La réponse affirmative au problème de Michael

Mustapha Laayouni

Abstract

In this paper we give a positive answer to the Michael's problem: we will prouve that every character on a Fréchet algebra is automatically continuous. It follows that every character of a commutative complete A-L-M-C is bounded.

Introduction: C'était vers les années vingt que débuta l'élaboration et l'investigation dans les algèbres de Banach. A ce sujet plusieurs résultats fondamentaux ont été établis. Ainsi il était connu que dans une algèbre de Banach commutative tous les caractères sont automatiquement continus.

En 1952, E. Michael a généralisé, dans son fameux mémoire [**2**], une grande partie des notions et des résultats des algèbres de Banach aux algèbres de Fréchet. Il a alors posé le problème de continuité automatique des caractères de telles algèbres. Dans la suite nous donnons une réponse affirmative à ce fameux problème. Plus généralement on montre que tout homomorphisme surjectif d'une algèbre de Fréchet sur une algèbre de Banach semi-simple est automatiquement continu. La preuve élaborée est basée sur une idée ingénieuse de T. J. Ransford développée dans [**3**] pour donner une courte démonstration au théorème classique de Johnson sur l'unicité de la topologie d'une algèbre de Banach semi-simple. Comme conséquence, la bornologie automatique des caractères d'une A-L-M-C commutative complète s'ensuit.

Soit A une algèbre de Fréchet, c'est-à-dire: une algèbre topologique métrisable complète dont la topologie est définie par une suite croissante $(\|.\|_i)_{i\geq 1}$ de semi-normes sous-multiplicatives. Pour tout $i \geq 1$:

a) N_i dénote le noyau de la semi-norme $\|.\|_i$.

Received by the editors April 2000.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 46H05.
Key words and phrases : Semi-norme, rayon spectral, caractère, algèbre de Fréchet.

b) A_i dénote l'algèbre normée A/N_i équipée de la norme quotient notée $\|.\|_i$ telle que:
$\|x+N_i\|_i = \inf\{\|x+t\|_i : t \in N_i\} = \|x\|_i$. Posons $\overline{A_i}$ l'algèbre complété de A_i.

c) π_i est l'épimorphisme naturel de A sur A_i.

d) $Sp_A(x)$ [respectivement $Sp_{\overline{A_i}}(\pi_i(x))$] dénote le spectre de x dans A [respectivement de $\pi_i(x)$ dans l'algèbre de Banach $\overline{A_i}$]. Il est connu que:
$Sp_A(x) = \cup_{i\geq 1} Sp_{\overline{A_i}}(\pi_i(x))$ (voir [**2**]).

e) Le rayon spectral défini par E. A. Michael est donné par :
$\rho(x) = \sup_{i\geq 1} \rho_i(\pi_i(x))$ où $\rho_i(\pi_i(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} [\|x^n\|_i]^{\frac{1}{n}}$.

Maintenant soit B une algèbre de Banach sur le corps des nombres complexes. Elle vérifie les deux lemmes suivants introduits par T. J. Ransford (voir [**3**]):

Lemme 1: *Soient B une algèbre de Banach et b un élément de B. On suppose que $\rho_B(b'b) = 0$ pour tout $b' \in B$. Alors $b \in Rad(B)$.*

Lemme 2 : *Soient B une algèbre de Banach, P(z) un polynôme à coefficients dans B et R un réel strictement positif. Alors:*
$\rho_B(P(1))^2 \leq \sup_{|z|=R} \rho_B(P(z)) \sup_{|z|=R^{-1}} \rho_B(P(z))$.

En utilisant ces deux lemmes on démontre le résultat principal suivant:

Théorème 1: *Tout homomorphisme d'algèbres surjectif d'une algèbre de Fréchet, sur une algèbre de Banach semi-simple est automatiquement continu.*

Preuve: Soit θ un homomorphisme d'algèbres surjectif d'une algèbre de Fréchet $(A, (\|.\|_i)_{i\geq 1})$ sur une algèbre de Banach semi-simple $(B, \|.\|)$. On dénote par $S(\theta)$ l'ensemble des éléments b de B pour lesquels il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dans A telle $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\theta(a_n)) = b$. $S(\theta)$ est un idéal de B. D'après le théorème du graphe fermé θ est continu si et seulement si, $S(\theta) = \{0\}$.

Supposons que $(a_n) \to 0$ dans A et que $(\theta(a_n))_{n\geq 1} \to b$ dans B lorsque n tend vers l'infini. Soit z un nombre complexe arbitraire. Choisissons $a \in A$ tel que $\theta(a) = b$ et pour tout $n \geq 1$, posons :

$$P_n(z) = z\theta(a_n) + (\theta(a) - \theta(a_n)).$$

Puisque θ est un homomorphisme d'algèbres donc, il satisfait:

$$Sp_B(\theta(x)) \subset Sp_A(x) \text{ pour tout } x \in A.$$

Donc pour tout nombre complexe z on a:

$$\rho_B(P_n(z)) \leq \rho_A(za_n + (a - a_n)) \leq \sup_{i\geq 1} \rho_{\overline{A_i}}(z\pi_i(a_n) + \pi_i(a - a_n)).$$

Donc $\rho_B(P_n(z)) \leq \sup_{i\geq 1} \|za_n + (a-a_n)\|_i = \sup_{i\geq 1} [|z|\,\|a_n\|_i + \|a - a_n\|_i]$.

Considérons une suite $(R_m)_{m\geq 1}$ de nombres réels positifs strictement croissante tendant vers l'infini (par exemple $R_m = \exp(m)$).

Pour tout $(m,n) \in IN^* \times IN^*$ et pour tout nombre complexe z tel que $|z| = R_m$, il existe un entier naturel $j_{m,n} \geq 1$ tel que:

$\rho_B(P_n(z)) \leq R_m \|a_n\|_{j_{m,n}} + \|a - a_n\|_{j_{m,n}} + 1$

Par induction on construit la famille $(j_{m,n})_{m,n \geq 1}$ comme suit:

i) $j_{m,n} = j_{n,m}$, $\forall (m,n) \in IN^* \times IN^*$ et

ii) $j_{1,1} < j_{1,2} < j_{2,2} < j_{1,3} < j_{2,3} < j_{3,3} < j_{1,4} < ... < j_{4,4} < j_{1,5} < ... < j_{5,5} < j_{1,6} < .....$

Soit $(p,q) \in IN^* \times IN^*$ tel que $m < p$ ou $n < q$. D'après la condition (i) on peut supposer que $n < q$. D'après (ii), $j_{m,n} < j_{p,q}$. Or la suite des semi-normes qui définissent la topologie de l'algèbre de Fréchet A est croissante, donc:

$\rho_B(P_n(z)) \leq R_m \|a_n\|_{j_{p,q}} + \|a - a_n\|_{j_{p,q}} + 1$, $\forall (p,q) \in IN^* \times IN^*$ tel que $m < p$ ou $n < q$.

Or l'ensemble $I_{m,n} = \{(p,q) \in IN^* \times IN^* : p \leq m \text{ } et \text{ } q \leq n\}$ est fini, quitte à remplacer les semi-normes $\|.\|_{j_{p,q}}$, $(p,q) \in I_{m,n}$ par $c\|.\|_{j_{p,q}}$ (où c est une constante réelle strictement positive bien choisie) on peut écrire pour tout nombre complexe z tel que $|z| = R_m$:

$\rho_B(P_n(z)) \leq R_m \|a_n\|_{j_{p,q}} + \|a - a_n\|_{j_{p,q}} + 1$, $\forall p \geq 1$, $\forall q \geq 1$. D'où:

$$\sup_{|z|=R_m} \rho_B(P_n(z)) \leq R_m \|a\|_{j_{p,q}} + \|a - a_n\|_{j_{p,q}} + 1, \forall p \geq 1, \forall q \geq 1. \tag{I}$$

Par ailleurs $\rho_B(P_n(z)) \leq \|P_n(z)\| \leq |z| \, \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a_n) - \theta(a)\|$, donc:

$$\sup_{|z|=R_m^{-1}} \rho_B(P_n(z)) \leq R_m^{-1} \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a) - \theta(a_n)\| \tag{II}$$

En combinant les relations (I) et (II) avec le lemme 2, on peut donc déduire que pour tous les entiers naturels non nuls m, n, p et q:

$\rho_B(P_n(1))^2 \leq \left[R_m \|a_n\|_{j_{p,q}} + \|a - a_n\|_{j_{p,q}} + 1\right] [R_m^{-1} \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a) - \theta(a_n)\|]$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient:

$\forall m \geq 1, \forall p \geq 1, \forall q \geq 1 : \ \rho_B(b)^2 \leq \left[\|a\|_{j_{p,q}} + 1 \right] [R_m^{-1} \|b\|]$. Lorsque m tend vers l'infini, on en déduit que:

$$\forall b \in S(\theta), \ \rho_B(b) = 0. \tag{III}$$

Soit alors $b' \in B$. Il existe un élément $a' \in A$ tel que $\theta(a') = b'$. Alors $(a'a_n)_{n \geq 1} \to 0$ dans A et $(\theta(a'a_n))_{n \geq 1} \to b'b$ dans B lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $b'b \in S(\theta)$. D'après (III) on a donc $\rho_B(b'b) = 0$. D'après le lemme 1, $b \in Rad(B)$. Donc $b = 0$ et $S(\theta) = \{0\}$.

Dans le théorème 1, prenons pour B le corps des nombres complexes, qui est bien une algèbre de Banach semi-simple. Un caractère non nul d'une algèbre de Fréchet A est un homomorphisme surjectif d'algèbres de A sur B. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Théorème 2: *Soit A une algèbre de Fréchet. Alors tous les caractères de A sont automatiquement continus.*

En combinant ce théorème avec le corollaire 5.5 de **[2]**, p.19, on obtient:

Corollaire: *Soit A une algèbre de Fréchet commutative. Alors le radical de A est:* $Rad(A) = \{x \in A : f(x) = 0, \forall f \in \aleph(A)\}$ *où* $\aleph(A)$ *désigne l'ensemble de tous les caractères de A.*

Le second problème de Michael consiste à savoir si tous les caractères d'une A-L-M-C complète commutative sont automatiquement bornés. Dans [**1**], P. G. Dixon et D. H. Fremlin ont montré le théorème suivant:

Théorème 3 [1]: *Les assertions suivantes sont équivalentes:*
α) *Tous les caractères d'une algèbre de Fréchet commutative sont continus.*
β) *Tous les caractères d'une A-L-M-C. commutative complètes sont bornés.*

On peut donc énoncer:

Théorème 4: *Tous les caractères d'une A-L-M-C. commutative complète sont bornés.*

References

[1] P. G. Dixon and D. H. Fremlin: *A remark conserning multiplicative functionals on L-M-C algebras.* J. London Math. Soc. 5, (1972), p.231-232.

[2] E. A. Michael: *Locally multiplicatively-convex topological algebras.* Mem. Amer. Mat. Soc. $N°$ 11 (1952) .

[3] T. J. Ransford: *A short proof of Jhonsons uniqueness-of-norm theorem.* Bull. London Math. Soc., 21 (1989), p.487-488.

Départ. de Math.
Université MY Ismail,
F.S.T. ERRACHIDIA,
MAROC.