計量をもつベクトル束に關する二三の注意

小笠原藤次郎

(昭和 18 年 11 月 5 日受附)

L. Kantorovitch は計量函數をもつベクトル束の諸種の型を考察し，計量による收斂と束論的收斂との關係に就いて論及してゐる。[1] 本稿に於ては，彼の考察した R_3 型及び R_4 型空間を稍一般な形に於て論じ，彼の所論を强化し，一般な形に於ける R_4 型空間と著者の導入した K_6^- 型 Fréchet 束[2]との本質的同義を明かにする。また，本稿の所論を Orlicz の空間[3] (O) に適用して，(O) 空間は常に弱完備であることが判つた。[4]

§1. R_3 型及び R_4 型空間。

定義 1. σ-完全ベクトル束は，その各要素 x に次の關係を滿足する計量函數 $\rho(x)$ が定義されてゐるとき，R_3 **型空間**と呼ばれる。

(1°) $\rho(x)\geqq 0$, $x=0$ のときに限り $\rho(x)=0$

(2°) $|x|\leqq|y|$ のとき $\rho(x)\leqq\rho(y)$

(3°) $x_n\geqq 0$ が $n\to\infty$ のとき單調に x に (o)-收斂するならば，

$$\rho(x_n)\to\rho(x)$$

(4°) $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$, $\lim\limits_{n}\lim\limits_{p}\rho(x_{n+p}-x_n)=0$ ならば，$\{x_n\}$ は (o)-有界である。

注意。 Kantorovitch の所論では，[5] (2°) の代りに，此より强い條件 —— $|x|<|y|$ ならば，$\rho(x)<\rho(y)$ —— を使つて R_3 型空間を定義してゐる。

$\rho(|x_n|\cup|x_{n+1}|\cup\cdots\cup|x_m|)\to 0$ $(n, m\to+\infty)$ のとき，$x_n\to 0(k)$ と書くことにすれば，

定理 1. R_3 型空間は K_6^- 型 "正則" ベクトル束である。且つ，$x_n\to 0\,(o)$ と $x_n\to 0(k)$ とは同義である。

(證) 先づ $x_n\to 0\,(o)$ とする。$y_n=\bigvee\limits_{p\geqq n}|x_p|$ と置くと，$y_n\downarrow 0$ となる。從て

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math., **44** (1937), 121-165. 特に §8.

(2) 小笠原藤次郎: 本紀要, **12** (昭 18), 235-248.

(3) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires.* (1932) 227-228. 240.

(4) 本稿の概要は，小笠原藤次郎: 全國紙上數學談話會 **245** (昭 17) 1430-1439. **247** (昭 17), 1612-1619 に載つてゐる。

(5) L. Kontorovitch: 前揭, 147.

(3°) から $\rho(y_n)\to 0$. 一方 $\rho(|x_n|\cup|x_{n+1}|\cup\cdots\cup|x_m|)\leqq\rho(y_n)$ となる故に, $\lim_{n,m\to+\infty}\rho(|x_n|\cup|x_{n+1}|\cup\cdots\cup|x_m|)=0$, 即ち $x_n\to 0(k)$ となる。逆に $x_n\to 0(k)$ とすると, $y_{n,p}=|x_n|\cup|x_{n+1}|\cup\cdots|x_{n+p}|$ と置けば, $y_{n,p+q}-y_{n,p}\leqq y_{n+p,q}$. 從て, $\lim_{p,q\to+\infty}\rho(y_{n,p+q}-y_{n,p})\leqq\lim_{p,q\to+\infty}\rho(y_{n+p,q})=0$. 故に (4°) により $y_n=\bigvee_p y_{n,p}$ が存在し, $\rho(y_n)\to 0$ が成立つ。(1°), (3°) を使つて, $y_n\downarrow 0$, 即ち $x_n\to 0(o)$ が成立つ。[1] R_3 型空間の K_6^- 型 "正則" を證明するには, 次の二つの命題を證明すればよい。[2]

(i) $x_{n,m}\downarrow 0\ (m\to+\infty)$ のとき, $x_{n,m_n}\to 0(o)\ (n\to+\infty)$ なる $\{m_n\}$ がある。

(ii) 正要素の増加超限列 $x_1<x_2<\cdots<x_\alpha<\cdots$ は可附番集合である。

さて $x_{n,m}\downarrow 0\ (m\to+\infty)$ とする。$\epsilon_n\downarrow 0$ なる正數列 $\{\epsilon_n\}$ を考へ, 自然數列 $\{m_n\}$ を

$$\rho(x_{n,m_n}\cup x_{n+1,m_{n+1}}\cup\cdots\cup x_{n+p,m_{n+p}})<\epsilon_n,\quad n,p=1,2,3,\ldots$$

なる様にとることが出來る。故に $x_{n,m_n}\to 0(k)\ (n\to+\infty)$. 即ち $x_{n,m_n}\to 0(o)$ が成立つ。次に (ii) の超限列が非可附番とすれば, 或る正數 ϵ に對し, $\rho(x_{\alpha+1}-x_\alpha)>\epsilon$ を滿足する第二級の超限順序數 α が無數に存在する。之より $\alpha_1<\alpha_2<\cdots$ を取出し, $\alpha_n<\alpha$ なる第二級の超限數 α を考へれば, $x_{\alpha_n}<x_\alpha$ となり $\{x_{\alpha_n}\}$ は (o)-有界となる。$x=\bigvee_n x_{\alpha_n}$ と置く。このとき, $\epsilon<\rho(x_{\alpha_n+1}-x_{\alpha_n})\leqq\rho(x-x_{\alpha_n})\to 0$ となり矛盾が起る。以上によつて R_3 型空間は K_6^- 型 "正則" ベクトル束になる。

次に R_3 型空間が K_6 型 "正則" ベクトル束になる條件を調べやう。R_3 型空間に對しては, 定理 1 の證明中で述べた樣に (i), (ii) が成立つから, K_6 型 "正則" になるには,

(iii) $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$ は, 任意の正數列 $\lambda_n\downarrow 0$ に對し, $\lambda_n x_n\to 0(o)$ のとき, (o)-有界である。

が成立つか否かを調べればよい。[3]

定理 2. R_3 型空間が K_6 型 "正則" ベクトル束になる條件は, 次の (5°) が成立つことである。

---

(1) L. Kantorovitch: 同上, 149, 定理 33.
(2) 小笠原藤次郎: 本紀要, 12 (昭 15), 237. 脚註 (4).
(3) 小笠原藤次郎: 前揭, 237 脚註 (4).

(5°) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\lambda \downarrow o} \lim_{n \to +\infty} \rho(\lambda x_n) = o$ のとき，$\{x_n\}$ は (o)-有界である。

(證) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$ なる要素列 $\{x_n\}$ を考へる。$\lambda_n \downarrow 0$ なる任意の正數列 $\{\lambda_n\}$ に對し，$\lambda_n x_n \to 0(o)$ とする。今 $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{n \to +\infty} \rho(\lambda x_n) > \varepsilon > 0$ とすれば，自然數列 $n_1 < n_2 < \cdots$ を $\rho(\lambda_p x_{n_p}) > \varepsilon$ なる樣にとることが出來る。$n_p \leqq n < n_{p+1}$ に對し，$\lambda'_n = \lambda_p$ と置くと，$\lambda'_n \downarrow 0$，然るに，$\overline{\lim_n} \rho(\lambda'_n x_n) \geqq \overline{\lim_p} \rho(\lambda_p x_{n_p}) \geqq \varepsilon$ となる故 $\lambda'_n x_n \to 0(o)$ は成立しない。逆に $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{n \to +\infty} \rho(\lambda x_n) = 0$ とする。$\lambda_n \downarrow 0$ なる任意の正數列 $\{\lambda_n\}$ に對し，$i_1 < i_2 < \cdots$ を $\rho(\lambda_{i_n} x_m) < \frac{1}{2^n}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ が成立つ樣にとる。このとき，$\rho(\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \cup \cdots \cup \lambda_{i_{n+p}} x_{i_{n+p+1}}) \leqq \rho(\lambda_{i_n} x_{i_{n+p+1}}) < \frac{1}{2^n}$ となるから，定理 1 により，$\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \to 0(o)$ $(n \to +\infty)$ となる。$i_n \leqq p < i_{n+1}$ のとき，$\lambda_p x_p \leqq \lambda_{i_n} x_{i_{n+1}}$ となる故，$p \to +\infty$ に對し，$\lambda_p x_p \to 0(o)$ となる。以上によつて，二つの命題 (iii)，(5°) の同義が證明された。故に本定理が成立つ。

定理 3. (1°)—(3°) を滿足するベクトル束は，更に次の條件 (6°) を滿足するときは，R_3 型空間となり，“正則”性の非本義的公理を滿足する。

(6°) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim_n \rho(x_n) < +\infty$ のとき $\bigvee_n x_n$ が存在する。

(證) (6°) から σ-完全ベクトル束となること，及び (4°) の成立つことが容易に判る。E_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ を正要素の集合且つ各 E_n は (o)-有界でないとする。E_n から有限個の要素を取り出し，その上端 x_n を $\rho(x_n) > n$ なる樣にすることが出來る。何者，斯樣な x_n が存在せずとすれば，E_n の可附番個の要素の上端となる要素の非可附番增加超限列の存在が容易に判るから (ii) に矛盾する。$\rho(x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_n) > n$ のため $\{x_n\}$ は (o)-有界でない。即ち (6°) が成立つときは，“正則”性の非本義的公理が成立つ。

定理 4. R_3 型空間では，次の各命題は互に同義である。

(1) $\rho(x_n) \to 0$ ならば，常に $x_n \to 0(*)$

(2) $\rho(x_n) \to 0$ ならば，常に $\rho(|x| \cup |x_n|) \to \rho(x)$

(3) 正數 ε に對して正數 δ が定まり，$\rho(x) < \delta$, $\rho(y) < \delta$ ならば，常に $\rho(x+y) < \varepsilon$.

(4) $\{x_n\}$ に對し，$\rho(x_n - x) \to 0$ なる x が存在するならば，常に $n, m \to +\infty$ のとき，$\rho(x_n - x_m) \to 0$

(證) (1)→(2), $\rho(x_n)\to 0$ とすれば $\{x_n\}$ の任意の部分列は 0 に (o)-收斂する部分列をもつ。故に (3°) を使つて, (2) が成立つ。

(1)→(3). (3) が成立せずとすれば, $\rho(x_n)\to 0$, $\rho(y_n)\to 0$, $\rho(x_n+y_n)\geqq \varepsilon>0$ なる $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及び正數 ε が存在する。然るに (1) により, $x_n\to 0\,(*)$, $y_n\to 0\,(*)$, 從て $x_n+y_n\to 0\,(*)$ となる。故に (3°) を使つて $\rho(x_n+y_n)\to 0$ となり矛盾が起る。

(2)→(1), (3)→(1). $\rho(x_n)\to 0$ とすれば, (2) 或は (3) により, $i_1<i_2<\cdots$ を $\rho(|x_{i_n}|\cup\cdots\cup|x_{i_{n+p}}|)<\frac{1}{n}$, $n, p=1,2,3\ldots$ なる樣にとることが出來る。從て $x_{i_n}\to 0\,(k)$. 定理 1 を使つて, $x_{i_n}\to 0\,(o)$ を得る。$\{x_n\}$ の代りに, その任意の部分列に對しても, 同樣のことが云へるから, $x_n\to 0\,(*)$ である。

(3)→(4) $\rho(x_n-x)\to 0$ とすれば, (3) を使つて, $n, m\to+\infty$ のとき, $\rho(x_n-x_m)=\rho\big((x_n-x)+(x-x_m)\big)\to 0.$

(4)→(3) (3) が成立せずとすれば, $\rho(x_n)\to 0$, $\rho(y_n)\to 0$, $\rho(x_n+y_n)\geqq\varepsilon>0$ なる $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及び正數 ε が存在する。$x_1, -y_1, x_2, -y_2, \ldots$ なる要素列を考へれば, 計量 ρ に關して 0 に收斂するから, (4) によつて, $\rho(x_n+y_n)\to 0$ が得られ矛盾が起る。

定義 2. 前定理 4 の條件 (1)—(4) の何れかの成立つ R_3 型空間を R_4 型空間と呼ぶ。[1]

補題 1.[2] R_4 型空間に於ては, $\rho(x_n-x_m)\to 0\ (n, m\to+\infty)$ ならば, $\rho(x_n-x)\to 0$ なる x が唯一つ存在する。

(證) 前定理に述べた條件 (3) を使つて, $i_1<i_2<\cdots$ を $\rho(|x_{i_n}-x_{i_{n+1}}|+\cdots+|x_{i_{n+p}}-x_{i_{n+p+1}}|)<\frac{1}{n}$, $n, p=1,2,3,\ldots$ なる樣にとることが出來る。從て (4°) により $\sum_{n=1}^{\infty}|x_{i_n}-x_{i_{n+1}}|$ が存在する。故に $x_{i_n}\to x\,(o)$ なる x が存在する。$\rho(x_{i_n}-x)\to 0$ 及び $\rho(x_n-x_{i_n})\to 0$ に條件 (3) を適用して, $\rho(x_n-x)\to 0$ を得る。斯樣な x が他に存在しないことは, 條件 (3) から容易に判る。

定理 5. (1°), (2°), (3°) の成立つ σ-完全ベクトル束が R_4 型空間になるための條件は, 次の條件 (7°) が成立つことである。

(7°) $\{x_n\}$ に對し, $\rho(x_n-x)\to 0$ なる x が存在するための條件は, $\rho(x_n-$

(1) L. Kantorovitch: 前揭, 151.
(2) L. Kantorovitch: 同上, 152. 定理 38.

$x_m) \to 0\ (n, m \to +\infty)$ なることである。

(證) R_4 型空間に對しては，定理 4 及び補題 1 により (7°) が成立つ。逆に，(1°)—(3°) を滿足する σ-完全ベクトル束に對し，(7°) が成立つとする。これが R_4 型となるには，定義から，(4°) の成立つことを云へばよい。$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim\limits_{n, p \to \infty} \rho(x_{n+p} - x_n) = 0$ とする。(7°) を使つて $\rho(x_n - x) \to 0$ なる x が存在する。$x_n - x$ の正部分 $(x_n - x)_+$ を考へると，$\rho\big((x_n - x)_+\big) \leqq \rho\big((x_{n+1} - x)_+\big) \leqq \rho(x_{n+1} - x) \to 0$ となる故，$(x_n - x)_+ = 0$，即ち $x_n \leqq x$ となり，$\{x_n\}$ は (o)-有界である。故に (4°) が成立つ。

§ 2. R_4 型空間と Fréchet 束。

補題 1. ベクトル束 X が計量函數 $\rho_0(x)$ により F 型空間[1] を作るとき，計量による收斂を變へないやうに計量の適當な變更により F-束 (Fréchet 束)[2] になる條件は，計量 ρ_0 による收斂と相對一樣 (*)-收斂が同義となることである。

(證) X が計量的收斂を變へない樣に，計量 $\rho'(x)$ により F-束になつたとする。このとき，ρ' による計量的收斂と相對一樣 (*)-收斂とは同義,[3] 從て ρ_0 による計量的收斂と相對一樣 (*)-收斂とは同義になる。逆に ρ_0 による計量的收斂と相對一樣 (*)-收斂とは同義であるとする。今 $\rho'(x)$ を

$$\rho'(x) = \text{l.u.b.}\big(\rho_0(x');\ |x'| \leqq |x|\big)$$

に依つて定義すると

(1) $0 \leqq \rho_0(x) \leqq \rho'(x) < +\infty$, $x = 0$ のときに限り $\rho'(x) = 0$.

(2) $|x| \leqq |y|$ ならば，$\rho'(x) \leqq \rho'(y)$

(3) $\rho'(x+y) \leqq \rho'(x) + \rho'(y)$

(4) $\rho_0(x_n) \to 0$ ならば，$\rho'(x_n) \to 0$

が成立つ。

このうち (2) の成立は自明。$\rho'(x) = +\infty$ とすれば，$\rho_0(x_n) > n$, $|x_n| \leqq |x|$ なる $\{x_n\}$ が存在する。$\rho_0\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \geqq \dfrac{1}{n}\rho_0(x_n)$ より，$\rho_0\left(\dfrac{x_n}{n}\right) > 1$. 然るに $\dfrac{x_n}{n} \leqq \dfrac{|x|}{n}$ より，$\rho_0\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \to 0\ (n \to +\infty)$ となり矛盾が起る。故に (1) が成立つて

(1) S. Banach: 前掲, 35.
(2) 小笠原藤次郎: 本紀要, **12** (昭 18), 235-248.
(3) 小笠原藤次郎: 同上, 236. 定理 1.

とが容易に判る。(3) は, $|z|\leqq|x+y|$ なる任意の z に對し, x', y' を $x'_+=z_+\frown|x|$, $x'_-=z_-\frown|x|$, $y'=z-x'$ なる様にとる。明かに, $|x'|\leqq|x|$, $|y'|\leqq|y|$, 且つ

$$\rho_0(z)=\rho_0(x'+y')\leqq\rho_0(x')+\rho_0(y')\leqq\rho'(x)+\rho'(y)$$

從て $\rho'(x+y)\leqq\rho'(x)+\rho'(y)$ となる。(4) は, $\rho_0(x_n)\to 0$, $\rho'(x_n)>\varepsilon>0$ なる $\{x_n\}$ が存在するとせば, 假定から, $|x_{i_n}|\leqq\lambda_n|u|$, $\lambda_n\downarrow 0$ なる正數列 λ_n 及び X の要素 u が存在する。ρ' の定義から, $\rho_0(x'_{i_n})>\varepsilon$, $|x'_{i_n}|\leqq|x_{i_n}|$ なる $\{x'_{i_n}\}$ が存在し, $\rho_0(x'_{i_n})\to 0$ が成立つことになり, $\rho(x'_{i_n})>\varepsilon$ に反する。

以上により, X は $\rho'(x)$ により F-束になる。

定理 1. R_3 型空間に對し, 次の命題は互に同義である。

(1) R_4 型空間である。

(2) 計量的收斂を變へない様にして, 適當な計量函數により F 型空間になる。

(3) 計量的收斂を變へない様に, 適當な計量函數により F-束になる。

(證) (1)→(3). X を R_4 型空間とすれば, §1 定理 4 により, E. W. Chittenden の定理[1]を援用して, X は距離函數の導入により計量化可能である。この距離函數を $d(x,y)$ とすれば, 角谷[2]-Birkhoff[3] の定理により, $d(x,y)=d(x-y,0)$ を滿足をするものとしてよい。X に於ける計量的收斂は相對一様 (*)-收斂と同義であるから, 補題 1 を使つて, (3) の成立が判る。

(3)→(2) 自明。

(2)→(1) X を R_3 型空間とし, $\rho_0(x)$ により F 型空間になつたとする。$\rho(x_n)\to 0$, $\rho(y_n)\to 0$ とすれば, $\rho_0(x_n)\to 0$, $\rho_0(y_n)\to 0$, 從て $\rho_0(x_n+y_n)\to 0$, 故に $\rho(x_n+y_n)\to 0$ となる。§1 定理 4 により, X は R_4 型空間である。

本定理から, R_4 型空間と K_6^- 型 "正則" F-束とは, 本質的に同義となることが判る。

§3. 抽象 S 空間と R_3 型空間。

補題 1. $\rho(|x|\smile|y|)\leqq\rho(x)+\rho(y)$ の成立つ R_3 型空間は R_4 型空間である。

(證) $\rho(x_n)\to 0$ とすれば, $\rho(x)\leqq\rho(|x|\smile|x_n|)\leqq\rho(x)+\rho(x_n)$ から, $\rho(|x|\smile$

(1) E. W. Chittenden: Trans. Amer. Math. Soc., **18** (1917), 161-166.
(2) 角谷静夫: 帝國學士院紀事, **12** (昭 11), 82-84.
(3) G. Birkhoff Compositio. Math., **3** (1936), 427-430.

$|x_n|)\to\rho(x)$ が成立つ，故に §1 定理4 により，R_4 型空間になる。

補題 2. 條件 (α)

(α) $x\frown y=0$ ならば，$\rho(x\smile y)=\rho(x)+\rho(y)$

を滿足する R_3 型空間は R_4 型空間である。

(證) $\rho(|x|\smile|y|)+\rho(|x|\frown|y|)=\rho(x)+\rho(y)$ 及び前補題 1 から。

條件 (α) を滿足する R_3 型 (從て R_4 型) 空間の構造を調べる。先づ $\rho(x)$ が有界値をとる場合から始める。

定理 1. 條件 (α) を滿足する R_3 型空間は，$\rho(x)$ が有界値をとるとき，單位をもつ抽象 S 空間になる。

(證) 次の (1), (2), (3) が成立つことを云へばよい。[1]

(1) 正要素 $u>0$ に關する特性要素の全體の作る完全ブール代數を A とすれば $\rho(x)$ は A 上で完全加法的である。

(2) $x_n\frown x_m=0$, $(n\neq m)$, $n=1,2,\ldots$ のとき，$\bigvee_n x_n$ が存在する。

(3) $x_\alpha\frown x_\beta=0$, $(\alpha\neq\beta)$ なる非可附番個の $x_\alpha>0$ は存在し得ない。

このうち，(1) は條件 (α) から自明である。(2) は，$\rho(x)\leqq C$ とすれば，$\sum_1^n\rho(x_i)=\rho(\sum_1^n x_i)\leqq C$. 故に $\sum_1^\infty\rho(x_n)\leqq C$. 從て $\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n+x_{n+1}+\cdots+x_m)=0$. §1, (4°) を使つて $\bigvee_n x_n$ が存在する。(3) は，非可附番な x_α が存在するとせば，或正數 ε に對し，$\rho(x_\alpha)>\varepsilon$ なる x_α が無數に存在する。x_n, $n=1,2,3,\ldots$ をかゝる要素とすれば，$C\geqq\rho(\vee x_n)=\sum_1^\infty\rho(x_n)=+\infty$ となり矛盾が起る。以上によつて本定理は證明された。

さて，$\rho(x)$ が有界値をとらない場合は，條件 (α) により，かゝる R_3 型空間は，抽象 S 空間の正規部分空間になる。

數列の作る (s) 空間，$[0,1]$ 上の可測函數の作る (S) 空間は，何れも，K_6 型 "正則" であるが，"正則" 性の非本義的公理を滿足してゐない。從て計量的收斂を變へない樣にノルムを導入して Banach 空間となし得ない。[2] 抽象 S 空間に就ても，このことは一般に成立つ (即ち有限次元となる場合を除いて)。

例 1.[3] $T(u)$ を實數 $u\geqq 0$ に對し定義せられた實函數で

---

(1) 小笠原藤次郎：本紀要，13 (昭 18), 41-161. 79, §4. 單位をもつ抽象 S 空間は，具體的な (S) 空間で表現される。

(2) S. Banach：前掲，233.

(3) L. Kantorowitch：前掲，156.

(1°)　$T(u) \geqq 0$, $u=0$ のときに限り, $T(u)=0$

(2°)　$T(u)$ は連續な增加函數である。

(3°)　$\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{T(2u)}{T(u)}<+\infty$

を滿足するとする。[0, 1] 上の可測函數 $\varphi(t)$ に對し, $\rho_T(\varphi)=\int_0^1 T(|\varphi(t)|)dt$ と定める。$\rho_T(\varphi)<+\infty$ なる $\varphi(t)$ の全體は, 同値な函數を恒等視するとき, σ-完全ベクトル束を作る。$\rho_T(\varphi)$ を計量函數と考へたとき, かゝるベクトル束を L_T で表すことにする。$\varphi\frown\psi=0$ のとき, 明かに, $\rho_T(\varphi\smile\psi)=\rho_T(\varphi)+\rho_T(\psi)$ を滿足する。$\lim_{u\to+\infty}T(u)=+\infty$ の場合は, §1 定理 3 により, "正則" 性の非本義的公理を滿足する。且つ, L_T は R_4 型空間になるから, 計量を適當に定めると, F-束になる。$\lim_{u\to+\infty}T(u)<+\infty$ の場合には, 本章定理 1 を援用して, L_T は, [0, 1] 上の (S) 空間と同義になる。

例 2.　$T(u)$, $u\geqq 0$, を例 1 の (1°), (2°) 及び

$$(3°)'\qquad \lim_{u\to+0}\frac{T(2u)}{T(u)}<+\infty$$

を滿足するとし, 數列 $\varphi\equiv(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ に對し, $\rho_T(\varphi)=\sum_1^\infty T(\xi_n)$ と定め, 例 1 と同樣にして, l_T を定義する。l_T は R_4 型空間になる。

例 3.　Orlicz の空間。

$M(u)$ を $-\infty<u<+\infty$ に對し定義された凸函數で次の

(1°)　　$M(-u)=M(u)$

(2°)　　$\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}M(u)=0.\qquad \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}M(u)=+\infty$

(3°)　　$\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{M(2u)}{M(u)}<+\infty$

を滿足するとする。$M(u)$ の補函數 $N(u)$ を, $v\geqq 0$ のとき, $N(v)=\max_{0<u<+\infty}[uv-M(u)]$, $v<0$ のとき, $N(v)=N(-v)$ と定めると, $M(u)$ が (1°), (2°) を滿足する凸函數であることから, $N(u)$ も (1°), (2°) を滿足する凸函數になる。然し一般には $N(u)$ に對し (3°) は成立しない。[1] [0, 1] 上の可測函數に對し, 例 1 の記法に從つて, L_M を考へる。$\varphi\in L_M$ に對し,

(1)　Z. W. Birnbaum u. W. Orlicz: Studia Math., 3 (1931), 1-67. $M(u)$ が或正數 Q に對し, $M(uv)\leqq QM(u)M(v)$ を滿足するときは, 補函數 $N(u)$ は (3°) を滿足する。

$$\|\varphi\| = \text{l.u.b.}\left(\int_0^1 \varphi(t)\omega(t)dt\,;\ \int_0^1 N\big(\omega(t)\big)dt = 1\right)$$

と定めると，L_M はノルム $\|\varphi\|$ によつて Banach 束になる。[1] この Banach 束を (O_M) 或は單に (O) で表さう。L_M は K_6 型"正則"なる故に，(O_M) は K-空間，從て弱完備である。$N(u)$ が (3°) を滿足する場合には，(O_M) の共軛空間も K-空間となるから (O_M) は Banach 空間として正則 (regular, reflexive) である。[2]

例 4. 列空間に對しても，例 3 に對應して同樣のことが云へる。但し (3°) の代りに

$$(3^\circ)' \qquad \lim_{u\to 0}\frac{M(2u)}{M(u)} < +\infty$$

を使へばよい。また，$(-\infty, +\infty)$ 上の可測函數に對しては，(3°) の代りに，(3°) と $(3^\circ)'$ を一緒にした條件

$(3^\circ)''$ $M(2u) \leq CM(u)$ なる正數 C が存在する。

を使へば，同樣な結果が得られる。

本研究に於て賜つた御懇切な御指導に對し，前田教授に深謝する。尚本研究は，文部省科學研究費の補助によつてなされたものである。

(1) W. Orlicz: Bulletin Acad. Polonaise, (1932), 207-220. A. Zygmund: *Trigonometrial Series*, 1935. 96-97.

(2) 小笠原藤次郎: 本紀要 12 (昭 17), 82, 定理 2.