波動幾何學による宇宙論に於ける $M, N, u^i, \ldots$ 等に就いて

竹野兵一郎

(昭和 18 年 11 月 5 日受附)

§1. 序言。 波動幾何學による宇宙論に於て最も重要な役割を演じてゐる量は，g_{ij} を一次化して得られる 4－4 行列 γ_i と空間の狀態函數 ψ とより作られる運動量密度ベクトル $u^i\equiv\psi^\dagger A\gamma^i\psi$ である。然るに γ_i と ψ とを用ひて作られる量は單に u^i のみでなくその他にも $M\equiv\psi^\dagger A\psi$, $N\equiv\psi^\dagger A\gamma_5\psi$, … 等色々のものが考へられる。之等の量の數學的性質については既に相當研究されてゐるのであるが,[1] それ等の物理的意味附けに至つては u^i 以外には未だ殆んど研究されてゐない。

以下本論文に於ては宇宙論に於ける之等の量の具體的の形を求め更にそれ等に含まれる常數の間の關係式を決定し以て將來の研究の資に供したいと思ふ。

§2. 基本方程式の解。 宇宙論に於ける ψ の基本方程式は

$$\Gamma_i\psi=\frac{k}{2}\gamma_i\psi \tag{2.1}$$

で與へられる。この式の完全積分條件式 $K_{ijlm}=k^2(g_{im}g_{jl}-g_{il}g_{jm})$ を解くことに依つて四次元時空の計量

$$ds^2=-\sigma^{-2}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2+\sigma^2dt^2 \quad (\text{ド・ジッター型}) \tag{2.2}$$

$$ds^2=-e^{2kt}(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2)+dt^2 \quad (\text{ロバートソン型}) \tag{2.3}$$

但し $\sigma\equiv\sqrt{1-k^2r^2}$, が得られる。(2.2), (2.3) は變換

$$\bar r=re^{kt},\qquad e^{kt}\sqrt{1-k^2\bar r^2}=e^{k\bar t} \tag{2.4}$$

により互に結びつけられてゐるが(但し $\bar r, \bar t$ が (2.2) の座標系を表はす)，今 (2.3) を直角座標系に直せば

$$ds^2=-e^{2kt}(dx^2+dy^2+dz^2)+dt^2 \tag{2.5}$$

を得る。これに對して $\overset{a}{h}_i$ を[2]

(1) 柴田隆史，本誌，8，(1936)，160. 竹野，本誌，13，(昭和 18 年)，170.

(2) $\overset{a}{h}_i$ は $\gamma_i=\overset{a}{h}_i f_a$, $\gamma_{(i}\gamma_{j)}=g_{ij}$ を滿足する四つのベクトルであり $\sum_a\overset{a}{h}_i\overset{a}{h}_j=g_{ij}$ より求められる。

$$\overset{1}{h}_1=\overset{2}{h}_2=\overset{3}{h}_3=ie^{kt},\quad \overset{4}{h}_4=1 \quad \text{他の}\ \overset{a}{h}_i=0 \tag{2.6}$$

に選んだとき (2.1) の解 ψ は次式により與へられる。

$$\begin{cases} \psi_1=Ae^{\frac{k}{2}t}+c_1e^{-\frac{k}{2}t}, & \psi_2=Ce^{\frac{k}{2}t}+c_2e^{-\frac{k}{2}t} \\ \psi_3=i(Ae^{\frac{k}{2}t}-c_1e^{-\frac{k}{2}t}), & \psi_4=i(-Ce^{\frac{k}{2}t}+c_2e^{-\frac{k}{2}t}) \end{cases} \tag{2.7}$$

こゝに $A=k(c_1x+ic_2y-c_2z+c_3),\ C=-k(c_2x+ic_1y+c_1z+c_4)$ (2.8)

で, $c_i(i=1,2,3,4)$ は任意複素常數である。[1] 次節に於ては この解を用ひて $M, N, u^i, \ldots$ 等を求める。

§3. ロバートソン型の計量に對する $M, N, u^i, \ldots$。 $M, N, u^i, u^i{}_5, u_{ij5}, u_{ijk}, u_{ijk5}, u_{ijkl}, u_{ijkl5}$ を求めるには先づ

$$\begin{aligned} M&=i(-\bar{\psi}_1\psi_3+\bar{\psi}_2\psi_4+\bar{\psi}_3\psi_1-\bar{\psi}_4\psi_2), \\ N&=-\bar{\psi}_1\psi_3+\bar{\psi}_2\psi_4-\bar{\psi}_3\psi_1+\bar{\psi}_4\psi_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} u_{x5}&=ie^{kt}(\bar{\psi}_1\psi_1-\bar{\psi}_2\psi_2+\bar{\psi}_3\psi_3-\bar{\psi}_4\psi_4), \\ u_{y5}&=-e^{kt}(\bar{\psi}_1\psi_2-\bar{\psi}_2\psi_1-\bar{\psi}_3\psi_4+\bar{\psi}_4\psi_3) \\ u_{z5}&=ie^{kt}(-\bar{\psi}_1\psi_2-\bar{\psi}_2\psi_1+\bar{\psi}_3\psi_4+\bar{\psi}_4\psi_3), \\ u_{t5}&=i(\bar{\psi}_1\psi_1+\bar{\psi}_2\psi_2-\bar{\psi}_3\psi_3-\bar{\psi}_4\psi_4) \end{aligned} \tag{3.2}$$

により[2] M, N, u_{i5} を計算すれば他の量は全部之等の量の間に成立する恒等式[3]から容易に計算することが出來る。之等の結果をまとめると (この中 M 及び u^i は既に求められてゐる[4])

$$\begin{cases} M=k^2e^{kt}(pr^2+l_1x+l_2y+l_3z)+qe^{kt}-pe^{-kt} & (3.3) \\ N=2ik(-\bar{c}_1c_3+\bar{c}_2c_4+\bar{c}_3c_1-\bar{c}_4c_2) & (3.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^x=-ke^{-kt}(2px+l_1), \quad u^y,\ u^z\ \text{は同様の式} \\ u^t=k^2e^{kt}(pr^2-l_1x+l_2y+l_3z)+qe^{kt}+pe^{-kt} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} u_{x5}=i\left[-e^{2kt}\left\{m_1r^2-2x\left(m_1x+m_2y+m_3z+\dfrac{a}{2}\right)+(n_2z-n_3y)+e_1\right\}+\dfrac{m_1}{k^2}\right], \\ \qquad u_{y5},\ u_{z5}\ \text{は同様の式} \\ u_{t5}=i\left[\dfrac{2}{k}\left(m_1x+m_2y+m_3z+\dfrac{a}{2}\right)\right] \end{cases} \tag{3.6}$$

---

(1) 竹野, 本誌, 8, (1938), 228.
(2) 柴田隆史, 前掲, 173.
(3) 同上, 174. 竹野, 本誌, 13, (昭和 18 年), 171.
(4) 竹野, 本誌, 8, (1938), 228.

$$u_{yz5}=e^{kt}u_{xt}=\frac{ie^{2kt}}{k}\{2(m_2z-m_3y)-n_1\}$$

$$u_{xt5}=-e^{-kt}u_{yz}=i\left[e^{2kt}\left\{m_1r^2-2x\left(m_1x+m_2y+m_3z+\frac{a}{2}\right)+(n_2z-n_3y)+l_1\right\}+\frac{m_1}{k^2}\right] \tag{3.7}$$

$u_{zx5}, u_{xy5}, u_{yt}, u_{zt}$; $u_{yt5}, u_{zt5}, u_{zx}, u_{xy}$ は上式より 1, 2, 3; x, y, z の循環により得られる。こゝに $l_\lambda, m_\lambda, n_\lambda, e_\lambda$ $(\lambda=1, 2, 3)$, p, q, a は N と共に c_i より定まる實常數で次の式により與へられる。

$$\begin{cases} l_1=2(\bar{c}_1c_3+\bar{c}_2c_4+\bar{c}_3c_1+\bar{c}_4c_2) \\ l_2=2i(-\bar{c}_1c_4-\bar{c}_2c_3+\bar{c}_3c_2+\bar{c}_4c_1) \\ l_3=2(\bar{c}_1c_4-\bar{c}_2c_3-\bar{c}_3c_2+\bar{c}_4c_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1=2k^2(\bar{c}_1c_1-\bar{c}_2c_2) \\ m_2=2k^2i(\bar{c}_1c_2-\bar{c}_2c_1) \\ m_3=-2k^2(\bar{c}_1c_2+\bar{c}_2c_1) \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} n_1=2k^2i(\bar{c}_1c_3+\bar{c}_2c_4-\bar{c}_3c_1-\bar{c}_4c_2) \\ n_2=2k^2(\bar{c}_1c_4+\bar{c}_2c_3+\bar{c}_3c_2+\bar{c}_4c_1) \\ n_3=2k^2i(\bar{c}_1c_4-\bar{c}_2c_3+\bar{c}_3c_2-\bar{c}_4c_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1=2k^2(-\bar{c}_3c_3+\bar{c}_4c_4) \\ e_2=2k^2i(\bar{c}_3c_4-\bar{c}_4c_3) \\ e_3=-2k^2(\bar{c}_3c_4+\bar{c}_4c_3) \end{cases} \tag{3.9}$$

$$a=2k^2(\bar{c}_1c_3-\bar{c}_2c_4+\bar{c}_3c_1-\bar{c}_4c_2), \qquad p=2(\bar{c}_1c_1+\bar{c}_2c_2), \qquad q=2k^2(\bar{c}_3c_3+\bar{c}_4c_4) \tag{3.10}$$

もしも $l_\lambda, m_\lambda, n_\lambda, a$ が任意常數であるならばは u_{i5} は完全に無限小運動のベクトルと一致するが，實は後に示すやうに之等の常數の間には多くの恒等式が成立する。又 $u_{xt5}, u_{yt5}, u_{zt5}$ と u_{x5}, u_{y5}, u_{z5} が非常に良く似た形であるのは面白いことである。 $u_{ijk}, u_{ijk5}, \cdots$ も直ちに得られるが省略する。

§4. デ，ジッター型の計量に對する $M, N, u^i, \ldots$。 前節に於て得られた結果を極座標即ち (2.3) の座標系に變換し更に (2.4) を用ひるならば (2.2) に對するものとして次の結果を得る。(勿論 N は不變)

広大

$$M=(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma+k^2r\mathfrak{A}(l) \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} u^r=kr(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma-k\mathfrak{A}(l)\sigma^2 \\ u^\theta=-\dfrac{k}{r}\mathfrak{B}(l), \qquad u^\phi=-\dfrac{k}{r\sin\theta}\mathfrak{C}(l), \qquad u^t=\sigma^{-1}(pe^{-kt}+qe^{kt}) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} u_{r5}=i\left[\dfrac{e^{-kt}}{k^2\sigma}\mathfrak{A}(m)-\dfrac{e^{kt}}{\sigma}\mathfrak{A}(e)\right] \\ u_{\theta5}=i\left[\dfrac{re^{-kt}\sigma}{k^2}\mathfrak{B}(m)-r^2\mathfrak{C}(n)-re^{kt}\sigma\mathfrak{B}(e)\right] \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}u_{\phi 5}&=i\sin\theta\left[\frac{re^{-kt}\sigma}{k^2}\mathfrak{C}(m)+r^2\mathfrak{B}(n)-re^{kt}\sigma\mathfrak{C}(e)\right]\\u_{55}&=i\left[\frac{re^{-kt}\sigma}{k}\mathfrak{A}(m)+kre^{kt}\sigma\mathfrak{A}(e)+\frac{a}{k}\sigma^2\right]\end{aligned}\right.\tag{4.3}$$

$$\left\{\begin{aligned}u_{\theta\phi 5}&=r^2\sin\theta u_{rt}=-\frac{i}{k}r^2\sin\theta\mathfrak{A}(n)\\u_{\phi r5}&=\frac{\sin\theta}{\sigma^2}u_{\theta t}=\frac{ir\sin\theta}{k\sigma}\left[re^{-kt}\mathfrak{C}(m)-\sigma\mathfrak{B}(n)-k^2re^{kt}\mathfrak{C}(e)\right]\\u_{r\theta 5}&=\frac{1}{\sigma^2\sin\theta}u_{\phi t}=-\frac{ir}{k\sigma}\left[re^{-kt}\mathfrak{B}(m)+\sigma\mathfrak{C}(n)-k^2re^{kt}\mathfrak{B}(e)\right]\\u_{r55}&=-\frac{1}{r^2\sin\theta}u_{\theta\phi}=i\left[\frac{\sigma}{k^2}e^{-kt}\mathfrak{A}(m)-ra+\sigma e^{kt}\mathfrak{A}(e)\right]\\u_{\theta 55}&=-\frac{\sigma^2}{\sin\theta}u_{\phi r}=ir\sigma\left[\frac{1}{k^2}e^{-kt}\mathfrak{B}(m)+e^{kt}\mathfrak{B}(e)\right]\\u_{\phi 55}&=-\sigma^2\sin\theta u_{r\theta}=ir\sigma\sin\theta\left[\frac{1}{k^2}e^{-kt}\mathfrak{C}(m)+e^{kt}\mathfrak{C}(e)\right]\end{aligned}\right.\tag{4.4}$$

こゝに

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A}(m)&=m_1\sin\theta\cos\phi+m_2\sin\theta\sin\phi+m_3\cos\theta\\\mathfrak{B}(m)&=m_1\cos\theta\cos\phi+m_2\cos\theta\sin\phi-m_3\sin\theta\\\mathfrak{C}(m)&=-m_1\sin\phi+m_2\cos\phi,\quad\text{等}\end{aligned}\right.\tag{4.5}$$

從つて

$$\left\{\begin{aligned}&\partial_\theta\mathfrak{A}=\mathfrak{B},\ \partial_\theta\mathfrak{B}=-\mathfrak{A},\ \partial_\theta\mathfrak{C}=0\\&\partial_\phi\mathfrak{A}=\mathfrak{C}\sin\theta,\ \partial_\phi\mathfrak{B}=\mathfrak{C}\cos\theta\end{aligned}\right.\tag{4.6}$$

§5. デ, ジッター型計量に對應する (x, y, z, t) 系に於ける $M, N, u^i, \ldots$。 (2.2) に對して變換 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ を行へば次の計量を得る。

$$ds^2=-\left[\left(1+\frac{k^2x^2}{\sigma^2}\right)dx^2+\left(1+\frac{k^2y^2}{\sigma^2}\right)dy^2+\left(1+\frac{k^2z^2}{\sigma^2}\right)dz^2+\frac{2k^2yz}{\sigma^2}dydz+\frac{2k^2zx}{\sigma^2}dzdx+\frac{2k^2xy}{\sigma^2}dxdy\right]+\sigma^2dt^2\tag{5.1}$$

この座標系は數學的に見て相當面白い性質を有する。[1] この座標系に於ける $M, u^i, \ldots$ は次の通りである。

(1) 竹野, 本誌, 13, (昭和 18 年), 163.

$$M=(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma+k^2(l_1x+l_2y+l_3z) \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} u^x=kx(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma-k[l_1-k^2x(l_1x+l_2y+l_3z)] \\ \quad u^y,\ u^z \text{ は同様の式} \\ u^t=(pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma^{-1} \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} -iu_{x5}=\dfrac{e^{-kt}}{k^2\sigma}[m_1\sigma^2+k^2x(m_1x+m_2y+m_3z)] \\ \qquad -\dfrac{e^{kt}}{\sigma}(e_1\sigma^2+k^2x(e_1x+e_2y+e_3z))]-(n_2z-n_3y) \\ \quad u_{y5},\ u_{z5} \text{ は同様の式} \\ -iu_{t5}=\dfrac{e^{-kt}\sigma}{k}[m_1x+m_2y+m_3z]+\dfrac{a}{k}\sigma^2+ke^{kt}\sigma[e_1x+e_2y+e_3z] \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} -iu_{xt}=\dfrac{\sigma e^{-kt}}{k}(m_2z-m_3y)-k\sigma e^{kt}(e_2z-e_3y)-\dfrac{1}{k}[n_1\sigma^2+k^2x(n_1x+n_2y+n_3z)] \\ -iu_{yz}=\dfrac{e^{-kt}}{\sigma k^2}[-m_1+k^2x(m_1x+m_2y+m_3z)]+\dfrac{e^{kt}}{\sigma}[-e_1+k^2x(e_1x+e_2y+e_3z)] \\ \quad +ax \\ \quad u_{yt},\ u_{zt};\ u_{zx},\ u_{xy} \text{ は同様の式} \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} -iu_{xt5}=\sigma\left[m_1\dfrac{e^{-kt}}{k_2}+e_1e^{kt}\right]-ax \\ -iu_{yz5}=\dfrac{e^{-kt}}{k\sigma}(m_2z-m_3y)-\dfrac{ke^{kt}}{\sigma}(e_2z-e_3y)-\dfrac{1}{k}n_1 \\ \quad u_{yt5},\ u_{zt5};\ u_{zx5},\ u_{xy5} \text{ は同様の式} \end{cases} \tag{5.6}$$

§6. 常數間の關係。 M, N, u^t, … 等に含まれる 16 箇の實常數 l_λ, m_λ, n_λ, e_λ, p, q, a, N, $(\lambda=1, 2, 3)$ はすべて ψ に含まれる積分常數 c_α $(\alpha=1, \dots, 4)$ のヘルミート形式として得られたものである。之等の常數の間には次の樣な多くの恒等式が成立する。

$$\begin{cases} \delta^{\lambda\mu}l_\lambda l_\mu=\dfrac{1}{k^2}(4pq-N^2), \qquad \delta^{\lambda\mu}m_\lambda m_\mu=k^4p^2 \\ \delta^{\lambda\mu}n_\lambda n_\mu=4pqk^2-a^2, \qquad \delta^{\lambda\mu}e_\lambda e_\mu=q^2 \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \delta^{\lambda\mu}l_\lambda m_\mu=ap, \qquad \delta^{\lambda\mu}l_\lambda n_\mu=-\dfrac{1}{k}aN \\ \delta^{\lambda\mu}l_\lambda e_\mu=-\dfrac{1}{k^2}aq, \qquad \delta^{\lambda\mu}m_\lambda n_\mu=-k^3Np \\ \delta^{\lambda\mu}m_\lambda e_\mu=k^2\left(pq-\dfrac{N^2}{2}\right)-\dfrac{a^2}{2}, \qquad \delta^{\lambda\mu}n_\lambda e_\mu=kNq \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\begin{cases} l_\lambda m_\mu - l_\mu m_\lambda = \epsilon^{\lambda\mu\nu}\left(\dfrac{N}{k} m_\nu + p n_\nu\right), & l_\lambda n_\mu - l_\mu n_\lambda = -2\epsilon^{\lambda\mu\nu}\left(p e_\nu + \dfrac{q}{k^2} m_\nu\right), \\ l_\lambda e_\mu - e_\mu e_\lambda = \epsilon^{\lambda\mu\nu}\left(-\dfrac{N}{k} e_\nu + \dfrac{q}{k^2} n_\nu\right), & m_\lambda n_\mu - m_\mu n_\lambda = \epsilon^{\lambda\mu\nu}(k^4 p l_\nu - a m_\nu) \\ m_\lambda e_\mu - m_\mu e_\lambda = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu}(k^3 N l_\nu + a n_\nu), & n_\lambda e_\mu - n_\mu e_\lambda = -\epsilon^{\lambda\mu\nu}(a e_\nu + k^2 q l_\nu) \end{cases} \tag{6.3}$$

こゝに $\lambda, \mu, \nu=(1, 2, 3)$ で $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ は λ, μ, ν が 1, 2, 3 の偶順列のとき $+1$, 奇順列のとき -1, 他の場合 0 をとる量である。

之等の式の成立することを證明するには勿論直接 (3.4), (3.8), (3.9), (3.10) を代入すれば出來るのであるが, 次のやうにすれば簡單にその大部分を求めることができる。即平坦空間

$$ds^2=-(dx^2+dy^2+dz^2)+dt^2, \qquad \overset{\lambda}{h}_\nu=i\delta^\lambda_\nu, \qquad \overset{4}{h}_i=\delta^4_i \tag{6.4}$$

に於ては ψ の基本方程式は $\partial_i\psi=0$ となる故 $\psi_i=c_i$ とおくことができる。從つて $l_\lambda, m_\lambda, \ldots$ 等はこの平坦空間に於ける $M, N, u^i, \ldots$ 等の表現と考へることができる。例へばこの空間に於ける u_{23} は $(\bar{c}_1c_3+\bar{c}_2c_4-\bar{c}_3c_1-\bar{c}_4c_2)$ なる故 n_1 はこの平坦空間に於ける $2k^2iu_{23}$ と考へることができることになる。そこで之等に對して恒等式[1]

$$\begin{aligned} &u^iu_i=u^i_5u_{i5}=M^2+N^2, \qquad u^iu_{i5}=0, \qquad u^{ij}u_{ij}=2(N^2-M^2), \\ &u^{ij}u^{kl}\epsilon_{ijkl}D=4iMN, \qquad u^iu_{il}=-Nu_{l5}, \ldots \text{ 等} \end{aligned} \tag{6.5}$$

を適用すれば求むる常數間の關係式が得られるのである。

いふまでもなく (6.1), (6.2), (6.3) は必ずしも全部獨立ではない。

§7. $l_\lambda=0$ なるときの常數。 運動量密度ベクトル u^i に對して $[u^r/u^t]_{r=0}=0$ をおくと $l_\lambda=0$ を得る。從つて デ, ジッター型計量に於ては (4.2) より

$$\begin{cases} u^r=kr(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma, \qquad u^\theta=u^\phi=0, \\ u^t=\sigma^{-1}(pe^{-kt}+qe^{kt}) \end{cases} \tag{7.1}$$

が得られる。この u^i をもとゝして波動幾何學による宇宙論が樹てられたのである。この場合には前節の關係によつて次の三種の場合の起ることが分る。

[I] $l_\lambda=$ [illegible] $=a=p=m_\lambda=0$ の場合。生殘る常數は e_λ 及び q だけで只一つの條件 [illegible]

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=q^2 \tag{7.2}$$

---

(1) 柴田隆史, 前掲, 175.

に從ふ。c_a についていふならば $c_1=c_2=0$ の時である。

[II] $l_\lambda=N=n_\lambda=a=q=e_\lambda=0$ の場合。生殘る常數は m_λ 及び p で只一つの條件

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=k^4p^2 \tag{7.3}$$

に從ふ。c_a についていふならば $c_3=c_4=0$ の時である。

[III] $l_\lambda=a=0$; $N, p, q \neq 0$ で $m_\lambda, n_\lambda, e_\lambda$ も生殘る場合。之等の常數間に存在する條件の全部は

$$n_\lambda=-\frac{N}{kp}m_\lambda=\frac{kN}{q}e_\lambda, \qquad (\lambda=1, 2, 3) \tag{7.4}$$

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=k^2N^2=4pqk^2 \tag{7.5}$$

で與へられる。

この [I], [II], [III] の分類は市丸氏によつて研究されたものと同一であつて(1), これが常數の間の數學的關係から必然的に導かれたことになる。即ち市丸氏によれば [I] は星雲が觀測者より，そこからの距離に比例する速度で遠ざかりつゝある場合でスペクトル線の赤方移動に對應し實際の宇宙に近い場合である。[II] は星雲が觀測者に近づきつゝある場合即ち紫方變移の起る場合に對應し現實の宇宙とは全然一致しない場合である。[III] は最も一般な場合で p, q, t の關係により赤方又は紫方變移を起し得る場合に對應しその性質は市丸氏により詳しく研究されてゐる。なほ [I], [II] は [III] に於て夫々 $p\to 0$, $q\to 0$ とした特別な場合と考へることもできる。

又各々の場合に於ける $M, N, u^i, \ldots$ は第 3, 4, 5 節の公式から直ちに求めることができる。

(1) 市丸九州男, 本誌, 8, (1938), 239.