désigne par m_0 le plus entier naturel m tel que $K_m \subset U$.On pose :

$$\alpha_m = \psi_m\,\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

La forme différentielle α_m est de classe C^∞ et à support dans $K'_m = K_{m/3}\backslash B_o(z,1/m)$. Comme la forme différentielle $\bar\partial(h_j\,\psi)\alpha_m$ est intégrable alors $<\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m>$ est défini. Comme $h\in\mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors $<\bar\partial(h\,\psi),\alpha_m>$ est aussi défini.
La suite $(<\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m>)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $<\bar\partial(h\,\psi),\alpha_m>$, montrons que la convergence est uniforme en m ; c'est à dire que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $j_0\in\mathbb{N}$ tels que pour $j>j_0$ et $z\in K$:

$$\sup_{m\geq m_0}|<\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m>-<\bar\partial(h\,\psi),\alpha_m>|<\varepsilon \tag{2.10}$$

En utilisant la formule de Stokes on a :

$$<\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m>=-<h_j\,\psi,\bar\partial\alpha_m>$$

D'après la notion de courant [17] on a :

$$<\bar\partial(h\,\psi),\alpha_m>=-<h\,\psi,\bar\partial\alpha_m>$$

d'où :

$$<\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m>-<\bar\partial(h\,\psi),\alpha_m>=-<h_j\,\psi,\bar\partial\alpha_m>+<h\,\psi),\bar\partial\alpha_m>$$

or :

$$<h_j\,\psi,\bar\partial\alpha_m>-<h\,\psi,\bar\partial\alpha_m>=\int_{K'_m}(h_j-h)\,\psi\,\bar\partial\alpha_m$$

On a :

$$\bar\partial\alpha_m=\bar\partial\psi_m\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

Le support de cette forme différentielle est le support de $\bar\partial\psi_m$, qu'on note V_m. Soit V'_m l'intersection du support de ψ avec V_m.
Comme $V'_m\subset B(z,3/m)\backslash B_o(z,1/m)$ et comme le module de la forme différentielle $\bar\partial\psi_m\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$ est équivalent à m^{2n} et le volume de V'_m ne dépasse pas $C_n\,m^{-2n}$, alors la forme différentielle $\bar\partial\alpha_m$ est intégrable et $\|\bar\partial\alpha_m\|_1$ est majorée par une constante

qui ne dépend pas de m.Or h_j converge uniformément sur Ω vers h donc on a (2.10).
Posons :

$$\begin{cases} A_{1,j,m} &= \int_\Omega \bar\partial(h_j\,\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n - <\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m> \\ A_{2,j,m} &= <h_j\,\psi,\bar\partial\alpha_m> - <h\,\psi,\bar\partial\alpha_m> \\ A_{3,j,m} &= <\bar\partial(h\,\psi),\alpha_m> - \int_\Omega \psi\,\bar\partial h\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n \end{cases}$$

Pour le terme $A_{2,j,m}$ on utilise (2.10), d'où $A_{(2,j,m)}$ converge uniformément en j et m vers 0.
On a :

$$\begin{aligned} A_{1,j,m} &= \int_\Omega \bar\partial(h_j\,\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n - <\bar\partial(h_j\,\psi),\alpha_m> \\ &= \int_\Omega (1-\psi_m)\,\bar\partial(h_j\,\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_{3,j,m} &= \int_\Omega \bar\partial(h\,\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n - <\bar\partial(h,\psi),\alpha_m> \\ &= \int_\Omega (1-\psi_m)\,\bar\partial(h\,\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n \end{aligned}$$

Donc pour chaque $j \in \mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{m\to+\infty} A_{1,j,m} = 0$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} A_{3,j,m} = 0$, d'où il existe une suite d'entiers naturels $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{j\to+\infty} A_{1,j,m_j} = 0$ et $\lim\limits_{j\to+\infty} A_{3,j,m_j} = 0$.
Comme on a :

$$\int_{\mathbb{C}^n} \bar\partial(h_j\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n - \int_{\mathbb{C}^n} \bar\partial(h\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n = A_{1,j,m_j} + A_{2,j,m_j} + A_{3,j,m_j}$$

d'où (2.7) et le théorème(2.1) est établi. ∎

Soit $(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de fonctions telle que :

$$(H1)\begin{cases} u_1(\zeta,z).(\zeta_1-z_1)+\cdots+u_n(\zeta,z).(\zeta_n-z_n) = 1 \text{ sur } \mathbb{C}^n\backslash K \\ \exists N \text{ et } s\geq 1 \quad /\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^{2n} \quad \exists c_\alpha > 0 \text{ tels que :} \\ \sup_\zeta\ d(\zeta,K)^{N+s|\alpha|}\,|D_z^\alpha u_i(z,\zeta)| \leq c_\alpha \end{cases}$$

Soit $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions telle que :

$$(H2)\begin{cases} supp\,\psi_\varepsilon \subset K_{2\varepsilon},\ 0\leq\psi_\varepsilon\leq 1,\ \psi_\varepsilon = 1 \text{ sur } K_\varepsilon \text{ et} \\ \|D^\alpha\psi_\varepsilon\|_\infty \leq c_\alpha\,\varepsilon^{-|\alpha|} \text{ pour } \alpha\in\mathbb{N}^{2n} \end{cases}$$

Posons $u_{i,\varepsilon} = (1-\psi_\varepsilon)\,u_i$ alors on a sur $\mathbb{C}^n$ l'identité spectrale suivante :

$$u_{1,\varepsilon}(\zeta,z).(z_1-\zeta_1)+\cdots+u_{n,\varepsilon}(\zeta,z).(z_n-\zeta_n)+\psi_\varepsilon = 1 \tag{2.11}$$

On associe à $(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$ les deux formes différentielles $\omega(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$ et $\varpi(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$ définies par :

$$\omega(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon) = n!\,\bar\partial u_{1,\varepsilon}..\bar\partial u_{n,\varepsilon} \tag{2.12}$$

et

$$\varpi(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\,u_{j,\varepsilon}\,\bar\partial u_{1,\varepsilon}..\widehat{\bar\partial u_{j,\varepsilon}}..\bar\partial u_{n,\varepsilon} \tag{2.13}$$

On a :

$$(n-1!)\,\bar\partial\varpi(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon) = \omega(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon) \tag{2.14}$$

On pose $\varpi'_z = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\,u_j\,\bar\partial u_1\ldots\widehat{\bar\partial u_j}\ldots\bar\partial u_n$, $\omega_\varepsilon = \omega(v_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$ et $\omega'_\varepsilon = \omega(u_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$.

Proposition 2.4. *: Si $h\in\mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors on a pour tout $z\in K$:*

$$h(z) = -C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar\partial(h\,\psi)\varpi'_z d\zeta_1..d\zeta_n \tag{2.15}$$

Démonstration :
Si on considère l'application Φ suivante :

$$\Phi(h) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{C}^n} h(\zeta)\, \omega(u_\varepsilon, \psi_\varepsilon) d\zeta_1..d\zeta_n$$

alors Φ est un homomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ sur l'algèbre $C(K)$ et ne dépend pas de la famille spectrale vérifiant (H1) et (H2) . Donc on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{C}^n} h(\zeta)\, \omega_\varepsilon d\zeta_1..d\zeta_n = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{C}^n} h(\zeta)\, \omega'_\varepsilon d\zeta_1..d\zeta_n$$

En utilisant Stokes on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{C}^n} h(\zeta)\, \omega_\varepsilon d\zeta_1..d\zeta_n = -C_n \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) \varpi_{\varepsilon,z} d\zeta_1..d\zeta_n$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{C}^n} h(\zeta)\, \omega'_\varepsilon d\zeta_1..d\zeta_n = -C_n \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) \varpi'_{\varepsilon,z} d\zeta_1..d\zeta_n$$

Or les formes différentielles $\varpi_{\varepsilon,z}$ et $\varpi'_{\varepsilon,z}$ convergent respectivement sur $\mathbb{C}^n\backslash K$ vers ϖ_z et ϖ'_z, de telle sorte qu'on ait :

$$\Phi(h)(z) = -C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) \varpi'_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

Or on a pour $z \in K$:

$$h(z) = -C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

d'où $\Phi(h) = h$ sur K. ∎

3 Restriction à K d'un élément de $\mathcal{C}^1_\delta(U)$

Soit h une fonction définie et continue sur U voisinage d'un compact K. Si $\bar{\partial}h$ est continue sur un voisinage $V \subset U$ de K et vérifie pour tout entier $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z\in V} d(z,K)^{-m}\, |\bar{\partial}h(z)| < \infty \tag{3.1}$$

alors on peut associer à h le champ de Whitney suivant :

$$h_\alpha(z) = -\, C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) D^\alpha_z \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n \tag{3.2}$$

défini sur K et $\bar{\partial}$-plat sur K.

Dans cette partie, nous étudions la régularité au sens de Whitney de la restriction à K d'un élément de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ pour U voisinage du compact K et $\delta \in \Delta(K)$. Nous construisons à partir de la formule de Bochner-Martinelli le champ associé à h sur K et on montre grâce à ce champ que h est de classe C^∞ au sens de Whitney sur K et en utilisant la proposition (2.4) nous établissons que h est $\bar{\partial}$-plate sur K.

3.1 Dérivation au sens de Whitney sur un compact de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.1. *: Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ où n est un entier naturel non nul. On dit que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ est un champ de Whitney sur K si et seulement si :*
(i) f_α est définie et continue sur K pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
(ii)Pour tout $x_0 \in K$, $r \in \mathbb{N}$ et $|\alpha| \leq r$ on a sur K la formule deTaylor suivante :

$$f_\alpha(x) - \sum_{|\alpha+\beta|\leq r} f_{\alpha+\beta}(x_0)\ \frac{(x-x_0)^\beta}{\beta!}\ = o(|x-x_0|^{r-|\alpha|}) \tag{3.3}$$

On désigne par $C^\infty(K)$ l'algèbre des champs de Whitney sur K, munie de l'addition et de la multiplication suivante :

$$(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}.(g_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} = (\sum_{\beta\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\, f_\beta\, g_{\alpha-\beta})_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \tag{3.4}$$

où $\binom{\alpha}{\beta}$ est le binôme de Newton.
Si $K = \bar{\Omega}$ alors sur Ω on a $f_\alpha = D^\alpha f_0$ et $D^\alpha f_0$ est prolongeable par continuité jusqu'au bord de Ω. Sur $\partial\Omega$ on a seulement un champ de Whitney, sauf si le bord de Ω est lipschitzien où la notion de dérivation usuelle coincide avec la dérivation au sens de Whitney. D'après le théorème d'extension de Whitney, on peut prolonger tout champ de Whitney à $\mathbb{R}^n$ tout entier, ce qui signifie que la fonction $f = f_o$ est prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier telle que pour $z \in K$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$D^\alpha \tilde{f}(z) = f_\alpha(z)$$

3.2 La classe $J_M(K)$:

Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $H = (h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ un champ de Whitney sur K. On définit $T^p_\xi H(x)$ par :

$$T^p_\xi H(x) = \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{1}{\alpha!}\, h_\alpha(\xi)\, (x-\xi)^\alpha \tag{3.5}$$

pour $\xi \in K$ et $x \in \mathbb{R}^n$.
Soit $M = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $M_0 = 1$ et M est logarithmiquement convexe.
On dit que $H \in J_{\{M\}}(K)$ si et seulement si H vérifie les deux conditions suivantes :
(i)Il existe $k > 1$ et $C \geq 0$ tels que :

$$\sup_{x\in K} |h_\alpha(x)| \leq C\, k^p\, M_p\, p! \tag{3.6}$$

pour $p = |\alpha|$.
(ii) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout $|\alpha| \leq p$, si $(\xi, x) \in K \times K$ alors :

$$|h_\alpha(\xi) - D^\alpha T^p_\xi H(x)| \leq C\, k^p\, |\alpha|!\, M_{p+1}|x-\xi|^{p+1-|\alpha|} \tag{3.7}$$

On dit que $H \in J_M(K)$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe $C_k \geq 0$ tels que H vérifie à la fois (i) et (ii).

3.3 Dérivation d'un champ de Whitney :

Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$, on écrit $z = (z_1, \ldots, z_n)$ avec $z_j = x_j + ix_{j+n}$. Soient 1_j le multi-indice de $\mathbb{N}^{2n}$ dont tous les indices sont nuls sauf le $j^{ième}$ qui vaut 1 et 1_{j+n} le multi-indice de $\mathbb{N}^{2n}$ dont tous les indices sont nuls sauf le $(j+n)^{ième}$ qui vaut 1. On associe au champ H le champ $\bar{\partial}_K H$. On pose par définition :

$$\partial_{K,\bar{z}_j} h_\alpha = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha+1_j} + i\, h_{\alpha+1_{j+n}}\right) \tag{3.9}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$.
On définit formellement sur K les formes différentielles de degré 1 $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$ et on pose par définition :

$$\bar{\partial}_K = \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}} \partial_{K,\bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \tag{3.10}$$

Définition 3.2. *: Soit $h \in C(K)$, h est dite $\bar{\partial}$-plate sur K si et seulement s'il existe un champ de Whitney $H = (h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}}$ défini sur K associé à h ($h_0 = h$) tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:*

$$D^\alpha \bar{\partial}_K H = 0 \tag{3.11}$$

Si $\tilde{h}$ est une extension du champ de Whitney H à $\mathbb{C}^n$ tout entier alors $\tilde{h}$ vérifie pour tout $z \in K$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:

$$D^\alpha \bar{\partial}\tilde{h}(z) = 0$$

On dit que $H \in J^0_{\{M\}}(K)$ si $H \in J_{\{M\}}(K)$ et H est $\bar{\partial}$-plat. On définit de même $J^0_M(K)$.

3.4 Régularité et propriétés de la restriction

Dans le théorème suivant on établit le résultat le plus important et on donne les propriétés de la restriction à K d'un élément de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$. On remarque que la régularité de $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ en dehors de K ne joue aucun rôle.

Théorème 3.1. *Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors sa restriction à K est de classe C^∞ au sens de Whitney et $\bar{\partial}$-plate pour le champ suivant :*

$$h_\alpha(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) D^\alpha_z \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n \tag{3.12}$$

où $z \in K$, $\psi \in D(U)$ et $\psi = 1$ sur un voisinage de K. Il existe aussi une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui ne dépend que de δ, telle que $\{M_p\}$ est croissante logarithmiquement convexe et $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}} \in J_{\{M\}}(K)$.

Démonstration
D'après le théorème (2.1) on a pour $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ et $z \in K$:

$$h(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi)\varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

On associe à h la fonction h_α définie sur K par :

$$h_\alpha(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) D^\alpha_z \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

où D_z désigne la dérivation par rapport à la variable z.
Pour que la fonction h_α soit définie et continue sur K, il suffit de comparer $|D_z^\alpha \varpi_z(\zeta)|$ à la fonction $\delta(\zeta)$ pour $\zeta \neq z$.
$D_z^\alpha \varpi_z$ s'écrit dans la base canonique sous la forme :

$$D_z^\alpha \varpi_z = \sum_{j=1}^{n} D_z^\alpha a_j(z,\zeta) \bar{\partial}\zeta_1..\widehat{\bar{\partial}\zeta_j}..\bar{\partial}\zeta_n \tag{3.13}$$

avec :

$$a_j(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} v_k \, det(\bar{\partial}_{\zeta'_j} v_1, \dots \widehat{\bar{\partial}_{\zeta'_j} v_k}, \dots, \bar{\partial}_{\zeta'_j} v_n) \tag{3.14}$$

où $\zeta'_j = (\zeta_1, \dots, \widehat{\zeta_j}, \dots, \zeta_n)$, on pose :

$$|D_z^\alpha \varpi_z(\zeta)| = \sup_{j \in \{1,\dots,n\}} \sup_{z \in K} |D_z^\alpha a_j(z,\zeta)| \tag{3.15}$$

Montrons que $(D_z^\alpha \varpi_z(\zeta))_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}}$ est un champ de Whitney pour $\zeta \neq z$ dont la croissance est contrôlée par $(\delta(\zeta))^{-1}$.

Lemme 3.1. *La fonction $D_z^\alpha \varpi_z(\zeta)$ définie pour $\zeta \notin K$ vérifie pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:*

$$|D_z^\alpha \varpi_z(\zeta)| \, \delta(\zeta) \leq c_\alpha \tag{3.16}$$

où c_α est une constante positive. On a aussi :

$$\sup_{\zeta \in \Omega \setminus K} \delta(\zeta) \, |D_z^\alpha \varpi_z - \sum_{\alpha+\beta \leq r} D_z^\alpha \varpi_{z_0} \, \frac{(z-z_0)^\beta}{\beta!}(\zeta)| \leq c_{\alpha,r,\delta} \, |z-z_0|^{r-|\alpha|+1} \tag{3.17}$$

où $c_{\alpha,r,\delta}$ est une constante positive.

Démonstration
Si L est une forme n-linéaire, la formule de Leibnitz s'écrit :

$$D^\alpha L(f_1, \dots, f_n) = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdots \beta_n!} L(D^{\beta_1} f_1, \dots, D^{\beta_n} f_n)$$

donc il suffit de majorer $|D_z^\beta v_j(\zeta)|$ et $|D_z^\beta \partial_{\bar{\zeta}_k} v_j(\zeta)|$ pour $\beta \leq \alpha, j \in \{1,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ et $\zeta \neq z$, puis majorer $|D_z^\alpha \varpi_z(\zeta)|$.

Lemme 3.2. *Soit $u(z,\zeta) = |\zeta - z|^2$ alors il existe $a > 1$ telle que pour tout $(z,\zeta) \in K \times V \setminus K$:*

$$|D_z^\alpha(\frac{1}{u(z,\zeta)})| \leq \frac{a^{|\alpha|} \, |\alpha|!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+2}} \tag{3.18}$$

Démonstration
On a :

$$|\zeta - z|^2 \, u(z,\zeta) = 1$$

D'où :

$$|\zeta - z|^2 \, D^\alpha u(z,\zeta) = -\sum_{\beta \leq \alpha, 0 < |\beta| \leq 2} \tbinom{\alpha}{\beta} \, D^\beta(|\zeta - z|^2) \, D^{\alpha-\beta} u(z,\zeta)$$

Si $|\beta| = 1$ alors :

$$|D^\beta(|\zeta - z|^2)| \leq 2 \, |\zeta - z|$$

et si $|\beta|=2$ alors :

$$|D^{\beta}(|\zeta-z|^2)|\leq 2$$

On a :

$$\sum_{\beta\leq\alpha,|\beta|=1}\tbinom{\alpha}{\beta}\leq|\alpha|$$

et

$$\sum_{\beta\leq\alpha,|\beta|=2}\tbinom{\alpha}{\beta}\leq 2|\alpha|^2$$

donc il existe $a>1$ telle qu'on ait par recurrence :

$$|D^{\alpha}u(z,\zeta)|\leq\frac{a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{(|\zeta-z|)^{|\alpha|+2}}$$

d'où :

$$|D^{\alpha}u(z,\zeta)|\leq\frac{a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+2}}$$

Soit $v_j(\zeta,z)=\frac{\overline{\zeta_j-z_j}}{|\zeta-z|^2}$, alors on a :

$$D_z^{\alpha}v_j(\zeta,z)=\sum_{|\beta|\leq 1,\beta\leq\alpha}\tbinom{\alpha}{\beta}\,D_z^{\beta}(\overline{\zeta_j-z_j})\,D_z^{\alpha-\beta}(\frac{1}{u(z,\zeta)})$$

d'où par recurrence :

$$|D_z^{\alpha}(v_j)(\zeta,z)|\leq\frac{(1+|\alpha|)a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{|\zeta-z|^{|\alpha|+1}}$$

d'où aussi :

$$|D_z^{\alpha}(v_j)(\zeta,z)|\leq\frac{(1+|\alpha|)a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+1}}\tag{3.19}$$

Comme $\partial_{\bar\zeta_k}v_j(\zeta,z)=-\frac{\overline{(\zeta_j-z_j)}\,(\zeta_k-z_k)}{u(z,\zeta)^2}$ pour $k\neq j$ et $\partial_{\bar\zeta_j}v_j(\zeta,z)=-\frac{|\zeta_j-z_j|^2}{u(z,\zeta)^2}+\frac{1}{u(z,\zeta)}$ alors pour tout $(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2$ on a :

$$|D_z^{\alpha}\partial_{\bar\zeta_k}v_j(\zeta,z)|\leq c_n\,\frac{(1+|\alpha|)^2\,a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+2}}\tag{3.20}$$

Comme :

$$|D_z^{\alpha}a_j(z,\zeta)|\leq\sum_{k=1}^{n}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_n!}\,|D_z^{\beta_1}v_k|\,|det(D_z^{\beta_2}\bar\partial_{\zeta'_k}v_1,\dots\widehat{\bar\partial_{\zeta'_k}v_k},\dots,D_z^{\beta_n}\bar\partial_{\zeta'_k}v_n)|$$

alors :

$$|D_z^{\alpha}\varpi_z(\zeta)|\leq c'_n\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_n!}\,\frac{(1+|\beta_1|)(1+|\beta_2|)^2\cdots(1+|\beta_n|)^2\,a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+2n-1}}$$

avec $c'_n=n!\,c_n$. On a $n^{|\alpha|}=\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_n!}$, d'où :

$$\begin{aligned}|D_z^{\alpha}\varpi_z(\zeta)|&\leq c'_n(1+|\alpha|)^{2n-1}(n)^{|\alpha|}\tfrac{a^{|\alpha|}\,|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+2n-1}}\\&\leq c'_n\,n^{|\alpha|}\tfrac{a^{|\alpha|}\,(|\alpha|+2n-1)!}{d(\zeta,K)^{|\alpha|+2n-1}}\end{aligned}\tag{3.21}$$

On a aussi pour tout entier $m \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{\zeta\in\Omega} \delta(\zeta)\ d(\zeta,K)^{-m} \leq c_{\delta,m} \tag{3.22}$$

où $c_{\delta,m}$ est une constante qui ne dépend que de δ et m. Donc (3.16) est une conséquence directe de (3.21) et (3.22).
Montrons qu'on a (3.17). Soient $(z,z_0) \in K^2$ et $\zeta \in V\backslash K$ alors il existe une ligne brisée Γ qui lie z_0 à z dans le plan (z,z_o,ζ) telle que $d(\zeta,\Gamma) \geq d(\zeta,K)$ et la longueur de Γ est inférieure à $2|z-z_0|$. On peut appliquer la formule de Taylor sur Γ à la fonction $D_z^\alpha \varpi_z$. Par exemple si un segment $[a,b] \subset \Gamma$ alors pour $r \geq |\alpha|$ on a :

$$D_z^\alpha \varpi_b - \sum_{|\alpha+\beta|\leq r} D_z^{\alpha+\beta}\varpi_a.\frac{(b-a)^\beta}{\beta!} = \int_0^1 \sum_{|\alpha+\beta|=r+1} D_z^{\alpha+\beta}\varpi_{tb+(1-t)a}.\frac{t(b-a)^\beta}{\beta!}\,dt$$

Comme :

$$|\beta|! \leq n^{|\beta|}\,\beta!$$

$$card(\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}/|\alpha+\beta| = r+1\}) \leq\ (2n)^{r+1-|\alpha|}$$

et

$$\frac{(r+2n)!}{(r+1-|\alpha|)!\,|\alpha|!} \leq (1+|\alpha|)^{2n-1}\,2^{r+2n}$$

alors il existe une constante $c"_n > 0$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} |D_z^\alpha\varpi_b - \sum_{|\alpha+\beta|\leq r} D_z^{\alpha+\beta}\varpi_a.\frac{(b-a)^\beta}{\beta!}| & \leq & c'_n \frac{(r+2n)!\,a^{r+1}\ n^{r+1-|\alpha|}\,(2n)^{r+1-|\alpha|}\,n^{r+1}}{(r+1-|\alpha|)!\,d(\zeta,K)^{r+2n}}|b-a|^{r-|\alpha|+1} \\ & \leq & c"_n\,(3an^3)^r \frac{|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{r+2n}}|b-a|^{r-|\alpha|+1} \end{array}$$

Donc on déduit que :

$$|D_z^\alpha\varpi_z - \sum_{|\alpha+\beta|\leq r} D_z^{\alpha+\beta}\varpi_{z_0}.\frac{(z-z_0)^\beta}{\beta!}| \leq c"_n\,(3an^3)^r\,2^{r+1-|\alpha|}\frac{|\alpha|!}{d(\zeta,K)^{r+2n}}|z-z_0|^{r-|\alpha|+1} \tag{3.23}$$

Ainsi le champ $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}}$ est un champ de Whitney.
Comme δ est très plate au voisinage de K alors il existe une suite $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe telle que :

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} N_p^{-1}\,d(\zeta,K)^{-p}\,\delta(\zeta) < \infty \tag{3.24}$$

En utilisant (3.21) et (3.23) on choisit $M_p = N_{p+2n-1}$. ∎

Montrons que la fonction $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ est $\bar\partial$-plate sur K, disons que pour $n=1$ on a le noyau de Cauchy, qui est holomorphe en z sur un voisinage K_ε de K pour $\zeta \in \mathbb{C}\backslash K_{2\varepsilon}$. Pour $n>1$ les noyaux reproduisants ne vérifient pas la propriètè du noyau de Cauchy sauf dans certains cas. Pour établir que $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ est $\bar\partial$-plate on commence par établir les deux propositions suivantes.

Proposition 3.1. *Soient $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$, K et K' deux compacts tels que $K' \subset K \subset \delta^{(-1)}\{0\}$. On associe à h sur K le champ de Whitney $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}}$ défini par (3.12) pour une fonction $\psi \in D(U)$ et $\psi = 1$ sur un voisinage de K. On associe à h sur K' le champ $(h'_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}}$ défini par (3.12) pour une fonction $\psi' \in D(U)$, $\psi' = 1$ sur un voisinage de K'. Alors on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ et tout $z \in K'$:*

$$h_\alpha(z) = h'_\alpha(z)$$

Démonstration
On a pour $z \in K$:
$$h_\alpha(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) D_z^\alpha \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$
On a pour $z \in K'$:
$$h'_\alpha(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi') D_z^\alpha \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$
Comme $\psi = 1$ sur un voisinage de K' alors on a aussi :
$$h'_\alpha(z) = -\,C_n \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}(h\,\psi) D_z^\alpha \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$
d'où $h_\alpha(z) = h'_\alpha(z)$. ■

En particulier :
$$\bar{\partial}_K H = \bar{\partial}_{K'} H$$
Un compact K est dit s-H-convexe ($s \geq 1$) si et seulement s' il existe $0 < A \leq 1$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un domaine pseudo-convexe U_ε tel que :
$$\{z \in \mathbb{C}^n / d(z, K) < A\varepsilon^s\} \subset U_\varepsilon \subset \{z \in \mathbb{C}^n / d(z, K) < \varepsilon\}$$

Proposition 3.2. *Soit $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$. Si le compact K est s-H-convexe alors il existe $0 < A' < A$ et une famille spectrale vérifiant (H1) et (H2) holomorphe en z pour $\zeta \notin K$ sur :*
$$V(\zeta, K) = \{z \in \mathbb{C}^n / d(z, K) < A' d(\zeta, K)^s\}$$
Démonstration
Pour la démonstration de cette proposition, voir [3] et [4].

Proposition 3.3. *Soit $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$.Si le compact K est s-H-convexe alors h vérifie pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ et $z \in K$:*
$$D_K^\alpha \partial_{K,\bar{z}_i} h(z) = 0$$

Démonstration
Pour montrer que h est $\bar{\partial}$-plate sur K, il suffit de montrer que h est limite uniforme sur K d'une famille de fonctions holomorphes au voisinage de K. Soit $(\chi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une famille de fonctions caractéristiques approchant la fonction caractéristique de K. Posons $\tilde{\chi}_m = (1 - \chi_m)$, posons aussi pour $z \in K_m$ où K_m est le support de χ_m :
$$h_m(z) = -C_n \int_{\mathbb{C}^n} \tilde{\chi}_m(\zeta)\, \bar{\partial}(h\,\psi) \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$
La fonction h_m est holomorphe sur un voisinage U_m de K, $U_m \subset K_m$. Il est facile de montrer que $D^\alpha h_m$ converge uniformément sur K vers h_α. Comme $D^\alpha \bar{\partial} h_m = 0$ sur K pour tout $m \in \mathbb{N}$ alors on a :
$$h_{\alpha+1_j} + i h_{\alpha+1_{j+n}} = 0$$
Ce qui montre que la fonction h est $\bar{\partial}$-plate sur K et la proposition (3.3) est démontrée. ■

Soient $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ et $z \in K$ alors le singleton $\{z\} = \{z_1\} \times \cdots \times \{z_n\}$ vérifie les conditions de la proposition (3.2) , donc d'aprés les propositions(3.1) et (3.3) la fonction h est $\bar{\partial}$-plate sur K et le théorème(3.1) est démontré. ∎

On peut même remplacer $\bar{\partial} h$ par une forme différentielle φ de bidegré (0,1) qui vérifie la condition suivante :

$$\int_U |\varphi(z)| \, (\delta(z))^{-1} \, dm(z) < +\infty$$

Si on considère la famille :

$$h_\alpha(z) = -\, C_n \int_{\mathbb{C}^n} \varphi D^\alpha_z \varpi_z d\zeta_1..d\zeta_n$$

alors $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}}$ est un champ de Whitney défini et $\bar{\partial}$-plat sur K.

3.5 Applications

Si $K = \bar{\Omega}$ et si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors h est holomorphe sur Ω et les dérivées de h sur Ω se prolongent jusqu'au bord de Ω, sinon ce résultat reste vrai sur l'intérieur de K. Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ est de classe C^{r+1} sur un voisinage de K alors h vérifie sur K pour $|\alpha| \leq r$:

$$D^\alpha \bar{\partial} h(z) = 0$$

En particulier si h est de classe C^∞ sur un voisinage de K alors h vérifie sur K pour $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:

$$D^\alpha \bar{\partial} h(z) = 0$$

Si on considère l'application suivante :

$$\mathcal{R} : \mathcal{C}^1_\delta(U) \longrightarrow C^\infty(K)$$

$$h \longrightarrow (h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}}$$

alors $\mathcal{R}$ est une application linéaire continue, c'est à dire que pour $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ $\exists C_\alpha > 0$:

$$\sup_K |h_\alpha(z)| \leq C_\alpha \|h\|_{U,\delta}$$

Théorème 3.2. *Soit $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$. Alors il existe $\delta \in \Delta(\sigma(a_1, \ldots, a_n))$ telle que $\mathcal{C}^1_\delta(\sigma(a_1, \ldots, a_n))$ opère sur $(a_1, \ldots, a_n)$.*

Démonstration

Pour $n = 1$, voir [20] on choisit :

$$\delta(\zeta) = \|(\zeta - a)^{-1}\|^{-1} \ si \ \zeta \notin \sigma(a) \ et \ 0 \ si \ \zeta \in \sigma(a)$$

Si $n > 1$, voir [15] on considère la fonction suivante :

$$\begin{cases} \delta_a(s) = sup\{[\sum_{j=1}^n \|b_j\|_A]^{-1} / \exists b \in A^n, < a - s, b >= 1\} \\ \text{Sinon } \delta_a(s) = 0 \end{cases}$$

et on choisit :

$$\delta(s) = \delta_a(s)^{3(2n-1)}$$

voir [15], grâce au théorème(2.1) pour tout caractère χ de $\mathcal{A}$ on a $\chi(h[a]) = h(\chi(a))$. Ce théorème est aussi une extension d'un théorème établie pour n=1 dû à E.M.Dynkin [5].

Théorème 3.3. *Si $K = \delta^{-1}\{0\}$ est s-H-convexe ($s \geq 1$) alors le champ de Whitney $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$ associé à $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ dans le théorème(3.1) est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes au voisinage de K.*

Démonstration

Si on considère un compact K s-H-convexe alors un champ $\bar{\partial}$-plat sur K est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes au voisinage de K (voir [4]), donc on en déduit que si $K = \delta^{-1}\{0\}$ alors tout élément de $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes au voisinage de K. ■

Disons aussi que sous la condition (W) introduite par Nguyen The Hoc [15], on peut construire une fonction δ telle que le théorème(3.3) soit vrai, où on utilise essentiellement un résultat dû à P.Pflug[16].

Pour améliorer le résultat du théorème(3.1), On impose à δ une condition de platitude.

Définition 3.3. *Soit $N = (N_p)$ une suite croissante logarithmiquement convexe. $\delta \in \Delta(K)$ est dite N-plate au voisinage de K si et seulement si δ vérifie pour tout $k > 0$ il existe $C_{k,\delta,N} \geq 0$ tels que :*

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} N_p^{-1}.k^{-p}.d(\zeta, K)^{-p}\,\delta(\zeta) \leq C_{k,\delta,N} \tag{3.25}$$

Théorème 3.4. *Soit $\delta \in \Delta(K)$ une fonction N-plate au voisinage du compact K, si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors l'opérateur de restriction à K est continu de $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ sur $J^0_M(K)$, où $M_p = N_{p+2n-1}$.*

Démonstration

La fonction $h\,\psi \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ et grâce aux estimations (3.21), (3.23), l'hypothèse (3.25) et le théorème(3.1) on a le théorème(3.4). ■

Théorème 3.5. *Soit $K = \bar{\Omega}$ où Ω est un ouvert connexe. On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ on ait :*

$$h^{(\alpha)}(z_0) = 0$$

alors $h = 0$ sur K.

Démonstration

Comme h est holomorphe sur Ω qui est connexe alors $h = 0$ sur Ω et par continuité sur $\bar{\Omega} = K$. ■

Le problème reste ouvert dans le cas d'un compact connexe quelconque. Sauf dans le cas d'un arc réctifiable [2] ; où on donne une condition nécessaire et suffisante de quasi-analyticité ou bien et contrairement dans [13] où on donne pour un compact E de $\mathbb{C}$ de mesure nulle une condition suffisante de non quasi-analyticité.

Le problème d'extension est complètement résolu par E.M.Dynkin [5] [6] et par J.Chaumat et A-M.Chollet [4].

Références

[1] R.Arens et A.P-Calderon : Analytic functions of several Banach algebra elements. Ann. Of Math. (2) 62 (1955), pp 204-216.

[2] J.E-Brennan : Weighted polynomial approximation, quasi-analyticity and analytic continuation. J.Reine Angew. Math. 357 (1985) pp 23-50.

[3] J.Chaumat et A-M.Chollet : Noyaux pour résoudre l'équation $\bar{\partial}$ dans des classes ultra-différentiables sur des compacts irréguliers de $\mathbb{C}^n$, Several complex variable. Proc. Mittag-Leffler Inst. 1987-1988, Maths notes 38, Princeton Univ.

[4] J.Chaumat et A-M.Chollet : Représentation intégrale de certaines classes de jets de Whitney.Proc. Madisson Sym. On complex analysis, Contemporary Mathematics, Vol 137. 1992. Amer.Mathe.Soc. pp 133-153.

[5] E.M.Dynkin : An operator calculus based on the Cauchy-Green formula , and the quasi-analyticity of the classes $\mathcal{D}(h)$, in : Seminars in Mathematics, consultants Bureau, New York-London (1972), pp. 128-131.

[6] E.M.Dynkin : Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale Amer.Math.Soc.Transl. 115 (1980), pp 33-58.

[7] M.El hodaibi : Application du calcul fonctionnel à l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Bulletin of Belgian Mathematical Society. 6 (1999) 423-441.

[8] M.El hodaibi : Algèbres de fonctions et Calcul Fonctionnel. Thèse d'etat 1998, Faculté des Sciences Oujda.

[9] M.Hemdaoui :Calcul symbolique et l'opérateur de Laplace. Doctorat Univérsité libre de Bruxelles année académique 1986-1987 BELGIQUE.

[10] M.Hemdaoui : Algèbre utile au Calcul Fonctionnel. Preprint, Faculté des Sciences Oujda 1998.

[11] G.M.Henkin et J.Leiterer : Theory of functions on complex manifolds, Monographsin Mathematics 79, Birkha´user Verlag, 1984.

[12] L.Hörmander : The analysis of Linear Partial Differential Operators I (1983) A Series of Comprehencive Studies in Mathematics 256, Springer-Verlag.

[13] K.Kellay et M.Zarrabi : Normality, non quasi-analyticity and invariant subspaces. Communication.

[14] Nguyen the Hoc : Croissance des coefficients spectraux et calcul fonctionnel. Thèse année académique 1975-1976 U.L.B Bruxelles Belgique.

[15] Nguyen the Hoc : Calcul fonctionnel dépendant de la croissance des coefficients spectraux. Annales de L'Institut Fourier Tome 27 fascicule 4 1977.

[16] P.PFLUG : Eigensehaften der Fortsetzungen von in speziellen Gebieten Holomorphen Polynomialen Funktionen in die Holomorphieehllen, Thèse, Göttingen 1972.

[17] L.Schwartz : Théorie des distributions. Hermann 1966.

[18] A.Soigatt : Algèbres de germes en un point et Calcul Fonctionnel. Thèse de 3ème cycle 1996, Faculté des Sciences Oujda.

[19] L.Waelboeck : Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. J.Math P et App. 9, 33, 1954. pp 147-186.

[20] L.Waelboeck : Calcul Symbolique lié à la croissance de la résolvante Rend.del Sem.Mat.e Fis. di Milano 34 (1964), pp 51-72.

[21] C.Wrobel : Extension du calcul fonctionnel holomorphe. Revue Math II institue Elie Cartan 1972 Nancy France.

Université Mohammed 1er, Faculté des Sciences
Département de Mathématique Oujda, Maroc
e.mail : hemdaoui@sciences.univ-oujda.ac.ma, hodaibi@sciences.univ-oujda.ac.ma