運動量密度ベクトルの立場より見たる波動幾何學による宇宙論と運動學的宇宙論の比較

竹野兵一郎

(昭和 18 年 11 月 5 日受付)

1. 波動幾何學による宇宙論に於て四次元時空の計量は

$$ds^2=-\frac{dr^2}{1-k^2r^2}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+(1-k^2r^2)dt^2 \tag{1.1}$$

により與へられ，宇宙の構成要素であるところの星雲の運動量密度ベクトルは

$$\begin{cases} u^r=(-pe^{-kt}+qe^{kt})kr\sigma, \quad u^\theta=u^\phi=0, \\ u^t=\dfrac{1}{\sigma}(pe^{-kt}+qe^{kt}), \qquad (\sigma\equiv\sqrt{1-k^2r^2}) \end{cases} \tag{1.2}$$

で與へられ，これを基としてハッブルの速度距離關係が說明されてゐる。

他方ミルンの運動學的宇宙論(1)に於ては計量として平坦空間の計量

$$ds^2=-dx^2-dy^2-dz^2+dt^2 \tag{1.3}$$

が用ひられ所謂 simple kinematical system 即ち substratum を構成してゐる粒子の運動の速度及び密度は夫々

$$v^x=\frac{x}{t}, \quad v^y=\frac{y}{t}, \quad v^z=\frac{z}{t}; \quad n=\frac{bt}{X^2}, \quad (X\equiv t^2-r^2) \tag{1.4}$$

(こゝに b は常數), により與へられる。但し t の單位は光の速度が 1 になるやうに選んである。從つて極座標を用ひるならば粒子の運動量密度ベクトル j^i は

$$j^r=\frac{br}{X^2}, \qquad j^\theta=j^\phi=0, \qquad j^t=\frac{bt}{X^2} \tag{1.5}$$

となる。即ちこれが波動幾何學の理論の u^i に對應するものである。

Mc Vittie はこの理論を定曲率空間即ち波動幾何學による宇宙論に於けるものと同一の幾何學的空間に擴張し，計量が

$$ds^2=\frac{1}{P^2}(-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+dt^2), \qquad \left(P\equiv1-\frac{k^2}{4}X\right) \tag{1.6}$$

(1) E. A. Milne, *Relativity, Gravitation and World-structure*, 1935.

なる如き座標系に於て（但し彼は x, y, z-座標系を用ひてゐるが比較の便宜上今は極座標を用ひる）

$$j^r=\rho\frac{r}{\sqrt{X}}P, \qquad j^\theta=j^\phi=0, \qquad j^t=\rho\frac{t}{\sqrt{X}}P \tag{1.7}$$

を得てゐる。[1] こゝに ρ は適當に定めらるべき不變量である。彼はこの j^i に對して連續の條件即ち

$$\nabla_s j^s=0 \tag{1.8}$$

を要求することにより ρ を決定し結局

$$j^r=\frac{br}{X^2}P^4, \qquad j^\theta=j^\phi=0, \qquad j^t=\frac{bt}{X^2}P^4 \tag{1.9}$$

を得てゐる。以下に於ては吾々の u^i とこの j^i とを比較研究する。

2. (1.1) と (1.6) とは同一の幾何學的空間を定義するから座標變換によつて互に移り得る筈である。比較は同一の座標系に於てするのが適當であるから以下 (1.6) の成立する座標系に於て問題を考へることにする。(1.1) を (1.6) に移す變換の最も簡單な形は（他の形の變換を用ひても結果は同様である）

$$r=\frac{\bar{r}}{1-\frac{k^2}{4}\bar{X}}, \qquad e^{kt}\sqrt{1-k^2r^2}=\frac{2+k\bar{t}}{1-\frac{k^2}{4}\bar{X}}-1 \tag{2.1}$$

である。[2] 然るに $M/k=v$, $u_i=v_i$ とおけば $\nabla_i v=v_i$, $\nabla_i v_j=k^2vg_{ij}$ となり，このやうな量の變換については既に十分研究ずみである。[3] 從つてこの結果を用ひるならば

$$\frac{\bar{M}}{k}=\frac{M}{k}=\frac{1}{P}\left(\frac{2}{k^2}p'+q't\right)+s' \tag{2.2}$$

こゝに

$$p'=k(q-p), \qquad q'=p+q>0, \qquad s'=\frac{1}{k}(p-q) \tag{2.3}$$

從つて新座標系に於ては

$$u^r=p'r+\frac{q'k^2}{2}tr, \quad u^\theta=u^\phi=0, \quad u^t=p't+q'\left\{1+\frac{k^2}{4}(t^2+r^2)\right\} \tag{2.4}$$

---

(1) G. C. Mc Vittie, *Cosmological Theory*, 1937, 88.

(2), (3) 竹野, 本誌 **11**, (1942), 223 參照。(2.1) は同論文の $\alpha=1$, $\varepsilon=\eta=1$ なる $T_{\mathrm{I\,III}}$ と同じく $\alpha=1$, $\varepsilon=\eta=1$ なる $T_{\mathrm{I\,V}a}$ を組合したものであり，又 (2.2) は同論文の (16.18), (16.20) の二式を組合して得られたものである。

となる。そこで今

$$u^i = p'\bar{u}^i + q'\bar{\bar{u}}^i, \tag{2.5}$$

$$\bar{u}^r = r, \qquad \bar{u}^\theta = \bar{u}^\phi = 0, \qquad \bar{u}^t = t, \tag{2.6}$$

$$\bar{\bar{u}}^r = \frac{k^2}{2}tr, \qquad \bar{\bar{u}}^\theta = \bar{\bar{u}}^\phi = 0, \qquad \bar{\bar{u}}^t = 1 + \frac{k^2}{4}(t^2 + r^2) \tag{2.7}$$

とおくならば $\bar{u}^i$ は乘積因數を除いて完全に Mc Vittie の j^i と一致する。從つて若しも $\rho'\bar{u}^i$ に對しても連續の條件 (1.8) を要求するならば(波動幾何學に於ては ψ の基本方程式の單位項の係數 A_i の選び方によつて乘積因數 ρ' を任意に定めることができる) $\rho'\bar{u}^i$ を完全に (1.9) の j^i と一致さすことができる。

次に $k \to 0$ とすれば

$$\bar{\bar{u}}^i \to (0,\ 0,\ 0,\ 1) \tag{2.7}$$

となり波動幾何學に於けるアインシュタイン型宇宙模型の u^i を得る。[1] 結局次の結論を得る。

波動幾何學による宇宙論に於ける u^i はミルン型の $\bar{u}^i$ とアインシュタイン型の $\bar{\bar{u}}^i$ とを合成したものである。

波動幾何學による宇宙論に於て乘積因數 ρ' を如何に選ぶべきかといふことは未だ完全に解決せられた問題ではないのであるが假に上記の如く $\rho'\bar{u}^i$ が j^i と一致する様にとるならば $\mathrm{div}\,(\rho' u^i) = q'\,\mathrm{div}\,(\rho'\bar{\bar{u}}^i) = -4q' t P^4 X^{-3}$ となる。從つて t 及び X の符號によつて物質の消滅又は創造が決定されることになる。

なほ吾々の u^i に於ては (2.3) によつて $q' \neq 0$ で $p' = 0$ なることは起り得るが逆に p' とは獨立に $q' = 0$ となることは不可能である。從つて吾々の u^i に於てはアインシュタイン型の部分が主なる部分で之にミルン型の部分が附け加はつたものと考へるのが自然である。

---

(1) $[u^r/u^t]_{r=0} = 0$ なる條件をおくならばアインシュタイン型線素 $ds^2 = -\dfrac{dr^2}{1 - \dfrac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + dt^2$ に對する u^i は $(0,\ 0,\ 0,\ u^t = \text{常數})$ となる (竹野, 本誌, **8**, (1938), 235). なほこの線素は適當な座標變換によつて次の形をとることができる。

$$ds^2 = -\frac{R^2}{X}(-dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + dt^2)$$

(竹野, 本誌, **11**, (1942), 214). ギルバートは $-R^2 > 0$ の場合のこの計量を metric of the substratum と呼んでゐる。(C. Gilbert, Q. J. M. Oxford, **9** (1938), 187).

又數學的に見て波動幾何學による理論と運動學的宇宙論に於ける理論との根本的差異はミルンの場合には最初より平坦空間の線素 (1.3) を用ひて $\bar{u}^i$ の形を導き得るのであるが，之に反して波動幾何學に於ては容易に分るやうに平坦空間に於ては $\bar{\bar{u}}^i$ に對應する部分 (0, 0, 0, u^t＝常數) のみ存在し得るのであつて $\bar{u}^i$ の部分は存在し得ない點にある。即ち波動幾何學の場合には平坦空間をば定曲率空間に於て曲率が 0 に近づくときの極限として見るときに始めて $\bar{u}^i$ の部分を導くことができるのである。從つて波動幾何學による宇宙論に於てはあくまでも $k \neq 0$ なる定曲率空間が本質的のものであつて平坦空間はそれ自身では意味がなく前者の $k \to 0$ なる極限としてのみ意義を有するのである。

3. 附。 (1.1) の座標系に於ては容易に計算できるやうに

$$\bar{u}^r = r\sigma \cosh kt, \qquad \bar{u}^\theta = \bar{u}^\phi = 0, \qquad \bar{u}^t = \frac{1}{k\sigma}\sinh kt,$$

$$\bar{\bar{u}}^r = kr\sigma \sinh kt, \qquad \bar{\bar{u}}^\theta = \bar{\bar{u}}^\phi = 0, \qquad \bar{\bar{u}}^t = \frac{1}{\sigma}\cosh kt \tag{3.1}$$

從つて $k \to 0$ のとき $\bar{u}^i \to (r, 0, 0, t)$; $\bar{\bar{u}}^i \to (0, 0, 0, 1)$ で (1.6) の座標系に於ける場合と同様のことが云へる。

(廣島陸軍幼年學校)