Une réduction du problème de la continuité des caractères dans les algèbres m-pseudo-convexes

Z. Abdelali M. Chidami

Abstract

In this paper, we extend the PG. Dixon and J. Esterle's approach of E.A. Michael problem to the class of complex, complete, metrizable m-pseudoconvex algebras. We show that if discontinuous characters do exist on some complete, metrizable m-pseudoconvex algebras, then every projective limit $\varprojlim(\mathbb{C}^{p_n}, F_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \neq \emptyset$, where $F_n : \mathbb{C}^{p_{n+1}} \to \mathbb{C}^{p_n}$ is entire, $p_n \in \mathbb{N}^*$. We construct, also, a complete, metrizable m-pseudoconvex algebras $\mathcal{E}$ such that if there exist discontinuous characters on some complete, metrizable m-pseudoconvex algebra there must exist some on $\mathcal{E}$.

L'objectif de ce travail est d'étendre l'approche de P.G. Dixon et J. Esterle (§2, §3 [2]), du problème de E.A. Michael [3], à la classe d'algèbres m-pseudo-convexes métrisables complètes (le corps de base est $\mathbb{C}$). Ainsi nous construisons, d'une part, une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète $\mathcal{E}$ telle que l'existence d'un caractère non continu sur une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète implique que $\mathcal{E}$ n'est pas à caractères continus. D'autre part, nous montrons que si la limite projective $\varprojlim(\mathbb{C}^{p_n}, F_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \emptyset$, pour un certain système projectif $(F_n : \mathbb{C}^{p_{n+1}} \to \mathbb{C}^{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions entières $((p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{N}^*)$. Alors toute algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète est à caractères continus.
Rappelons qu'une algèbre topologique A est dite m-pseudo-convexe métrisable, si la topologie de A est définie par une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où P_n est une r_n-semi-norme

Received by the editors March 2000.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 46 H 05.
Key words and phrases : algèbre, caractères, continuité.

sous multiplicative ($r_n \in]0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$). C'est à dire que pour tout scalaire λ est tout couple $(a,b) \in A^2$, $P_n(\lambda a) = |\lambda|^{r_n} P_n(a)$, $P_n(a+b) \leq P_n(a) + P_n(b)$ et $P_n(ab) \leq P_n(a)P_n(b)$. Pour $r_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) on retrouve le cas m-convexe. Soit A et B deux algèbres m-pseudo-convexes métrisables, pour que F soit continue il faut et il suffit que pour toute r-semi-norme continue P sur B, il existe une r'-semi-norme continue P' sur A telle que, pour tout $a \in A$, $P(F(a))^{\frac{1}{r}} \leq P'(a)^{\frac{1}{r'}}$. Pour plus de détails sur ces algèbres voir [4] ou [6].
Désignons par $\mathcal{E}$ la sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles d'indéterminées non commutatives $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\mathcal{E} = \{f = \sum_{(i)\in I} f_{(i)} X^{(i)} / \ P_n(f) = \sum_{(i)\in I} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|} < \infty \ (n \in \mathbb{N}^*)\}$$

où $I = \{(i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{N}^{*n}\} \cup \{(0)\}$, $(0) = \emptyset$, $X^{(0)} = 1$, $|(0)| = 0$ et pour $(i) = (i_1, \ ..., \ i_m)$, $|(i)| = m$ et $X^{(i)} = X_{i_1}...X_{i_m}$. Il est clair que $(\mathcal{E}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Remarquons que l'algèbre $(\mathcal{E}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ n'est pas localement convexe.

Théorème. *I) S'il existe un caractère non continu sur une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète, non nécessairement commutative, alors il existe un caractère non continu sur $(\mathcal{E}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$.*

II) S'il existe un système projectif de fonctions entières $(F_n : \mathbb{C}^{p_{n+1}} \to \mathbb{C}^{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, tel que la limite projective $\varprojlim(\mathbb{C}^{p_n}, F_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \emptyset$. Alors toute algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète est à caractères continus.

Preuve. I) Soit A une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète. Pour toute suite bornée $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$, notons par $a^{(i_1,...,i_m)} = a_{i_1}...a_{i_m}$. Alors l'application :

$$\Phi_a \ : \mathcal{E} \longrightarrow A$$

$$f = \sum_{(i)\in I} f_{(i)} X^{(i)} \ \to \ f(a) = \sum_{(i)\in I} f_{(i)} a^{(i)}$$

est bien définie. En effet, pour toute p-semi-norme ($p \in]0,1]$) continue P sur A, soit n un entier vérifiant $n \geq \max\{\frac{1}{p}, \ \sup_{m\in\mathbb{N}^*}\{P(a_m)\}\}$. On a, pour tout $J \subseteq I$, fini :

$$(P(\sum_{(i)\in J} f_{(i)} a^{(i)}))^{\frac{1}{pn}} \leq (\sum_{(i)\in J} |f_{(i)}|^p n^{|(i)|})^{\frac{1}{pn}} \leq \sum_{(i)\in I} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|} = P_n(f).$$

Remarquons que Φ_a est aussi un morphisme d'algèbres. Si ϕ est un caractère non continu sur A, alors il existe une suite bornée $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $(\phi(a_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée. Donc le caractère $\phi o \Phi_a$ est non borné sur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi $\mathcal{E}$ n'est pas à caractères continus.

II) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit $I_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1, ..., p\}^n$ où $\{1, ..., p\}^0 = \{(0)\}$. Le lemme suivant permet d'étendre les techniques du (§3, [2]) au cas m-pseudo-convexe.

Lemme. *Soit $\mathcal{E}_p$ et $\mathcal{E}'_p$, $p \in \mathbb{N}^*$, les deux sous-algèbres de l'algèbre des séries formelles d'indéterminées non commutatives $X_1, ..., X_p$ définies par :*

$$\mathcal{E}_p = \{f = \sum_{(i)\in I_p} f_{(i)} X^{(i)} / \ P_n(f) = \sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|} < \infty \ (n \in \mathbb{N}^*)\},$$

$$\mathcal{E}'_p = \{f = \sum_{(i)\in I_p} f_{(i)} X^{(i)} / \ P'_n(f) = \sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}| n^{|(i)|} < \infty \ (n \in \mathbb{N}^*)\}.$$

Alors $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}'_p$ et $(\mathcal{E}_p, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est isomorphe à $(\mathcal{E}_p, (P'_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$.

Preuve. Pour toute série formelle $f = \sum_{(i)\in I_p} f_{(i)} X^{(i)}$,

$$(P'_n(f))^{\frac{1}{n}} = (\sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}| n^{|(i)|})^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{\frac{|(i)|}{n}} \leq \sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|} = P_n(f)$$

Donc $\mathcal{E}_p \subseteq \mathcal{E}'_p$. Remarquons d'abord qu'on a :

$$\sum_{(i)\in I_p} \frac{1}{2}(\frac{1}{2p})^{|(i)|} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}(\frac{1}{2p})^m (\sum_{(i)\in\{1,...,p\}^m} 1) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}(\frac{1}{2p})^m p^m = \sum_{m\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2})^{m+1} = 1 \ .$$

La convexité de la fonction réelle $\lambda \to |\lambda|^n, \ n \in \mathbb{N}^*$, permet d'avoir :

$$P_n(f)^n = (\sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|})^n = (\sum_{(i)\in I_p} \frac{1}{2}(\frac{1}{2p})^{|(i)|} (2(2p)^{|(i)|} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|}))^n$$

$$\leq \sum_{(i)\in I_p} \frac{1}{2}(\frac{1}{2p})^{|(i)|} (2(2p)^{|(i)|} |f_{(i)}|^{\frac{1}{n}} n^{|(i)|})^n \leq \sum_{(i)\in I_p} |f_{(i)}| ((4pn)^n)^{|(i)|} = P'_{(4pn)^n}(f) \ .$$

D'où $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}'_p$ et $(\mathcal{E}_p, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est isomorphe à $(\mathcal{E}_p, (P'_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$.

Conséquences. (i) L'algèbre $(\mathcal{E}_p, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est exactement l'algèbre introduite dans (§3, [2]). Donc d'après (Prop.3.1, [2]), tout caractère χ de l'algèbre $\mathcal{E}_p$ est continu, d'où $\chi(\sum_{(i)\in I_p} f_{(i)} X^{(i)}) = \sum_{(i)\in I_p} f_{(i)}(\chi(X^{(i)}))$. D'autre part, à toute fonction entière $f : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}; \ (z_1, ..., z_p) \to \sum_{(i_1,...,i_p)\in\mathbb{N}^p} f_{(i_1,...,i_p)} z_1^{i_1} ... z_p^{i_p}$, on peut associer canoniquement l'élément $\tilde{f} = \sum_{(i_1,...,i_p)\in\mathbb{N}^p} f_{(i_1,...,i_p)} X_1^{i_1} ... X_p^{i_p}$ de $\mathcal{E}_p$.

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{E}_p$ est la sous-algèbre fermée de $(\mathcal{E}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ engendrée par $X_1, ..., X_p$. Ainsi pour toute algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète A et toute suite finie $a = (a_1, ..., a_p) \in A^p$, on note par Φ_a la restriction à $\mathcal{E}_p$ du morphisme $\Phi_{(a_m)_{m\in\mathbb{N}^*}}$, où $a_m = 0$ pour tout entier $m \geq p+1$. Pour toute fonction entière $f : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, posons $f(a_1, ..., a_p) = \Phi_a(\tilde{f})$. Donc pour tout caractère χ de A, $\chi o \Phi_a$ est un caractère de $\mathcal{E}_p$. D'où

$$\chi(f(a_1, ..., a_p)) = \chi o \Phi_a(\tilde{f}) = f(\chi(a_1), ..., \chi(a_p)) \ .$$

D'autre part, il est clair que l'application : $A^p \to \ A; \ (a_1, ..., a_p) \to \ f(a_1, ..., a_p)$ est continue.

Pour la suite nous procédons comme dans la preuve du (Theo.3.3, [2]). Soit $(F_n : \mathbb{C}^{p_{n+1}} \to \mathbb{C}^{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions entières. Supposons qu'il existe une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète A possédant un caractère χ non continu. Pour tout $a = (a_1, ..., a_p) \in A^p$, notons $\chi_p(a) = (\chi(a_1), ..., \chi(a_p))$. L'espace $\mathcal{M}^p = Ker(\chi)^p$ est dense dans A^p. Soit E_n l'epace topologique produit $A^{p_n} \times \mathcal{M}^{q_n}$, où $\mathcal{M}$ est muni de la topologie discrète, $q_1 = 0$, $q_{n+1} = p_1 + ... + p_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. L'application :

$$\Theta_n \ : \ E_{n+1} \ \to \ E_n; \ (a, x_1, ..., x_{q_{n+1}}) \to (F(a) + (x_{q_n+1}, ..., x_{q_{n+1}}), x_1, ..., x_{q_n})$$

est continue, à image dense et E_n est un espace métrisable complet. Donc d'après le théorème de Mittag-Leffler (voir : Chap.2, §3, n° 5, [1]), l'espace $\varprojlim(E_n, \Theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non vide. Soit $(a_n, V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \varprojlim(E_n, \Theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}^*} A^{p_n} \times \mathcal{M}^{q_n}$. La définition de Θ montre que $F_n(a_{n+1}) - a_n \in \mathcal{M}^{p_n}$. Donc $\chi_{p_n}(a_n) = \chi_{p_n}(F_n(a_{n+1}))$ qui est égal, d'après ce qui précède, à $F_n(\chi_{p_{n+1}}(a_{n+1}))$. D'où $(\chi_{p_n}(a_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \in \varprojlim(\mathbb{C}^{p_n}, F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque. 1) Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre topologique quotient $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est l'idéal fermé de $\mathcal{E}$ engendré par $\{X^{(i_1,...,i_n)} - X^{(i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(n)})} / \ \sigma \in S_n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$, où S_n est le groupe des permutations de $\{1, ..., n\}$. L'algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète commutative $\mathcal{G}$ est l'analogue commutative de l'algèbre $\mathcal{E}$. C'est à dire, s'il existe un caractère non continu sur une algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète commutative, alors il existe un caractère non continu sur $\mathcal{G}$.

2) Comme conséquence du théorème s'il existe, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, une suite de fonctions entières $(F_n \ : \ \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_1 o...oF_n(\mathbb{C}^p) = \emptyset$. Alors toute algèbre m-pseudo-convexe métrisable complète est à caractères continus.
Récemment, B. Stensones [5] a construit un tel système pour $p = 3$. Mais il paraît qu'il y a quelques doutes à propos d'une partie de la démonstration.

References

[1] N. Bourbaki. Topologie générale. Chap.1 à 4. Masson (1990).

[2] P.G. Dixon and J. Esterle. Michael's problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon. Bull. Amer. Math. Soc. 15 (1986), pp. 127-187.

[3] E.A. Michael. Locally multiplicatively convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11(1952).

[4] P. Turpin. Sur une classe d'algèbres topologiques généralisant les algèbres localement bornées, These, Univ de Grenoble 1966.

[5] B. Stensones. A proof of the Michael conjecture. Preprint (University of Michigan).

[6] W. Żelazko. On the locally bounded and m-convex topological algebras, Studia. Math. 19 (1960), pp. 333-356.

Z. Abdelali et M. Chidami
Université Mohammed V,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques et Informatique,
B.P : 1014,
Rabat, Maroc.
E-mail: chidami@fsr.ac.ma, abdelali@fsr.ac.ma