Une note sur l'application d'évaluation en homotopie rationnelle

Fabio Simoncini*

Abstract

Let X be a 1-connected finite type CW complex. We prove that if $cat_0(X) = e_0(X) < \infty$, then the evaluation map

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}^*(X;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathcal{C}^*(X;\mathbb{Q})) \to H^*(X;\mathbb{Q})$$

is non zero.

1 Catégorie et invariant de Toomer

Dans ce texte les espaces seront supposés 1-connexes avec une cohomologie rationnelle de type fini

La catégorie LS (Lusternick-Schnirelmann) d'un espace X est l'infinimum des entiers n tels que X peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans X. *La catégorie rationnelle* de X, $cat_0(X)$, est la catégorie du rationnalisé de X.

Si $(\wedge V, d)$ désigne le modèle minimal de Sullivan de X, alors $cat_0(X)$ est le plus petit entier m tel que le modèle minimal de la projection $p : (\wedge\vee, d) \to (\wedge V/\wedge^{>m}V, d)$ admette une rétraction ([1]).

L'invariant $e_0(X)$ de Toomer est défini comme le supremum des entiers ℓ tels que $E_\infty^{l,*} \neq 0$ dans la suite spectrale de Milnor-Moore

$$E_2^{l,*} = Ext^l_{H_*(\Omega X;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X;\mathbb{Q})$$

Il a été introduit pour approximer la catégorie ([4]) : $e_0(X) \leq cat_0(X)$.

En filtrant le modèle minimal de Sullivan par les puissances de l'idéal $\wedge^+V$, on obtient une suite spectrale isomorphe à partir du terme E_2 à celle de Milnor-Moore.

*L'auteur remercie le FNRS (subside numéro 21-43406-95) pour lui avoir permis de réaliser ce travail

Received by the editors June 1999.

Communicated by Y. Félix.

2 Modules semilibres et applications d'évaluation

Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée homologiquement connexe définie sur un corps k. Un A-module différentiel à gauche (P,d) est dit *semi-libre* si $P = \oplus_{n\geq 0} P_n$, avec $d(P_n) \subset \oplus_{m<n} P_m$ et si chaque P_n est un A-module libre.

Une *résolution semi-libre* d'un module différentiel (M, d) est un quasi-isomorphisme de modules différentiels $f : P \to M$, avec P semi-libre. La résolution est minimale si $d(P) < A^+.P$. Si A et M sont connexes de type fini, alors M admet toujours une résolution minimale.

Si M et N sont deux A-modules différentiels, et si $P \to M$ est une résolution semi-libre, l'homologie du complexe $Hom_A(P, N)$ ne dépend pas du choix de P et se note $\mathrm{Ext}_A(M, N)$.

Soit (P, d) une résolution semi-libre de $(k, 0)$, et a un cocycle de (P, d) correspondant à l'élément de 1 de k, alors l'évaluation en a induit un morphisme

$$ev : \mathrm{Ext}_A(k, N) \to H(N)$$

appelé morphisme d'évaluation [2].

3 Le Théorème

Théorème. *Soit X un CW complexe 1-connexe de type fini. Supposons que $cat_0(X) = e_0(X) < \infty$, alors l'application d'évaluation*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}^*(X,\mathbb{Q})}\,(Q, \mathcal{C}^*(X; \mathbb{Q})) \to H^*(X; \mathbb{Q})$$

est non nulle.

Proof. Soit $\varepsilon : (\wedge V \otimes (\mathbb{Q} \oplus E), d) \to (\mathbb{Q}, 0)$ une résolution semi-libre minimale de $(\mathbb{Q}, 0)$, avec $\varepsilon(1) = 1$.

Notons $m = cat_0(X)$. Par hypothèse $(\wedge V, d)$ est rétracte homotopique de $(\wedge V/\wedge^{>m} V, d)$, i.e. il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\wedge V\,, d) & \to & (\wedge V/\wedge^{>m} V, d) \\ & \searrow & \simeq\uparrow p \\ & & (\wedge V \otimes \wedge W, d) \end{array}$$

et une application $r : (\wedge V \otimes \wedge W, d) \to (\wedge V, d)$ tels que $ri = id_{\wedge V}$ Il existe en outre un cocycle non cohomologiquement trivial α dans $\wedge^{\geq m} V$.

Soit $\varphi : (\wedge V \otimes (\mathbb{Q} \oplus E), d) \to (\wedge V/\wedge^{>m} V, d)$ le morphisme défini par $\varphi(1) = \alpha$ et $\varphi(E) = 0$. Comme p est un quasi-isomorphisme surjectif et $(\wedge V \otimes (\mathbb{Q} \oplus E), d)$ est semi-libre, φ se relève en un morphisme

$$\bar{\varphi} : (\wedge V \otimes (\mathbb{Q} \oplus E), d) \to (\wedge V \otimes \wedge W, d)$$

tel que $p\bar{\varphi} = \varphi$. De plus $\bar{\varphi}$ se construisant par induction sur la filtration semi-libre, on peut supposer que $\bar{\varphi}(1) = \alpha$.

Le composé $r\bar{\varphi}$ définit un élément de

$$\mathrm{Ext}_{(\wedge V,d)}(Q, (\wedge V, d)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}^*(X;Q)}(Q, C^*(X; \mathbb{Q}))$$

et $ev[r\bar{\varphi}] = [r\bar{\varphi}(\alpha)] = [\alpha]$. L'application d'évaluation est donc non nulle ■

4 Remarque

En remplaçant les modèles Sullivan par les $T(V)$-modèles d'Halperin-Lemaire [3], on peut étendre le résultat précédent sur les corps finis de la manière suivante.

Si N est un $(T(V), d)$-module différentiel, on pose $cat(N)$ l'entier n minimum pour lequel un modèle semi-libre de $p_n : N \to N/_{T^{>n}(V)N}$ admette une rétraction, et $e(N)$ l'infimum des entiers n pour lesquels $H(p_n)$ est injectif. Dans ce cas, on a :

Théorème. *Soit N un A-module différentiel tel que $e(N) = cat(N) < \infty$, alors $ev : \mathrm{Ext}_A(k, N) \to H(N)$ est non nul.*

References

[1] Y. Felix et S. Halperin, Rational L.S category and its applications, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 1-37.

[2] Y. Felix, S. Halperin, J.C. Thomas, Gorenstein spaces, Adv.in Math.71 (1988), 92-112.

[3] S. Halperin et J.M. Lemaire, Notions of category in differential algebra. Lecture notes in Math. 1318 (1988), 138-154.

[4] G.H. Toorner, Lusternick-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence, Math. Z. 138 (1974), 123-143.

Fabio Simoncini
Département de Mathématique, EPFL
1015 Lausanne
Switzerland