波動幾何學による宇宙論に於ける光の數學的表現に就いて

竹 野 兵 一 郎

(昭和 18 年 5 月 4 日受付)

§1. 緒論。 波動幾何學的宇宙構造論[1]に於て ψ の基本方程式は

$$\nabla_i\psi=\frac{k}{2}\gamma_i\psi \tag{1.1}$$

で與へられる。此の式の完全積分條件式

$$K_{jklm}=k^2(g_{jm}g_{kl}-g_{jl}g_{km}) \tag{1.2}$$

を解くことにより四次元時空の計量

$$ds^2=-\sigma^{-2}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+\sigma^2dt^2,\ (\sigma\equiv\sqrt{1-k^2r^2}) \tag{1.3}$$

が定まる。此の g_{ij} を用ひることにより (1.1) の解 ψ が得られ，この ψ から粒子運動量密度ベクトル u^i が得られる。更にこの u^i に對し星雲を特徴づける條件式

$$[u^r/u^t]_{r=0}=0 \tag{1.4}$$

を附け加へることにより星雲の粒子運動量密度ベクトル

$$\begin{cases}u^r=(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma kr,\ u^\theta=u^\phi=0,\\ u^t=(pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma^{-1},\ (p\geqq0,\ q\geqq0)\end{cases} \tag{1.5}$$

が得られたのである。而して星雲の運動，ハッブルの速度距離關係等はすべて此のベクトルを基として論じられてゐる。

然るに此の理論に於ては光を表はすものとしては，暫定的に，從來の一般相對論に於ける思想を借り，その進路が四次元時空内の測地零線であるといふことを假定して之をもとゝして論じられてゐるのであつて，波動幾何學的見地より見たる光とは何ぞやといふ問題は未だ十分に解決されてゐるとはいへない。

一方波動幾何學の根本思想に從へば物理的量としての計量は，ds^2 を一次化して得られる $ds\equiv\gamma_idx^i$ を狀態函數 ψ に作用せしめた所の $ds\psi$ により與へられ，所謂長さの測定値たる $\sqrt{ds^2}$ はその作用素 ds の固有値として考へら

(1) 本紀要，**8** (1938), 193, (W. G. No. 28) 以下。

れてゐるのである。從つてこの思想に從へば光としても當然この ds を用ひて一般相對論に於ける光の式 $ds^2=0$ を一次化し，更に狀態函數 ψ に作用せしめて得られるところの式 $ds\psi=0$ に關聯する定義を採用するのが自然であると考へられる。

本論文に於ては一つの試みとして之等のことを出來るだけ考慮して宇宙論に於ける光の理論を樹てゝ見たい。之により單に光を光線として考へる立場以外に狀態函數の立場より考へる新らしい見方が得られるものと信ずる。

§2. 基本方程式と狀態函數。 波動幾何學の思想によれば基本方程式 (1.1) は對象となつてゐる物理的時空の狀態を決定すべき根本法則であつて，その解である狀態函數 ψ はその時空の構成要素であるところの物質の狀態を表はしてゐるべきものである。從つて宇宙論に於ける ψ は必ずしも星雲とは限らず，光其の他すべて宇宙を構成してゐると考へられる物質の狀態を與へるものであると考へるのが最も自然である。但し吾々の宇宙論はそれを構成してゐる物質の運動がすべてその時空に於ける測地線を與へるといふ條件のもとに得られてゐるのであるから，それに當嵌まらないものは吾々の宇宙模型の構成要素としては考へることは出來ないわけである。

さて同一の函數 ψ が或は星雲を表はし或は光を表はすことは如何にして可能であるかといふにそれは次の樣に考へる。即ち吾々の基本方程式は完全積分可能であるからその解 ψ には 4 箇の任意常數 $c_a(a=1, 2, 3, 4)$ が含まれてゐる。そこで最も自然と思はれる方法で星雲なり光なりの特性と考へられる條件を導入し之を常數 c_a の間の條件に飜譯し，この c_a を代入して得られた $\psi(x, c_a)$ をその構成物質の狀態函數と考へることにするのである。例へば星雲については之を表はす特性は (1.4) であり之を c_a の間の條件に直したものが

$$l_1=l_2=l_3=0 \tag{2.1}$$

である。[1] 即ち一般の解 ψ に對しこの條件を附け加へることにより宇宙間全部の星雲の狀態が規定されたことになつてゐるのである。この關係を式で示せば次の樣になる。

$$[\text{一般解 }\psi]+[(u^r/u^t)_{r=0}=0]=[\text{星雲の }\psi] \tag{2.2}$$

(1) 本紀要, **8** (1938), 229, (W. G. No. 30).

次節に於ては この方針で光の狀態を與へる ψ を定義する。 その他のものについてはまだ十分に研究されてゐない。

§3. 光の狀態函數。 今假に吾々の四次元時空を三次元の空間と一次元の時間とに分けて考へるときに光には星雲と異つて空間内の任意の點を通り任意の方向に進むものが存在し得ると考へるのが至當である。そこで吾々は四次元時空に於ける任意の一點 $P(\overset{\circ}{x}{}^i)$ に於て一つの四次元方向 v^i に進む光を考へ之を表はす狀態函數を次の如く定義する。即ちP點に於て與へられたベクトル v^i に對し

$$[v^i\gamma_i\psi]_P=0 \tag{3.1}$$

が成立するやうに ψ の中の c_a を定め この c_a を代入した ψ が この考へてゐる光の狀態函數であるとする。從つて當然この光の粒子運動量密度ベクトル(1)は斯様に定められた ψ より作られた u^i で與へられることになる。

(3.1) より直ちに $v^iv_i=0$ が得られるから始めに與へるベクトル v^i は P 點に於ける光圓錐上にあると假定しなければならない。勿論三次元の空間で考へれば任意の方向をとり得ることはいふ迄もない。以上の思想を式で示すと次の様になる。

$$[\text{一般解 }\psi]+[(v^i\gamma_i\psi)_P=0]=[\text{光の}\psi] \tag{3.2}$$

次節以下に於ては先づ P 點で光圓錐上に與へられた任意の ベクトル v^i に對し ψ が (3.1) を滿足する様に常數 c_a を定め得ることを示し，更に斯様にして得られた ψ より作られる u^i の性質について研究する。

§4. 條件 $[v^i\gamma_i\psi]_P=0$。 光の狀態函數を前節の如く定義するならば先づ第一に常數 c_a を前節のやうに常に定め得るかどうかが問題となり，しかも この際三次元空間内の一點を通り一つの方向に進む光にも種々のものが考へられるから或程度の自由度が殘されることが必要となつて來る。次に問題となるのは斯様に定められた常數 c_a を用ひた ψ より作られる u^i の方向が P 點に於て始めに與へられた v^i の方向と一致するかどうかといふことである。之等に關して次の定理が成立する。

(1) 星雲の場合に倣つて光の u^i をも矢張り粒子運動量密度ベクトルと呼ぶことにするがこの粒子なるものゝ物理的意義についてはなほ將來の研究に俟たねばならない。

定理 1. $(----+)$ 型の計量を有する時空内に於て任意の實ベクトル v^i に對し

$$v^i\gamma_i\psi=0,\ (\psi\neq 0) \tag{4.1}$$

が成立するならばこの ψ より作られる u^i, $u^i_{\cdot 5}$ は何れも v^i に比例し且 $M=N=0$ である。

證明。(4.1) より

$$\overset{\circ}{v}{}^a\overset{\circ}{\gamma}_a\psi=0,\ (\overset{\circ}{v}{}^a=\overset{a}{h}_jv^j),\ a=1,\cdot\cdot,4 \tag{4.2}$$

但し $\overset{\circ}{\gamma}_a$ はディラックの 4－4 行列を表はし又 $i\overset{a}{h}_j$, $(a=1,2,3)$ 及び $\overset{4}{h}_j$ は何れも實のベクトルであるとする。斯様なベクトルの存在することは柴田氏により證明されてゐる。(1) (4.2) に $\overset{\circ}{\gamma}_a$ の實際の形を代入すれば

$$\begin{cases}\psi_3(\overset{\circ}{v}{}^1-i\overset{\circ}{v}{}^4)-i\psi_4(\overset{\circ}{v}{}^2+i\overset{\circ}{v}{}^3)=0, & -i\psi_3(\overset{\circ}{v}{}^2-i\overset{\circ}{v}{}^3)+\psi_4(\overset{\circ}{v}{}^1+i\overset{\circ}{v}{}^4)=0\\ \psi_1(\overset{\circ}{v}{}^1+i\overset{\circ}{v}{}^4)+i\psi_2(\overset{\circ}{v}{}^2+i\overset{\circ}{v}{}^3)=0, & i\psi_1(\overset{\circ}{v}{}^2-i\overset{\circ}{v}{}^3)+\psi_2(\overset{\circ}{v}{}^1-i\overset{\circ}{v}{}^4)=0\end{cases} \tag{4.3}$$

然るに (4.1) より $v^iv_i=0$　即ち　$\sum_a(\overset{\circ}{v}{}^a)^2=0$　　(4.4)

なる故 (4.3) の上の二式及び下の二式は夫々同一の條件を與へる。又 v^i は實のベクトルなる故 $i\overset{\circ}{v}{}^1$, $i\overset{\circ}{v}{}^2$, $i\overset{\circ}{v}{}^3$, $\overset{\circ}{v}{}^4$ は何れも實數である。故に (4.3) より

$$\frac{\psi_1}{\psi_2}=\frac{\overline{\psi}_4}{\overline{\psi}_3}=\alpha,\quad こゝに\quad \alpha=\frac{-i(\overset{\circ}{v}{}^2+i\overset{\circ}{v}{}^3)}{\overset{\circ}{v}{}^1+i\overset{\circ}{v}{}^4}=\frac{i(\overset{\circ}{v}{}^1-i\overset{\circ}{v}{}^4)}{\overset{\circ}{v}{}^2-i\overset{\circ}{v}{}^3} \tag{4.5}$$

とおくことが出來る。從つて(2)

$$\begin{aligned}M&=i\{-\overline{\psi}_1\psi_3+\overline{\psi}_2\psi_4+\overline{\psi}_3\psi_1-\overline{\psi}_4\psi_2\}=0,\\ N&=-\overline{\psi}_1\psi_3+\overline{\psi}_2\psi_4-\overline{\psi}_3\psi_1+\overline{\psi}_4\psi_2=0\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる。又 $\overset{\circ}{u}{}^a=\overset{a}{h}_ju^j$, $\overset{\circ}{u}_{a5}=\underset{a}{h}{}^ju_{j5}$ とおけば同様に(3)

$$\begin{cases}\overset{\circ}{u}{}^1=\rho i(1-\alpha\overline{\alpha}), & \overset{\circ}{u}{}^2=\rho(\overline{\alpha}-\alpha), & \overset{\circ}{u}{}^3=\rho i(\overline{\alpha}+\alpha), & \overset{\circ}{u}{}^4=\rho(1+\alpha\overline{\alpha})\\ \overset{\circ}{u}_{15}=\rho' i(1-\alpha\overline{\alpha}), & \overset{\circ}{u}_{25}=\rho'(\overline{\alpha}-\alpha), & \overset{\circ}{u}_{35}=\rho' i(\overline{\alpha}+\alpha), & \overset{\circ}{u}_{45}=\rho'(1+\alpha\overline{\alpha})\end{cases} \tag{4.7}$$

こゝに　$\rho=\overline{\psi}_2\psi_2+\overline{\psi}_3\psi_3$, $\rho'=i(\overline{\psi}_2\psi_2-\overline{\psi}_3\psi_3)$。一方 (4.3), (4.5) より

$$\psi_3\xi=\psi_3\eta=\psi_2\overline{\xi}=\psi_2\overline{\eta}=0 \tag{4.8}$$

---

(1)　柴田隆史：本紀要, **8** (1938), 171, (W. G. No. 26). なほ柴田氏により示されてゐる實例は $\overset{a}{h}_4=\overset{4}{h}_i=0$, $(a,\ i=1,2,3)$ なる形のものであるが上の理論ではこの制限は必要でない。從つて一つの座標系で $\overset{a}{h}_i$ を柴田氏の様に選んでおけば任意の實變換を施こした後の座標系に於ても上の理論は成立する。

(2), (3)　柴田：前揭, 173.

こゝに $\xi\equiv\mathring{v}^1-i\bar{\alpha}\mathring{v}^2+\bar{\alpha}\mathring{v}^3-i\mathring{v}^4,\quad \eta\equiv\bar{\alpha}\mathring{v}^1-i\mathring{v}^2-\mathring{v}^3+i\bar{\alpha}\mathring{v}^4.$

そこで今 ψ_2 又は ψ_3 が 0 でない場合を考へると $\xi=\eta=0$ となる故之より $\mathring{v}^1:\mathring{v}^2:\mathring{v}^3:\mathring{v}^4$ を計算することにより容易に

$$\mathring{u}^a=\tau\mathring{v}^a,\quad \mathring{u}_{a5}=\tau'\mathring{v}^a,\quad (\tau/\tau'=\rho/\rho') \tag{4.9}$$

を導くことが出來る。從つて直ちに

$$u^i=\tau v^i,\quad u_{i5}=\tau' v_i \tag{4.10}$$

次に $\psi_2=\psi_3=0$ のときは ψ_1 又は ψ_4 は 0 でない故 (4.3) より直ちに $\mathring{v}^1:\mathring{v}^2:\mathring{v}^3:\mathring{v}^4=-i:0:0:1$ となる。故に u^a, u_{a5} を ψ で表はした式より直ちに (4.9), 從つて (4.10) を導き得る。　證明終り。

上の證明中の (4.3) より直ちに次の定理を得る。

定理 2. 條件 $[v^i\gamma_i\psi]_P=0$ は常數 c_a の間の 2 箇の條件を與へる。

從つて ψ が 4 箇の任意常數を含むときはこの條件が成立する様に c_a を定めることが常に可能であつて，しかも同一の P, v^i に對し振動數その他の異なる種々の光を考へ得る餘地が殘つてゐることになる。

なほ本節の定理は吾々の宇宙論の時空と限らず一般に成立する定理である。

§5. 光の進路。 本節に於ては一點 $P(\mathring{x}^i)$ に於て零ベクトル v^i が與へられたときこれに依つて定まる光の進路について研究する。第 3 節に於て述べたやうに光の進路はその狀態函數 ψ から作られたベクトル u^i によつて與へられる。即ち進路の方程式は

$$\frac{dx^1}{u^1}=\frac{dx^2}{u^2}=\frac{dx^3}{u^3}=\frac{dx^4}{u^4} \tag{5.1}$$

で與へられるがこれについて次の定理が成立する。

定理 3. 宇宙論に於ける光の進路は四次元時空內の測地零線である。又その進路に沿うては常に $u^i\gamma_i\psi=0$ が成立する。

證明。基本方程式 (1.1) より(1)

$$u^j\nabla_j M=ku^ju_j,\quad \nabla_j N=0$$

然るに P 點に於ては $M=N=u^ju_j=0$ である。故に曲線 (5.1) に沿うては $M=N=u^ju_j=0$ は保存される。又 (5.1) が測地線を與へることは始めより

(1) 本節の定理の計算については附記, I, 參照。

明らかな所であるから結局 (5.1) は測地零線を與へる。次に一般の u^i に對する恒等式

$$u^i\gamma_i\Psi=(M+N\gamma_5)\Psi \tag{5.2}$$

を考へれば定理の後半の成立することも明らかである。[1]

この定理の成立することから今度の光の定義が今迄の星雲の理論と矛盾しないことが分る。

定理 4. 光の狀態函數 Ψ より作られる $u^i_{\cdot 5}$ も亦光の進路を與へる。又 $u^i_{\cdot 5}\gamma_i\Psi=0$ がその上で保存され更に $u^i=\varkappa u^i_{\cdot 5}$ とおけば $\varkappa$ は進路に沿うて常數である。

證明。前半は前定理と同様に容易に證明できる。次に

$$u^i\nabla_i u^j=(u^i\nabla_i\varkappa)u^j_{\cdot 5}+k\varkappa Mu^j_{\cdot 5}$$

故に $u^i\nabla_i\varkappa=0$ となり $\varkappa$ が常數となることも明らかである。

次に光の進路(5.1)の形を實際に定める。計算の便宜上變換 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ を施し (x,y,z,t) 座標系に直して問題を考へる。[2] この座標系に於ては四次元時空の基本テンソルは

$$\begin{cases} g_{ij}: \quad g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}-k^2x^\alpha x^\beta\sigma^{-2}, \quad g_{4\alpha}=0, \quad g_{44}=\sigma^2;\ |g_{ij}|=-1 \\ g^{ij}: \quad g^{\alpha\beta}=-\delta^{\alpha\beta}+k^2x^\alpha x^\beta, \qquad g^{4\alpha}=0, \quad g^{44}=\sigma^{-2};\ |g^{ij}|=-1 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$(x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z\ ;\ \alpha,\beta=1,2,3)$$

で與へられる。この座標系に於ける M 及び u^i を (1.3) の座標系のものから計算すれば

$$\begin{cases} M=(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma+k^2(l_1x+l_2y+l_3z) \\ u^\alpha=kx^\alpha(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma-k[l_\alpha-k^2x^\alpha(l_1x+l_2y+l_3z)] \\ u^t=(pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma^{-1} \end{cases} \tag{5.4}$$

となる。然るに測地零線の上では $M=0$ 即ち

$$(-pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma=-k^2(l_1x+l_2y+l_3z) \tag{5.5}$$

が成立する故之を (5.4) に代入し

$$u^x=-kl_1,\ u^y=-kl_2,\ u^z=-kl_3,\ u^t=(pe^{-kt}+qe^{kt})\sigma^{-1} \tag{5.6}$$

を得る。之と (5.1) より

---

(1) (5.2) 及び $u^iu_i=M^2+N^2$ より分る様に $M=N=0$ と $u^i\gamma_i\Psi=0$ とは同値である。

(2) 柴田氏の觀測系に關する研究に於ても この座標系が使用されてゐる。 柴田: 本紀要, **11** (1941), 21.

定理 5. 波動幾何學に於ける宇宙模型に於て (5.3) の座標系で考へるならば光は三次元空間內の直線上を進む。なほ光の粒子運動量の x, y, z 分値は何れも常數である。

但し今は基本方程式 (1.1) の單位行列の項を 0 として考へてゐる。もしこれを 0 でないとすれば一般には上の u^i に共通の因數を乘じたものを考へねばならない。

§6. c_a の間の條件。 前節の計算により三次元空間內の光の進路だけは求められたのであるが，本節に於ては實際に點 $P(\underset{\circ}{x}^i)$ に於て任意の零ベクトル v^i を與へたときに c_a の間に如何なる條件が定まり，又それから定められた l_a $(\alpha=1, 2, 3)$, p, q, 從つて u^i がどんな具合に實際に定まるかを計算する。

吾々の考へてゐる空間は球對稱であるから計算を簡單にするため P は x 軸上にあり且 v^i は xy 平面上にあるものとして一般性を失はない。即ち P の座標を $(\underset{\circ}{x}, 0, 0, 0)$, 又 $v^3=0$ とする。v^i は零ベクトルである。故に[1]

$$\underset{\circ}{\sigma} v^4=\sqrt{(1+k^2\underset{\circ}{x}^2\underset{\circ}{\sigma}^{-2})(v^1)^2+(v^2)^2}, \ (\underset{\circ}{\sigma}=\sqrt{1-k^2\underset{\circ}{x}^2}) \tag{6.1}$$

さて (1.1) の解 ψ は

$$ds^2=-e^{2kt}(dx^2+dy^2+dz^2)+dt^2 \tag{6.2}$$

なる座標系に於て $\overset{a}{h}_i$ を

$$\overset{1}{h}_1=\overset{2}{h}_2=\overset{3}{h}_3=ie^{kt}, \ \overset{4}{h}_4=1, \ \text{他の } \overset{a}{h}_j=0 \tag{6.3}$$

に選んだとき（この選び方は定理 1 の條件を滿足してゐる）

$$\begin{cases}\psi_1=Ae^{\frac{k}{2}t}+c_1e^{-\frac{k}{2}t}, \ \psi_2=Ce^{\frac{k}{2}t}+c_2e^{-\frac{k}{2}t} \\ \psi_3=i(Ae^{\frac{k}{2}t}-c_1e^{-\frac{k}{2}t}), \ \psi_4=i(-Ce^{\frac{k}{2}t}+c_2e^{-\frac{k}{2}t})\end{cases} \tag{6.4}$$

となる[2]。こゝに $A=k(c_1x+ic_2y-c_2z+c_3)$, $C=-k(c_2x+ic_1y+c_1z+c_4)$ (6.5)

(6.3) の $\overset{a}{h}_j$ を (5.3) の座標系に變換すれば[3]

$$\begin{cases}\overset{a}{h}_\beta=i(\delta^a_\beta+k^2x^ax^\beta\sigma^{-2}), \ \overset{a}{h}_4=-ikx^a \\ \overset{4}{h}_\beta=-kx^\beta\sigma^{-2}, \ \overset{4}{h}_4=1 ; \ |\overset{a}{h}_j|=-i, \ (\alpha, \beta=1, 2, 3)\end{cases} \tag{6.6}$$

故に $\mathring{v}^1=i(\underset{\circ}{\sigma}^{-2}v^1-k\underset{\circ}{x}v^4)$, $\mathring{v}^2=iv^2$, $\mathring{v}^3=0$, $\mathring{v}^4=-k\underset{\circ}{x}\underset{\circ}{\sigma}^{-2}v^1+v^4$. (6.7)

---

(1) P より v^i の方向に向ふ光なる故正號をとる。
(2) 竹野：本紀要, **8** (1938), (W. G. No. 30), 225.
(3) 附記, II.

又 P 點の座標は (6.2) の座標系では $(\underset{\circ}{x}\underset{\circ}{\sigma}^{-1},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{k}\log\underset{\circ}{\sigma})$ である。之等の値を用ひ (6.5), (4.3) より少し計算すれば結局

$$c_1 = k(-c_3v^1 + ic_4v^2)\beta^{-1},\ c_2 = k(-c_4v^1 + ic_3v^2)\beta^{-1} \tag{6.8}$$

を得る。こゝに $\beta = k\underset{\circ}{x}\underset{\circ}{\sigma}^{-1}v^1 + \underset{\circ}{\sigma}v^4 \neq 0$, (實數)。

(6.8) を, p, l_a を c_a で表はした式[1]に代入すれば

$$p = \frac{q}{\beta^2}\{(v^1)^2 + (v^2)^2\},\ l_1 = -\frac{2q}{k\beta}v^1,\ l_2 = -\frac{2q}{k\beta}v^2,\ l_3 = 0 \tag{6.9}$$

但し $q = 2k^2(\bar{c}_3c_3 + \bar{c}_4c_4)$。これを (5.6) に代入すれば考へてゐる光の粒子運動量密度ベクトルが得られる。三次元空間内の進路はいふ迄もなく (5.1) より次の式となる。

$$\frac{1}{v^1}(x - \underset{\circ}{x}) = \frac{y}{v^2},\ z = 0 \tag{6.10}$$

P に於て始めに與へるベクトル v^i の v^4 の符號を反對にすれば逆に向ふ光となり (6.10) はそのまゝである。從つて光は同じ途を逆に進むものが存在し得ることになる。

特に原點を發し x 軸の正の方向に進む光について考へれば上の結果に於て $\underset{\circ}{x} = 0$, $\underset{\circ}{\sigma} = 1$, $v^2 = 0$, $v^1 = v^4 = \beta$, (從つて $c_1 = -kc_3$, $c_2 = -kc_4$) とおき

$$p = q,\ l_1 = -2q/k,\ l_2 = l_3 = 0 \tag{6.11}$$

を得る。從つてその粒子運動量密度ベクトルは

$$u^x = 2q,\ u^y = u^z = 0,\ u^t = q(e^{kt} + e^{-kt})\sigma^{-1} \tag{6.12}$$

となる。又四次元時空に於ける其の進路は (5.1) より

$$e^{kt} = (1 + kx)\sigma^{-1},\ y = z = 0\ ;\ (\text{速度}\ u^x/u^t = \sigma^2) \tag{6.13}$$

從つて光の進路に沿うては $u^t = 2q\sigma^{-2}$ となる。之等の結果の物理的意義については將來十分に研究したい。

§ 7. 附記。

I. 第 5 節の計算に使用される式の説明を兼ねてこゝに吾々の宇宙模型に於て $M \equiv \Psi^\dagger A\Psi$, $N \equiv \Psi^\dagger A\gamma_5\Psi$, $u^i \equiv \Psi^\dagger A\gamma^i\Psi$, $u_{i5} \equiv \Psi^\dagger A\gamma_i\gamma_5\Psi$, $u_{ij} \equiv \Psi^\dagger A\gamma_{[i}\gamma_{j]}\Psi$, $u_{ijk} \equiv \Psi^\dagger A\gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]}\Psi$, …… 等の有する性質の若干を擧げることゝする。(1.1) より

---

(1) 竹野：前揭, 228. (W. G. No. 30).

$$\nabla_i\psi^\dagger=\frac{k}{2}\psi^\dagger\gamma_i^\dagger \tag{7.1}$$

然るに $\nabla_i\gamma_j=\nabla_i A=0,\ A\gamma_i=\gamma_i^\dagger A$ (7.2)

故に少し計算すれば

$$\nabla_h M=ku_h,\ \nabla_h N=0\quad 従つて\quad N=常數 \tag{7.3}$$

$$\nabla_h u_i=kMg_{hi}\quad 従つて\quad \nabla^i u_i=4kM \tag{7.4}$$

$$\nabla_h u_{i5}=ku_{hi5}\quad 従つて\quad \nabla_{[h}u_{i]5}=ku_{hi5},\ \nabla^i u_{i5}=0 \tag{7.5}$$

$$\nabla_h u_{ij}=ku_{hij}\quad 従つて\quad \nabla^i u_{ij}=0 \tag{7.6}$$

$$\nabla_h u_{ij5}=2kg_{h[i}u_{j]5}\quad 従つて\quad \nabla^i u_{ij5}=3ku_{j5} \tag{7.7}$$

$$\nabla_h u_{ijk}=3kg_{h[i}u_{jk]}\quad 従つて\quad \nabla^i u_{ijk}=2ku_{jk} \tag{7.8}$$

$$\nabla_h u_{ijk5}=ku_{hijk5}=ikD\epsilon_{hijk}M\quad 従つて\quad \nabla^i u_{ijk5}=0 \tag{7.9}$$

$$\nabla_h u_{ijkl}=0 \tag{7.10}$$

$$\nabla_h u_{ijkl5}=4kg_{h[i}u_{jkl]5}=ikDu_h\epsilon_{ijkl}\quad 従つて\quad \nabla^i u_{ijkl5}=ku_{jkl5} \tag{7.11}$$

但し $D=|\overset{a}{h}_j|$. (7.4) より M/k 及び u_i が夫々 de Sitter 型空間に於ける不變量 v 及びベクトル v_i[1] と一致してゐることが分る。又 (7.5) より $\nabla_{(h}u_{i)5}=0$ なる故 $u^i_{\cdot 5}$ はこの空間に於ける無限小運動のベクトルであり更にこの u_{i5} の回轉が ku_{hi5} となることも分る。

(7.3), . . , (7.11) より直ちに

$$\begin{cases}\Box N=0,\ \ \Box u_{ijkl}=0\,;\ \ \Box u^i=k^2u^i,\ \ \Box u_{ijk5}=k^2u_{ijk5}\,;\\ \Box u_{ij}=2k^2u_{ij},\ \ \Box u_{ij5}=2k^2u_{ij5}\,;\ \ \Box u_{i5}=3k^2u_{i5},\\ \Box u_{ijk}=3k^2u_{ijk}\,;\ \ \Box M=4k^2M,\ \ \Box u_{ijkl5}=4k^2u_{ijkl5}\end{cases} \tag{7.12}$$

こゝに $\Box\equiv g^{ij}\nabla_i\nabla_j$. 之等の關係は (1.1) より分る様に ψ 自身が

$$\Box\psi=k^2\psi \tag{7.13}$$

を滿足することに起因するものである。以上により

定理 6. 宇宙論に於て $N,\ u_{ijkl}\,;\ u^i,\ u_{ijk5},\ \psi\,;\ u_{ij},\ u_{ij5}\,;\ u_{i5},\ u_{ijk}\,;\ M,\ u_{ijkl5}$ は何れも方程式

$$\Box F=\mu k^2F \tag{7.14}$$

の解で夫々 μ の 0, 1, 2, 3, 4 なる整數値に對應する。

この N と u_{ijkl}, u^i と u_{ijk5}, …… が夫々同一の μ に對應することは

---

(1) 竹野: 本紀要, **10** (1940), 197. (W. G. No. 39).

$$u_{ijkl}=-iD\epsilon_{ijkl}N,\ u_{ijk5}=-iD\epsilon_{ijkl}u^l,$$

$$u^{ij}_{\cdot\cdot 5}=-\frac{i}{2D}\epsilon^{ijkl}u_{kl},\ u_{ijk}=iD\epsilon_{ijkl}u^l_{\cdot 5}, \tag{7.15}$$

$$u_{ijkl5}=iD\epsilon_{ijkl}M$$

からも明らかである。なほ M, N, u^i, $iu^i_{\cdot 5}$, iu_{ij}, iu_{ij5}, iu_{ijk}, u_{ijk5}, u_{ijkl}, u_{ijkl5} は何れも實の量である。

又定理 4 に關聯して次の逆定理も成立する。

定理 7. u^i と $u^i_{\cdot 5}$ とが比例するときは $u^i\gamma_i\Psi=0$, $u^i_{\cdot 5}\gamma_i\Psi=0$ が成立する。

證明は恒等式 $u^iu_i=u^i_{\cdot 5}u_{i5}=M^2+N^2$, $u^iu_{i5}=0$ より明らかである。

II. (5.3) の座標系に於て (6.6) の $\overset{a}{h}_i$ に對應する $\underset{a}{h}^i$ は

$$\underset{a}{h}^\beta=-i\delta^\beta_a,\ \underset{a}{h}^4=-ikx^a\sigma^{-2};\ \underset{4}{h}^a=kx^a,\ \underset{4}{h}^4=\sigma^{-2};\ |\underset{a}{h}^j|=i \tag{7.16}$$

又極座標 (1.3) に對應する $\overset{a}{h}_i$ は

$$\begin{cases}\overset{1}{h}_i=i\sigma^{-2}\sin\theta\cos\phi, & ir\cos\theta\cos\phi, & -ir\sin\theta\sin\phi, & -ikr\sin\theta\cos\phi\\ \overset{2}{h}_i=i\sigma^{-2}\sin\theta\sin\phi, & ir\cos\theta\sin\phi, & ir\sin\theta\cos\phi, & -ikr\sin\theta\sin\phi\\ \overset{3}{h}_i=i\sigma^{-2}\cos\theta, & -ir\sin\theta, & 0, & -ikr\cos\theta\\ \overset{4}{h}_i=-\sigma^{-2}kr, & 0, & 0, & 1\end{cases} \tag{7.17}$$

$$|\overset{a}{h}_j|=-ir^2\sin\theta$$

(本研究は文部省科學研究費による)

廣島陸軍幼年學校