ベクトル束論 (II)

小笠原藤次郎

(昭和 18 年 5 月 4 日受附)

著者のベクトル束研究を通じてその中核をなす思想は，拙著「ベクトル束論 (I)」[1] に於て提唱した如く，ベクトル束を表現ブール空間上の連續函數のベクトル束にて表現し，この具體的ベクトル束に適宜實函數論的方法を適用して，ベクトル束論の敷衍及び一般化を計らんとす考へ方である。「ベクトル束論 (I)」は，第一編及び第二編からなり，第一編では，表現ブール空間とその上の連續函數のベクトル束との代數的位相的關係を鮮明にし，[2] 著者の研究の足場を確立した。完全ブール代數の表現ブール空間に於ては，第一種集合の零測度集合に對する類似は，一般の位相空間に於けるよりも極めて緊密となり，そのためベクトル束の表現に於て一般の要素の表現函數が非稠密集合上を除いて有限値をとることが，著者の研究法に極めて好都合になつた。ベクトル束の完全化，環束の公理系の檢討及び表現に著者の研究法を適用して，ベクトル束の構造研究に寄與した。第二編は主として Banach 束研究である。K. Kantorovitch は，[3] 函數空間のベクトル束的構成を目差して，この方面の研究に有用な多くの概念を導入して新機軸を與へたに拘らず，その研究法の極めて素朴であるために，理論は，精緻を缺き，函數空間の在來の研究法，即ち Banach 空間論とは，沒交渉であるかの觀を呈した。著者は，再歸的 Banach 束のベクトル束論的及び Banach 空間論的研究により，Kantorovitch の B_2 空間を修正して，K-空間 (Kantorovitch 空間の略稱) の概念に想到した。K-空間は，弱完備 Banach 束として特性づけられ，その任意の區間は，列的弱コムパクトである。この性質を K-空間に於けるエルゴード定理の證明に應用した。Banach 束は，その共軛 Banach 束と共に K-空間となるときに限り再歸的である。Banach 空間論に於て，局所列的弱コムパクト Banach 空間は再歸的であるか否かは未解決の問題であるが，Banach 束に於て肯定

---

(1) 小笠原藤次郎： 本紀要 **12** (昭 17), 37–100.
(2) 更に詳しい研究は，小笠原藤次郎： 本紀要 **12** (昭 18), 217–234.
(3) L. Kantorovitch： Recueil Math., **44** (1937), 121–165. 同 **49** (1940), 209–284.

的に解決される。尚著者は，S. Bochner の條件 (L)[1] を修正して，Bochner 束の概念を導入し，その性質を調べ，エルゴード定理を證明した。また著者の研究法が有効である一例として，抽象 L_p-空間，$1 \leqq p \leqq +\infty$，の構成に於て，ベクトル束に σ-完全の假定を設ける要なきことを明かにした。

本稿第三編では，K-空間の研究を更に一般化し，ベクトル束の表現とその共軛ベクトル束の表現との關係を汎函數の積分表示によつて鮮明にし，之を利用してベクトル束が再歸的なるための條件を求め，特に再歸的 Bochner 束の具體的構造を決定し，Hilbert 空間のベクトル束的構成を與へた。K-空間の外に，Banach 束研究に有用な K^--空間，Bochner 束の構成法を一般化した (K_∞) を滿足するベクトル束の概念及びこれ等を正規部分空間として含む抽象 S 空間の概念を導入した。單位をもつ抽象 S 究間の概念は，前編に於て，K-究間に於けるエルゴード定理の證明の際に導入したものであるが，今回はその概念に更に檢討を加へて一般な概念に到達した。ベクトル束が抽象 S 空間の正規部分究間であるための條件を求め，尚ベクトル束がこの條件を滿足する多くの場合を考察した。單位をもつ抽象 S 空間は，適當な集合上の完全加法的測度に關する可測函數の S 究間で同型表現される。S 空間の部分空間である L_p 空間，$1 \leqq p < +\infty$，に於ては，要素列の (o)-收斂は函數列の優收斂を意味し，函數列の殆ど到る所に於ける收斂に對應する束論的收斂の型を定める點に於て，S 空間を抽象した抽象 S 空間が必要になる。尙他の點に於て抽象 S 空間の概念が有用であることは，次編の積分論でも明かにする。普通 Banach 空間論では，存在定理の證明に範疇定理を援用することが多いが，[2] 著者は，ベクトル束の“正則性”を存在定理に援用して，(s) 空間を環束を作る Bochner 束として特性づけた。尙本編に於て，二重共軛 Banach 空間が可分となる Banach 束は再歸的であることを證明したが，これも Banach 束の著しい性質の一つと考へられる。第四編は，ベクトル束を値域とする點函數及び集合函數の積分論の構成を目的とするものである。Banach 空間に於ける Bochner 積分の定義[3] に並行して，ベクトル束を値域とする點函數に對し (o)-積分の概念を導入した。ベクトル束が抽象 S 空間の正規部

---

(1) S. Bochner: Proc. Nat. Acad. Sci., **26** (1940), 29–31.
(2) S. Banach: *Théorie des opérations linéaires*, (1932) 參照。
(3) S. Bochner: Fundamenta Math., **20** (1933), 262–276.

分空間となるときに，(o)-積分は豊富な內容を持つことになる。K-空間に於て，Banach 空間論に於ける積分概念と比較するならば，(o)-積分は Bochner 積分と Dunford 積分の中間に位する，即ち $x(t)$ が (o)-可積分であることと $|x(t)|$ が Dunford の意味で可積分であることとが同義になる。抽象 L 空間では，(o)-積分と Bochner 積分とは同義である。次いで不定 (o)-積分の性質を檢討し，Radon-Nikodym 型定理を調べ，抽象 S 空間，Bochner 束，抽象 L 空間等に於ては，不定 (o)-積分は，(o)-有界，絕對 (o)-連續，加法的集合函數として特性づけられることを證明した。また Banach 空間に於ける不定 Bochner 積分に關する諸家の Radon-Nikodym 型定理の研究(1) の不備を補足した。集合函數に對しては，Hellinger 型積分の理論を構成し，直交函數による展開定理を證明した。これは著者の嘗ての研究(2) と多くの類似をもつものである。第五編では，種々の型の線形作用素の解析的表現を決定する問題を取扱ふ。この方面の研究は,(3) 積分論と密接な交渉を持ち，諸家を刺激して多くの結果が得られたに拘らず，連續函數空間に於ける作用素の表現及び Radon-Nikodym 型定理の研究の不備に原因して滿足すべきものではなかつた。著者は，連續函數空間に於ける諸種の型の線形作用素の解析的表現を定め，その一部の結果を應用して，局所列的弱コムパクト Banach 空間から K-空間への $\binom{o}{o}$-連續線形作用素の完全連續性を證明した。また前編に於ける Radon-Nikodym 型定理の研究により，L_p 空間，$1 \leqq p \leqq +\infty$，に於ける作用素表現に關する諸家の研究を完全にし，V^2 空間から抽象 L_2 空間への線形作用素に對し，$\binom{o}{o}$-連續性と finite norm であることの同義を證明した。

以上の所論に於ては，複素係數のベクトル束を考へることは單に記法の複雜化を招くに過ぎないから，實係數のベクトル束に局限した。尙本稿は，「ベクトル束論 (I)」に引續き次の內容からなる。

(1) N. Dunford and B. J. Pettis: Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1940), 323–392.
R. S. Phillips: 同上, **48** (1940), 516–540.

(2) 小笠原藤次郎: 本紀要, **7** (1937), 215–247.

(3) N. Dunford and B. J. Pettis: 前掲に詳しい文獻がある。

第三編 Kantorovitch 空間[1]

第一章 ベクトル束の再歸性

§1. 共軛ベクトル束。

以下 X を少くとも二つの要素をもつベクトル束とする。正線形汎函數の差として表される X 上の汎函數 $f(x)$ は (o)-**有界**であると示ふ。但し本章に於て汎函數とは，すべて (o)-有界線形汎函數を指すものと定める。$x_n\downarrow 0$ $(x_\delta\downarrow 0)$ に對し，常に $|f|(x_n)\to 0$ $\big(|f|(x_\delta)\to 0\big)$ ならば，$f(x)$ は (o)-**連續** $\big($Moore-Smith の(o)-**連續**$\big)$ であると云ふ。此處に δ は有向集合に屬する指標である。X 上の汎函數の全體は，周知の様に，完全ベクトル束を作る。之を X の**共軛ベクトル束**と云ひ，$\bar{X}$ で表す。X 上の汎函數のうち (o)-連續 $\big($Moore-Smith の (o)-連續$\big)$ なるものの全體の作る完全ベクトル束を $\hat{X}(\tilde{X})$ で表す。$X=\bar{\bar{X}}$ のとき，X は再歸的であると云ふ。$\bar{X}, \hat{X}, \tilde{X}$ の何れをも Z で代表する。諸種の條件のもとに，$X, \bar{X}, \hat{X}, \tilde{X}$ 等の間の關係，特に $X=\bar{\bar{X}}$ となる條件を求めるのが本章の目的である。本章に於て考へるこれ等の諸種の條件を一括して置かう。

(※)　$0<x\in X$ ならば，$f(x)>0$ なる $0<f\in Z$ が存在する。[2]

(†)　正要素の任意の集合の下端は，その或高々可附番部分集合の下端である。

(§)　互に直交する高々可附番個の正要素の集合が存在し，それらのすべてに直交する要素は 0 以外に存在しない。

---

(1) 拙著，全國紙上數學談話會，**240** (昭 17) 談話 1060 に本編の所論の概要が載つてゐる。

(2) この條件を滿足するベクトル束は，明かに，アルキメデス的である。このことは以下繰返して注意しない。

(※) 高々可附番個の正要素 $f_n \in Z$ が存在し，すべての f_n に對し，$f_n(|x|)=0$ ならば，$x=0$ である。

(α_0) 如何なる汎函數も (o)-連續である。

(α) 如何なる汎函數も Moore-Smith の (o)-連續である。

(β_0) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$ がすべての $0 \leqq f \in Z$ に對し，$\lim\limits_n f(x_n) < +\infty$ ならば，常に $\bigvee\limits_n x_n$ が存在する。

(β) A を任意二要素と共にその上端を含む正要素の集合とする。すべての $0 \leqq f \in Z$ に對し，$\text{l. u. b.}\,(f(x);\, x \in A) < +\infty$ ならば，常に $\bigvee(x;\, x \in A)$ が存在する。

以上の條件中 Z に關係した命題に，Z を $\bar{X}, \hat{X}, \tilde{X}$ として得られるものを示すには，條件を表す記號の右下に夫々 1, 2, 3 を添へる。例へば，(β) に於て，$Z=\bar{X}$ としたものは，$(\beta)_1$ で表す。

補助定理 1. X が (※) を滿足するとき，すべての $0 \leqq f \in Z$ に對し $f(x_0) \geqq 0$ となる $x_0 \in X$ は $x_0 \geqq 0$ である。

證明。$(x_0)_- > 0$ が矛盾を起すことを示す。(※) を使つて，$f\big((x_0)_-\big) > 0$ なる一つの $0 < f \in Z$ をとる。$(x_0)_-$ の直交要素の全體の作る X の部分空間を X_1, X_1 と $(x_0)_-$ の張る線形部分空間を X_0 とする。X_0 上で汎函數 $g(x)$ を $x=x_1+\lambda(x_0)_-$, $x_1 \in X_1$ に對し，$g(x)=\lambda f\big((x_0)_-\big)$ と定めると，$|g(x)| \leqq f(|x|)$. Hahn-Banach の擴大定理[(1)] を使つて，この不等式を保存して $g(x)$ を X 上の汎函數に擴大し，その正部分をとり，之を $h(x)$ とすれば，$0 \leqq h \leqq f$. 故に $h \in Z$. 然るに h の定義から，$h(x_0)=-h\big((x_0)_-\big) < 0$ となり矛盾が起る。

以上。

補助定理 2. X が (※) を滿足するならば，$x \in X$, $0 \leqq f \in Z$ に對し，$f(x_+)=\text{l. u. b.}\,\big(f'(x);\, 0 \leqq f' \leqq f,\, f' \in Z\big)$.

證明。$0 \leqq f' \leqq f$ とする。明かに $f'(x) \leqq f'(x_+) \leqq f(x_+)$. f' を適當にとれば，$f'(x)=f(x_+)$ なることを示せばよい。X の部分空間 X_1, X_2 を夫々 x_+, x_- の生成する主イデヤルにとり，X_1, X_2 の張る線形部分空間を X_0 とする。X_0 上で汎函數 $f'(y)$ を，$y=y_1+y_2$, $y_1 \in X_1$, $y_2 \in X_2$, に對し $f'(y)=f(y_1)$ と定めると，$|f'(y)| \leqq f(|y|)$. 次にこの不等式を不變に保つて，$f'(y)$ を X 上の汎

(1) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, (1932), 28.

函數に擴大し,[1] その正部分を同じ記號 $f'(y)$ で表せば, $0\leqq f'\leqq f$, $f'(x)=f(x_+)$ となる。 以上。

$\bar{X}$ の共軛ベクトル束を $\bar{\bar{X}}$ で表し, $x\in X$ に對し, $\xi\in\bar{\bar{X}}$ を $\xi(f)=x(f)$ によつて定め, x と ξ を恒等視し, X を $\bar{\bar{X}}$ に埋藏する。

定理 1. X が $\bar{\bar{X}}$ の部分ベクトル束となる條件は, X が $(※)_1$ を滿足することである。

證明。 補助定理 1, 2 から。 以上。

補助定理 3. $x\in X$ を Z 上の汎函數と考へれば, Moore-Smith の (o)-連續である。

證明。 Z の定義から。 以上。

定理 1 の場合と同樣にして

定理 2. X が $\hat{\hat{X}}(\tilde{\tilde{X}})$ の部分ベクトル束となる條件は, X が $(※)_2$ $\left((※)_3\right)$ を滿足することである。

證明。補助定理 1, 2, 3 から。 以上。

定理 3. X がアルキメデス的ならば, $\hat{X}, \tilde{X}$ は何れも $\bar{\bar{X}}$ の正規イデヤルである。

證明。 $\hat{X}$ は $\bar{\bar{X}}$ の正規部分空間であることは明か。今 A を $\hat{X}$ の正要素の任意の集合とし, $f=\sup A\in\bar{\bar{X}}$ のとき, $f\in\hat{X}$ を示せばよい。[2] 即ち, $x_n\downarrow 0$ に對し, $f(x_n)\to 0$ を云へばよい。$x_n\leqq e$, $n=1, 2, \dots$ なる $0<e\in X$ をとる。X の各要素は e に關して有界な場合を考へればよい。尙 X は, ノルム $\|x\|=\text{g.l.b.}(\alpha; |x|\leqq\alpha e)$ で完備として差支ない。e が恒等的 1 となる樣に, X をビコムパクト Hausdorff 空間 Ω 上の有界連續函數の全體で同型表現し, x の表現函數を $x(p)$ とする。第二編第四章 §1 の所論を適用し, $0\leqq g\in\bar{X}$ に應ずる正則な測度函數 $m_g(E)$ を考へると,

$$g(x)=\int_\Omega x(p)m_g(dE) \tag{1}$$

$g\in A$ とすれば, (o)-連續の定義から, $E_0=\left(p;\ \lim_n x_n(p)>0\right)$ と置けば, $m_g(E_0)=0$ が得られる。然るに $m_f=\vee(m_g;\ g\in A)$ なる故に $m_f(E_0)=0$, 從て (1) を使へば

(1) S. Banach: 前掲, 28.
(2) 第一編第一章 §2 補助定理 3.

$$\lim_n f(x_n)=\int_\Omega \lim_n x_n(p)m_f(dE)=0$$

となる。故に $\hat{X}$ は $\bar{X}$ の正規イデヤルである。$\tilde{X}$ に對しても同樣の論法で證明される。 以上。

定理 4. X を (§) を滿足するアルキメデス的ベクトル束とするならば，$\hat{X}$, $\tilde{X}$ の何れも (†) を滿足する。

證明。先づ X が單位をもつ場合から始める。$e>0$ を X の單位とし，e に關して有界な X の要素の全體の作るベクトル束を X_e とする。e を恒等的 1 となる樣に，X をビコムパクト Hausdorff 空間 Ω 上の連續函數 (非稠密集合上を除いて有限値をとる) のベクトル束で同型表現し，而も X_e は稠密な有界連續函數族で表現される樣にする。前定理の證明中の記法を踏襲すると，$x\in X_e$, $0\leqq g\in\hat{X}$ に對し，

$$g(x)=\int_\Omega x(p)m_g(dE) \tag{1}$$

となる。$0\leqq x\in X$ に對し，$x_n=x\frown ne$ とすれば，$g\in\hat{X}$ なる故，$g(x)=\lim_n g(x_n)$. 從て任意の $x\in X$ に對し (1) 式が成立つ。A を $\hat{X}$ の正要素の任意の集合とし，$f=\wedge(g;g\in A)$ とする。A は二要素と共にその下端を含むとしてよい。$m_f=\wedge(m_g;g\in A)$ が容易に判る。從て $m_{g_n}\downarrow m_f$ なる $g_n\in A$ が存在する。(1) 式を使つて

$$f(x)=\int_\Omega x(p)m_f(dE)=\lim_n\int_\Omega x(p)m_{g_n}(dE)=\lim_n g_n(x)\,.$$

この關係から $f=\bigwedge_n g_n$ が判る。$\tilde{X}$ に對しても同樣である。次に X が單位を有しないとする。X には，互に直交する正要素 $e_n>0$ の列が存在し，すべての e_n に直交する X の要素は 0 以外に存在しない。$\{e_n\}$ を利用して X を連續函數のベクトル束で同型表現すれば，同樣の論法で證明することが出來る。 以上。

定理 5. X が (§), $(※)_1$, (a_0) を滿足するならば，$\bar{X}$ は (†) を滿足し，從て $\bar{X}$ 上の (o)-連續汎函數は，すべて Moore-Smith の (o)- 連續である。

證明。 前定理から。 以上。

補助定理 4. X を $(※)_1$, (a_0) を滿足する σ-完全ベクトル束とするならば，$\bar{X}$ に對する條件 (§) は X に對する $(⁂)_1$ と同義である。

證明。 $(§)\to(⁂)_1$ の證： $h_n\in\bar{X}$, $n=1,2,3,\dots$ を (§) の正要素とする。$h_n(a)=0$, $n=1,2,\dots$ なる正要素 $a\in X$ は $a=0$ なることを云へばよい。任

意の $0\leqq g\in\bar{X}$ に對し，主イデヤル $\mathfrak{A}(h_n)$ への射影を g_n とすれば，$g_n=\bigvee_m(g_n\frown mh_n)$. 從て $g_n(a)=0$. これから $g(a)=0$ を得る。故に (※)$_1$ により $a=0$ である。

(⋙)$_1\to$(§) の證：(⋙)$_1$ の正要素 $0\leqq f_n\in\bar{X}$, $n=1,2,\dots$ を考へる。すべての f_n に直交する $0<g\in\bar{X}$ が存在すると假定すれば，$g(a)>0$ なる $0<a\in X$ が存在す。これが矛盾を起すことを示す。X の各要素は a に關して有界な場合を考へればよい。正數列 $\{\lambda_n\}$ を $\sum_n\lambda_nf_n(a)<+\infty$ なる様にとり，$f=\sum_n\lambda_nf_n$ と置くと，$f\frown g=0$. 第二編第四章 §1 補助定理 8 により，$a=a_1+a_2$, $a_1\frown a_2=0$, $f(a_1)=0=g(a_2)$ なる a_1, a_2 が存在する。$f_n(a_1)=0$, $n=1,2,\dots$ となる故，$a_1=0$. 從て $a=a_2$ となる。故に $g(a)=0$ となり矛盾が起る。これから $\bar{X}=\bigvee_n\mathfrak{A}(f_n)$ となる故に，(§) の成立が容易に判る。　　以上。

補助定理 5. X を (※)$_2$ を満足する σ-完全ベクトル束とするならば，$\hat{X}$ に對する條件 (§) は X に對する (⋙)$_2$ と同義である。

證明。前補助定理の證明に準ず。　　以上。

補助定理 6. X を (※)$_3$ を満足する σ-完全ベクトル束とするならば，$\tilde{X}$ に對する條件 (§) は X に對する (⋙)$_3$ と同義である。

證明。補助定理 4 の證明に準ず。　　以上。

定理 6. X を (※)$_2$ $\big(($※$)_3\big)$ を満足する σ-完全ベクトル束とする。$\hat{X}(\tilde{X})$ が條件 (§) 或は X が (⋙)$_2$ $\big(($⋙$)_3\big)$ を満足するならば，X は (†) を満足する完全ベクトル束にして，X 上の汎函數に對し，(o)-連續と Moore-Smith の (o)-連續とは同義である。

證明。$\hat{X}$ が單位をもつ場合のみを證明する。他の場合は之に準じてやればよい。A を X の正要素の任意の集合とする。A の適當な可附番部分集合の下端が A の下端になることを示せば，本定理が證明されたことになる。このため，A は二要素と共にその下端を含み，$x<e$, $x\in A$ なる要要素 e の存在を假定してよい。尙 e は X の單位として一般性を失はない。主イデヤルによる方法で，e が恒等的 1 なる様に，X をビコムパクト Hausdorff 空間 Ω 上の連續函數（非稠密集合上を除いて，有限値をとる）のベクトル束で同型表現し，$x\in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ と定める。$\mathfrak{R}$ を Ω の開且閉集合を含む最小の Borel 族とし，$E\in\mathfrak{R}$ に對し，$\mu(E)$ を E と等一種集合を法として一致する開且閉集合の特性函數を表現函數とする X の要素と定義する。$\mu(E)$

は (o)-位相で完全加法的なる故, $f\in\hat{X}$ に對し, $m_f(E)=f\bigl(\mu(E)\bigr)$ と置くと, $m_f(E)$ は完全加法的である。$h\in\hat{X}$ を $\hat{X}$ の單位とすれば, $m_h(E)=0$ と E は第一種集合であることと同義である。[1] 故に, m_h-可測函數には $\mathfrak{R}$ に屬する第一種集合上を除いて一致する連續函數が一意に定まる。$m_f(E)$ は $m_h(E)$ に關し絕對連續になることから, Radon-Nykodym の定理により,

$$(2)\qquad m_f(E)=\int_E f(\mathfrak{p})m_h(dE)$$

$$(3)\qquad f(x)=\int_\Omega x(\mathfrak{p})m_f(dE)=\int_\Omega x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m_h(dE)$$

なる連續函數 $f(\mathfrak{p})$ が $f\in\hat{X}$ に對し一意に定まる。[1] $\hat{X}$ は完全ベクトル束なることを利用して, 第一編第二章 §1 定理 3 により X は完全ベクトル束になる。$\beta_x(E)=\int_E x(\mathfrak{p})m_h(dE)$ と定めると, (3) より

$$(4)\qquad f(x)=\int_\Omega f(\mathfrak{p})\beta_x(dE)$$

を得る。β_x を抽象 L 空間の要素と考へ, $\beta=\wedge(\beta_x;x\in A)$ とすれば, $\beta_{x_n}\downarrow\beta$ なる $x_n\in A$ が存在する。$x_n\downarrow x_0$ なる $x_0\in X$ をとれば, (4) 式を使つて

$$f(x_0)=\lim_n f(x_n)=\int_\Omega f(\mathfrak{p})\beta(dE)$$

となる故, $\beta=\beta_{x_0}$ を得, $x_0=\bigwedge_n x_n=\wedge(x;x\in A)$ が判る。 以上。

定理 7. X を $(※)_1,(\alpha_0)$ を滿足する σ-完全ベクトル束とし, $\bar{X}$ が (§) 或は X が $(⁑)_1$ を滿足するならば, X は $(\alpha),(\dagger)$ を滿足する完全ベクトル束になる。

證明。 前定理から。 以上。

補助定理 6. $\bar{X},\hat{X},\tilde{X}$ は何れも $(\beta)_3$ を滿足する。

證明。 定義から自明。 以上。

補助定理 7. X が $(\beta_0),\bigl((\beta)\bigr)$ を滿足するならば, X は (※) を滿足する σ-完全 (完全) ベクトル束である。

證明。 殆ど明か。 以上。

定理 8. X が $(\beta_0)_2\ \bigl((\beta_0)_3\bigr)$ を, $\hat{X}(\tilde{X})$ が (§) 或は X が $(⁑)_2\ \bigl((⁑)_3\bigr)$ を滿足するならば, X は $(\dagger),(\beta)_3$ を滿足する完全ベクトル束である。

---

(1) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, (1940) 定理 3.13 を使へば, X が完全ベクトル束であることは, これからも判る。

(2) 第一編, 第二章 §3 定理 1.

証明。 $\hat{X}$ が單位をもつ場合のみを證明する。定理 6 により, $\hat{X}=\widetilde{X}$, $(\beta)_3$ のみを示せば充分。h を $\widetilde{X}$ の單位とし, h を恒等的 1 とする様に, $\widetilde{X}$ をビコムパクト Hausdorff 空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し, $f\in\widetilde{X}$ の表現函數を $f(\mathfrak{p})$ と定める。E を Baire の性質をもの Ω の部分集合とし, $\nu(E)$ を E と第一種集合を法として一致する開且閉集合の特性函數を表現函數とする $\widetilde{X}$ の要素と定義する。$x\in X$ に對し, $\beta_x(E)=\nu(E)(x)$ と定めると, $\beta_x(E)$ は完全加法的にして

$$(4)\qquad f(x)=\int_\Omega f(\mathfrak{p})\beta_x(dE)$$

を得る。條件 $(\beta)_3$ に述べられた集合 A をとり, $\beta=\vee(\beta_x;\ x\in A)$ とすれば, $\beta_{x_n}\uparrow\beta$ なる $x_n\in A$ が存在する。$(\beta_0)_2$ 從て $(\beta_0)_3$ により, $x_n\uparrow x_0$ なる $x_0\in X$ が存在する。(4) を使つて $\beta=\beta_{x_0}$ 從て $x_0=\bigvee_n x_n=\vee(x;\ x\in A)$ が成立つことが判る。 以上。

定理 9. X が $(\alpha_0), (\beta_0)_1$ を, $\bar{X}$ が (§) 或は X が $(※)_1$ を滿足するならば, X は $(\alpha), (\beta), (\dagger)$ を滿足する。

證明。 定理 8 から。 以上。

§2. 共軛ベクトル束の表現ブール空間。

暫く X は $(※)_3$ を滿足する完全ベクトル束とし, A, B を夫々 $X, \widetilde{X}$ の任意の空でない部分集合とする。

$$A^{※}=\left(f;\ \text{すべての } x\in A \text{ に對し, } |f|(|x|)=0,\ f\in\widetilde{X}\right)$$
$$B^{※}=\left(x;\ \text{すべての } f\in B \text{ に對し, } |f|(|x|)=0,\ x\in X\right)$$

と定義する。

補助定理 1. $A^{※}, B^{※}$ は夫々 $\widetilde{X}, X$ の正規イデヤルである。

證明。 定義から明かに, $A^{※}, B^{※}$ は夫々 $\widetilde{X}, X$ の正規部分空間である。$g\in\widetilde{X}$ を $(f;\ 0\leqq f\leqq g,\ f\in A^{※})$ の上端とすれば, 上端の定義から直ちに, $g(|x|)=0$, $x\in A$. 故に $g\in A^{※}$. 第一編第一章 §2 補助定理 3 により, $A^{※}$ は $\widetilde{X}$ の正規イデヤルである。次に $y=\vee(x;\ 0\leqq x\leqq y,\ x\in B^{※})$ とすれば, 前節補助定理 3 を使つて, $|f|(y)=0$, $f\in B$ を得る。故に $y\in B^{※}$, 從て $A^{※}$ の場合と同理由により $B^{※}$ は X の正規イデヤルである。 以上。

補助定理 2. A が X の正規イデヤルならば, $A^{※※}=A$.

證明。 定義から明かに $A^{※※}\supset A$. 假に $A^{※※}\neq A$ とすれば, A のすべ

ての要素と直交する $0<x\in A^{\perp\perp}$ が存在する。條件 $(※)_3$ により，$f(x)>0$ なる $0<f\in\widetilde{X}$ が存在する。Hahn-Banach の擴大定理[1] を使つて，$f\in A^{\perp}$ としてよい。これは $x\in A^{\perp\perp}$ に矛盾する。故に $A^{\perp\perp}=A$ が成立つ。

以上。

補助定理 3. B が $\widetilde{X}$ の正規イデヤルならば，$B^{\perp\perp}=B$.

證明。 $B^{\perp\perp}\supset B$ は自明。假に $B^{\perp\perp}\neq B$ とせば，すべての B の要素と直交する $0<f\in B^{\perp\perp}$ が存在する。$f>0$ の定義から $f(a)>0$ なる $0<a\in X$ が存在する。此處に a は $0\leqq b<a$ ならば $f(b)<f(a)$ としてよい。何者，$A=\big(a_\alpha;\ f(a_\alpha)=f(a),\ 0<a_\alpha\leqq a\big)$ と置けば，$a_\alpha,\ a_\beta\in A$ から，$f(a)-f(a_\alpha\frown a_\beta)$ $=f\big((a-a_\alpha)\smile(a-a_\beta)\big)\leqq f(a-a_\alpha)+f(a-a_\beta)=0.$ 從て $0<a_\alpha\frown a_\beta\leqq a$, $f(a_\alpha\frown a_\beta)=f(a)$ となる。$f\in\widetilde{X}$ なる故 $\bigwedge_\alpha a_\alpha\in A$. 從て最初から $a=\bigwedge_\alpha a_\alpha$ としてよい。任意の $0\leqq g\in B$ に對し，$g\frown f=0$ なる故，第二編第四章 §1 補助定理 8 により，$a=a_1+a_2,\ a_1\frown a_2=0,\ f(a_1)=0=g(a_2)$ なる a_1, a_2 が存在する。上述 a の性質から $a_1=0$. 從て $g(a)=0$, 即ち $a\in B^{\perp}$. これは $f\in B^{\perp\perp}$ に矛盾する。

以上。

以上の補助定理により，$A\to A^{\perp\perp}$, $B\to B^{\perp\perp}$ は何れも，G. Birkhoff の意味の閉苞演算[2] を定義し，之に關して閉ぢた集合が夫々 $X,\widetilde{X}$ に於ける正規イデヤルである。$A^{\perp\perp}, B^{\perp\perp}$ は夫々 A, B を含む最小の正規イデヤルである。A のすべての要素と直交す要素の全體を A' とすれば，$A''=A^{\perp\perp}$ である。同様に $B''=B^{\perp\perp}$ が成立つ。$X,\widetilde{X}$ の正規イデヤルの作る完全ブール代數を夫々 $N,\widetilde{N}$ と定義すると，

補助定理 4. $A'^{\perp}=A^{\perp\prime}$, $B'^{\perp}=B^{\perp\prime}$. A を正規イデヤルとすれば，$A\to A^{\perp\prime}$ により $N,\widetilde{N}$ は束同型である。B を使つても同様のことが云へる。

證明。 $A\in N$, $B\in\widetilde{N}$ とし，A に $A^{\perp\prime}$, B に $B'^{\perp}$ を對應させる。

$$(A^{\perp\prime})'^{\perp}=A^{\perp\prime\prime\perp}=A^{\perp\perp}=A\,.$$

$$(B'^{\perp})^{\perp\prime}=B'^{\perp\perp\prime}=B''=B\,.$$

故にこの二つの對應は互に他の逆對應にして，これにより $N,\widetilde{N}$ は順序同型從て束同型となる。次に A を X の任意の部分集合とすれば，A', A'' に對應する $\widetilde{N}$ の要素は互に他の補要素であるから，

(1) S. Banach, 前揭, 28.
(2) G. Birkhoff, 前揭, 17.

$$A'^{\#}=A''^{\#'}=A^{\#\#\#'}=A^{\#'}.$$

B に對しても同様な關係を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　以上。

$A\in N$ に對し，$A^{\#'}$ を A **に對應する** $\widetilde{X}$ **の正規イデヤル**と云ひ，$B\in\widetilde{N}$ に對し，$B'^{\#}$ を B **に對應する** X **の正規イデヤル**と呼ぶ。A に對應する正規イデヤルは，$f(x)=g(P_Ax)$ $g\in\widetilde{X}$ の形の $f\in\widetilde{X}$ の全體からなる。從て A に對して考へた $\widetilde{A}$ と線形-束-同型である。$0\leqq g\in\widetilde{X}$ に對し，$f\in\widetilde{X}$ が $g(|x|)=0$ ならば，常に $f(x)=0$ となるとき，f は g に關して**絶對連續**であると云ひ，$f\prec g$ で表す。g の生成する主イデヤルを $\mathfrak{A}(g)$ とせば，$f\in\mathfrak{A}(g)$ と $f\prec g$ は同義であることが判る。特に X が單位 e をもつときは，上述の x は e に關する特性要素に限つて差支ない。これによつて絶對連續の意味は更に明かになる。

$N,\widetilde{N}$ の表現ブール空間は，$N,\widetilde{N}$ の束同型から同位相となる故に，對應する點を恒等視し，Ω で表す。即ち $A\in N$ と $A^{\#'}\in\widetilde{N}$ は Ω の同一の開且閉集合で表現される。Ω の點は $\mathfrak{p}$ で表すことにする。

先づ，$X,\widetilde{X}$ が夫々單位 e,h をもつとする。正規イデヤルによる方法で，e が恒等的 1 になる様に，X を Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し，x の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ で表す。E を Baire の性質をもつ Ω の部分集合とし，$\mu(E)$ を E と第一種集合を法として一致する Ω の開且閉集合の特性函數を表現函數とする X の要素と定める。$\mu(E)$ は (o)-位相で完全加法的である。斯様な表現及び $\mu(E)$ を (Ω,e,μ) で表す。$\widetilde{X}$ に對しても同様にして (Ω,h,ν) を定義する。此處に於て $f\in\widetilde{X}$ の表現函數を $f(\mathfrak{p})$ で表す。$m(E)=h\big(\mu(E)\big)$ と定めると，$m(E)$ は非負完全加法的にして，$m(E)=0$ と E は第一種集合とは同義である。$m_f(E)=f\big(\mu(E)\big)$ と定めるとき，$m_f(E)$ は $m(E)$ に關して絶對連續となる故

$$m_f(E)=\int_E F(\mathfrak{p})m(dE) \tag{1}$$

$$f(x)=\int_\Omega x(\mathfrak{p})m_f(dE)=\int_\Omega x(\mathfrak{p})F(\mathfrak{p})m(dE) \tag{2}$$

となる連續函數 $F(\mathfrak{p})$ が f に對し一意に定まる。[1] $F(\mathfrak{p})\equiv f(\mathfrak{p})$ なることを示さう。(2) を使つて

(1) 第一編，第二章 §1 定理 1.

$$(3)\qquad (f-\lambda h)_-(x)=\int_{(\mathfrak{p};\,F(\mathfrak{p})<\lambda)} x(\mathfrak{p})\big(\lambda-F(\mathfrak{p})\big)m(dE)\,.$$

$E_\lambda=\big(\mathfrak{p};\ F(\mathfrak{p})<\lambda\big)$ と置く。(3) より，$(f-\lambda h)_-(|x|)=0$ と $\mu(E_\lambda)\frown|x|=0$ とは同義，從て $\mathfrak{A}\big((f-\lambda e)_-\big)$ に對應する X の正規イデヤルは $\mathfrak{A}\big(\mu(E_\lambda)\big)$. 故に f の表現函數の定義から[1] $F(\mathfrak{p})\equiv f(\mathfrak{p})$ を得る。

次に $X,\widetilde{X}$ が同時には單位を有しないとする。X の正要素の集合 $\{e^\alpha\}$ を

(i) $\alpha\neq\beta$ ならば，$e^\alpha\frown e^\beta=0$

(ii) すべての e^α に對し，$e^\alpha\frown x=0$ ならば $x=0$.

(iii) $\mathfrak{A}(e^\alpha)$ に $\widetilde{X}$ の主イデヤル $\mathfrak{A}(h^\alpha)$ が對應する。[2]

を滿足する樣にとる。$\{h^\alpha\}$ も $\widetilde{X}$ に於て (i), (ii) の性質をもつ。$\mathfrak{A}(e^\alpha)$, $\mathfrak{A}(h^\alpha)$ に對應する Ω の開且閉集合を Ω_α とし，$(\Omega_\alpha, e^\alpha, \mu^\alpha)$, $(\Omega_\alpha, h^\alpha, \nu^\alpha)$ を考へ，[3] $E\subset\Omega_\alpha$ に對し，$m^\alpha(E)=h^\alpha\big(\mu^\alpha(E)\big)$, $m_f^\alpha(E)=f\big(\mu^\alpha(E)\big)$ と置く。$x\in X$, $f\in\widetilde{X}$ の Ω 上の表現函數を $x(\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{p})$ とすれば，前述と同樣にして

$$(4)\qquad m_f^\alpha(E)=\int_E f(\mathfrak{p})m^\alpha(dE)\,,\qquad E\subset\Omega_\alpha$$

$$(5)\qquad f(x)=\int_{\Omega_\alpha} x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^\alpha(dE)\,,\qquad x\in\mathfrak{A}(e^\alpha)$$

を得る。$\sum\limits_\alpha$ で高々可附番個の項のみ 0 でない絶對收斂級數の和を表すものとすれば，$f\in\widetilde{X}$ に對して

$$(6)\qquad f(x)=\sum_\alpha\int_{\Omega_\alpha} x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^\alpha(dE)$$

を得る。

以上は X の表現を出發點として $\widetilde{X}$ の表現が積分表示によつて得られることを示したが，順序を逆にしても同樣の結果を得る。上述の樣な表現法を**汎函數の積分表示による方法**と呼ぶ。以上を定理の形に纏めて，次の樣に要約しやう。

定理 1. X を $(※)_3$ を滿足する完全ベクトル束とする。$X,\widetilde{X}$ の正規イデヤルの作る完全ブール代數は束同型にして，連續函數のベクトル束での同型表現には，正規イデヤルによる方法と汎函數の積分表示による方法とは全く同義である。

---

(1) 前用文友，小笠原藤次郎： 本紀要，**12** (昭 17), 17–35.

(2) 一般には，X の主イデヤルに $\widetilde{X}$ の主イデヤルが對應しないことに注意。

(3) e^α, h^α を夫々 Ω_α の特性函數とする樣な表現である。

定理 2. X を (※)$_1$, (α) を滿足する完全ベクトル束とする。$X, \bar{X}$ の正規イデヤルの作る完全ブール代數は束同型にして，連續函數のベクトル束での同型表現には，正規イデヤルによる方法と汎函數の積分表示による方法とは全く同義である。

證明。 前定理から。　　以上。

定理 3. X を (⁂)$_2$ を滿足する σ-完全ベクトル束とする。X と $\hat{X}$ に對し定理 1 が成立つ。

證明。 定理 1 及び前節定理 6 から。　　以上。

定理 4. X を (⁂)$_3$ を滿足する σ-完全ベクトル束とする。X と $\widetilde{X}$ に對し定理 1 が成立つ。

證明。 前定理の證明と同樣。　　以上。

定理 5. X を (α_0), (⁂)$_1$ を滿足する σ-完全ベクトル束とする。定理 2 が成立つ。

證明。 前定理の證明と同樣。　　以上。

定理 6. X を (※)$_1$ を滿足し單位をもつ K_6^- 型“正則”ベクトル束[1]とすれば，$\bar{X}$ は條件 (⁂)$_3$ を滿足する。

證明。 本節の記法を踏襲する。(i), (ii), (iii) を滿足する $\{e^\alpha\}$ を X の單位 e に關する特性要素の集合にとることが出來る。X が K_6^- 型“正則”なる故かゝる $\{e^\alpha\}$ は高々可附番集合としてよい。$\bar{X}=\bigvee_\alpha \mathfrak{A}(h^\alpha)$ なる故，$\bar{X}$ は條件 (§) を滿足する。§1 補助定理 5 により，X は (⁂)$_3$ を滿足する。以上。

§3. 再歸的ベクトル束。

先づベクトル束 X が再歸的，即ち $X=\bar{\bar{X}}$ となる條件を求めやう。

定理 1. $X=\bar{\bar{X}}$ のための條件は，X が (α), $(\beta)_3$ を，$\bar{X}$ が (α) を滿足することである。

證明。 必要條件の證： $x \in X=\bar{\bar{X}}$, $f \in \bar{X}$ に對し，$f(x)=x(f)$ なる故，§1 補助定理 3 により，$\bar{X}$ は (α) を滿足する。$\bar{X}=\bar{\bar{\bar{X}}}$ から，$\bar{X}$ も (α) を滿足する。§1 補助定理 6 を使へば，X が $(\beta)_3$ を滿足することが判る。

充分條件の證： X は (α), $(\beta)_3$ 從て (※)$_1$, (α) を滿足する完全ベクトル束なる故，前節定理 2 が適用される。前節の記法を踏襲して，

---

(1) “正則”はベクトル束の正則性を表すために使用する。Banach 空間の正則性 (再歸性と同義) は單に正則で表すことにする。

$$(1)\qquad f(x)=\sum_{\alpha}\int_{\Omega\alpha}x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})\,m^{\alpha}(dE),\qquad x\in X,\qquad f\in X.$$

(1) から，$\nu^{\alpha}(E)(e^{\alpha})=m^{\alpha}(E)$, $E\subset\Omega_{\alpha}$ を得る。任意の $0\leqq\xi\in\overline{\overline{X}}$ をとる。$m_{\xi}^{\alpha}(E)=\xi\big(\nu^{\alpha}(E)\big)$, $E\subset\Omega_{\alpha}$ と置くと，Radon-Nikodym の定理を使つて，ξ に對し一意的に連續函數 $\xi(\mathfrak{p})$ が定まり，$f\in X$ に對し，

$$(2)\qquad m_{\xi}^{\alpha}(E)=\int_{E}\xi(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE),\qquad E\subset\Omega_{\alpha}$$

$$(3)\qquad \xi(f)=\sum_{\alpha}\int_{\Omega\alpha}f(\mathfrak{p})m_{\xi}^{\alpha}(dE)=\sum_{\alpha}\int_{\Omega\alpha}f(\mathfrak{p})\xi(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

を得る。Ω_{α} 上で $\xi(\mathfrak{p})$ と一致し，他に於て 0 となる連續函數を $\xi^{\alpha}(\mathfrak{p})$ とする。

$$\int_{\Omega\alpha}f(\mathfrak{p})\xi^{\alpha}(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

は X 上の正汎函數を定める。之を $\xi^{\alpha}\in\overline{\overline{X}}$ とすれば，明かに $\xi=\bigvee_{\alpha}\xi^{\alpha}$. すべての α に對し，$\xi^{\alpha}\in X$ を云へば，X が $(\beta)_3$ を滿足することから，$\xi\in X$ が得られる。$\min\big(\xi^{\alpha}(\mathfrak{p}),n\big)$ を表現函數とする X の要素を x_n とせば，$x_n(\mathfrak{p})=\min\big(\xi^{\alpha}(\mathfrak{p}),n\big)$。

然るに

$$f(x_n)=\int_{\Omega\alpha}f(\mathfrak{p})x_n(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

なる故，$\lim_{n}f(x_n)=\int_{\Omega\alpha}f(\mathfrak{p})\xi(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$ を得る。$(\beta)_3$ により，$\bigvee_{n}x_n\in X$. $x=\bigvee_{n}x_n$ とすると，$f(x)=\xi^{\alpha}(f)$ となり，$\xi\in X$ が判る。以上。

定理 2. X が $(\divideontimes)_1$ を滿足するとき，$X=\overline{\overline{X}}$ の條件は，X が (α_0), $(\beta_0)_1$ を，$\overline{X}$ が (α) を滿足することである。

證明。定理 1 及び §1 定理 9 から。 以上。

定理 3. X が (§), $(\divideontimes)_1$ を滿足するならば，$X=\overline{\overline{X}}$ の條件は，X が (α_0), $(\beta_0)_1$ を，$\overline{X}$ が (α_0) を滿足することである。

證明。定理 1 及び §1 定理4, 定理 9 から。 以上。

定理 4. X が (§) を滿足するならば，$X=\overline{\overline{X}}$ の條件は，X が (α), $(\beta)_1$ を $\overline{X}$ が (α_0) を滿足することである。

證明。定理 1 及び §1 定理 4 から。 以上。

定理 1 の證明法から次の諸定理の成立は明かである。

定理 5. X が $(※)_3$ を滿足すれば，X は $\widetilde{X}$ の正規部分空間にして，X の

すべての要素に直交する $\tilde{X}$ の要素は 0 以外に存在しない。

定理 6. $X=\tilde{\tilde{\tilde{X}}}$ の條件は, X が $(\beta)_3$ を滿足することとある。

定理 7. $X=\tilde{\tilde{X}}$ の條件は, X が (α), $(\beta)_1$ を滿足することである。

定理 8. X が再歸的ならば, X の任意の正規イデヤルも再歸的である。

定理 9. X を $(\text{※})_1$ を滿足するベクトル束とする。X を $\bar{\bar{X}}$ に埋藏するとき, X のすべての要素と直交する $\bar{\bar{X}}$ の要素は 0 以外に存在しないための條件は, $\bar{X}$ が (α) を滿足することである。

證明。必要條件の證: X の正要素の集合 $\{e^\alpha\}$ を

(i) $\alpha \neq \beta$ ならば, $e^\alpha \frown e^\beta = 0$

(ii) すべての α に對し, $e^\alpha \frown x = 0$ ならば $x=0$

が滿足される樣にとる。X を $\bar{\bar{X}}$ に埋藏するとき, 明かに (i) は成立つ。(ii) に就いても, x を $\bar{\bar{X}}$ の任意の正要素として成立つことが證明される。次に ξ を $\bar{\bar{X}}$ の任意の正要素とし, $\mathfrak{A}(e^\alpha)$ への ξ の射影を ξ^α とし, $\xi^\alpha_n = \xi^\alpha \frown ne^\alpha$ と置く。$\xi^\alpha_n(f)$ は Moore-Smith の (o)-連續である。然るに $\xi^\alpha(f)=\lim\limits_n \xi^\alpha_n(f)$ から $\xi^\alpha(f)$ も Moore-Smith の (o)-連續である。$\bigvee\limits_\alpha \xi^\alpha = \xi$ から, §1 定理 3 により, $\xi(f)$ も Moore-Smith の (o)-連續である。即ち $\bar{X}$ は (α) を滿足する。

充分條件の證: X を $\bar{\bar{X}}$ に埋藏する。$\bar{X}$ は $(\text{※})_1$, (α) を滿足するから, X の生成する $\bar{\bar{X}}$ に於ける正規イデヤルは, $X^{\text{※}\prime}=(0)'=\bar{\bar{X}}$ となる ($\bar{X}$ と $\bar{\bar{X}}$ に前節の所論を適用する)。故に X のすべての要素に直交する $\bar{\bar{X}}$ の要素は 0 以外には存在しない。　　　　以上。

定理 10. X と $\bar{X}$ とがベクトル束として同型にして, $x \in X$ に對應する $\bar{X}$ の要素を $\bar{x}$ と書くとき, $x \frown y = 0$ ならば $\bar{x}(y)=0$ を滿足するとする。このとき X は, $\bar{x}(y)$ を內積 (x, y) とする Hilbert 空間になる。

證明。$\bar{X}$ は條件 $(\text{※})_3$ を滿足する完全ベクトル束なる故, $\bar{X}$ と同型な X も同樣である。X の正規イデヤルに $x \to \bar{x}$ によつて生ずる $\bar{X}$ の正規イデヤルは, 前節の意味に於ける對應する正規イデヤルである。之を證明するには, 正要素 x y に對し $x \frown y = 0$ と $\bar{x}(y)=0$ とは同義なることを示せばよい。即ち, $\bar{x}(x)=0$ なる $x>0$ が存在しないことを云へばよい。$\bar{x}_0(x_0)=0$, $x_0>0$ とする。$x \in \mathfrak{A}(x_0)$ とせば, $\bar{x} \in \mathfrak{A}(\bar{x}_0)$. 故に汎函數の定義から, $\bar{x}(x_0)=0$. A を x_0 の直交要素全體の作る正規イデヤルとすれば, 本定理の假定から,

$x \in A$ ならば $\bar{x}(x_0)=0$. 任意の $x \in X$ は, $x=x_1+x_2$, $x_1 \in \mathfrak{A}(x_0)$, $x_2 \in A$ の形に書かれるから, $\bar{x}(x_0)=0$, 從て $x_0=0$ となり矛盾が起る。X の正要素の集合 $\{e^a\}$ を前定理の條件 (i), (ii) を滿足する樣にとる。$\{\bar{e}^a\}$ も條件 (i), (ii) を滿足し, $\mathfrak{A}(\bar{e}^a)$ は $\mathfrak{A}(e^a)$ に對應する正規イデヤルである。x は $\bar{X}$ 上の汎函數と考へて, Moore-Smith の (o)–連續なることに注意して, $\bar{X}$ の表現 $(\Omega_a, \bar{e}^a, \nu^a)$ から出發すれば, 前節と同樣にして[1]

(4) $$\bar{x}(y)=\sum_a\int_{\Omega a} x(\mathfrak{p})y(\mathfrak{p})m^a(dE)$$

の形に書かれることが判る。此處に $x(\mathfrak{p})$, $y(\mathfrak{p})$ は Ω 上の x, y の表現函數である。$m^a(E)$ は Ω_a 上の完全加法的測度にして $m^a(E)=0$ と E が第一種集合とは同義である。今 $(x, y)=\bar{x}(y)$ と書くと, (x, y) が內積の性質を持つことは, (4) 式から明かである。また,

(5) $$\sum_a\int_{\Omega a}\varphi(\mathfrak{p})^2 m^a(dE) < +\infty$$

なる連續函數 $\varphi(\mathfrak{p})$ をとれば, $\varphi(\mathfrak{p})$ は X のある要素の表現函數である。これは, $\varphi(\mathfrak{p}) \geqq 0$ として證明すれば充分である。(5) から $\varphi(\mathfrak{p})$ は高々可附番個の Ω_{a_n} 上を除いて Ω_a 上で 0 となる。x_n をその表現函數 $x_n(\mathfrak{p})$ が, $\sum_{i=1}^{n}\Omega_{a_i}$ 上で $\min\bigl(\varphi(\mathfrak{p}), n\bigr)$ に等しく, 他の點では 0 となる樣な X の正要素とする。任意の $0 \leqq y \in X$ に對し, (4) 式から

$$0 \leqq \bar{x}_n(y) \leqq \left\{\sum_a\int_{\Omega a}\varphi(\mathfrak{p})^2 m^a(dE)\right\}^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}}$$

故に $\bar{X}$ に於て $\bigvee_n \bar{x}_n$ が存在する。之を $\bar{x}$ とすれば, $x=\bigvee x_n$ なる故, $x(\mathfrak{p}) \equiv \varphi(\mathfrak{p})$. 故に X は $(x, y)=\bar{x}(y)$ を內積とする Hilbert 空間である。以上。

定理 11. X を單位 e をもつベクトル束とする。X が $\bar{X}$ とベクトル束として同型にして, $x \in X$ に對應する $\bar{X}$ の要素を $\bar{x}$ と書くとき, $x>0$ ならば, $\bar{x}(x)>0$ を滿足するものとする。このとき X は, $\bar{x}(y)$ を x, y の內積 (x, y) とする Hilbert 空間になる。

證明。$\bar{X}$ の表現 $(\Omega, \bar{e}, \nu)$ を考へ, $m(E)=\nu(E)(e)$, $m_x(E)=\nu(E)(x)$ と置けば, $\bar{y} \in \bar{X}$ の表現函數を $\bar{y}(\mathfrak{p})$ とすると,

(6) $$m_x(E)=\int_E x(\mathfrak{p})m(dE)$$

---

(1) 汎函數の積分表示による方法。本編第一章 §2, 53.

$$(7)\qquad \bar{y}(x)=\int_{\Omega}\bar{y}(\mathfrak{p})x(\mathfrak{p})m(dE)$$

なる連續函數 $x(\mathfrak{p})$ が x に對し一意に定まる。$x(\mathfrak{p})$ の全體による Ω の分離空間を Ω_0 とすれば，Ω_0 は $\mathfrak{p}_0^*=(\mathfrak{p};x(\mathfrak{p})=x(\mathfrak{p}_0),\ x\in X)$ の形に書かれる集合 $\mathfrak{p}_0^*$ を點とするビコムパクト Hausdorff 空間である。$x(\mathfrak{p})$ の全體は完全ベクトル束を作る。$x(\mathfrak{p}^*)=x(\mathfrak{p})$ と書く。X と $\bar{X}$ との同型から，Ω_0 と Ω は同位相になり，$\mathfrak{p}$ に對應する Ω_0 の點を $T\mathfrak{p}$ とすれば，$x(T\mathfrak{p})=\bar{x}(\mathfrak{p})$ が成立つ。今 $\mathfrak{p}\notin T\mathfrak{p}$ なる點 $\mathfrak{p}_0$ が存在するとせば，$\mathfrak{p}_0$ の適當な近傍 U をとれば，$\mathfrak{p}\in U$ ならば，$\mathfrak{p}\notin\sum(\mathfrak{p}_1^*;\mathfrak{p}_1\in U)$ となる。故に U 以外の點で 0 となる表現函數をもつ $0<\bar{x}\in\bar{X}$ を考へれば，$x(\mathfrak{p})\bar{x}(\mathfrak{p})=0.$ 故に $\bar{x}(x)=0$ となり矛盾が起る。故に $\mathfrak{p}\in T\mathfrak{p}$ が成立つ。T は位相的對應であるから，$T\mathfrak{p}$ は Ω の唯一點からなる集合である。故に $\Omega_0=\Omega$ にして T は $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ に對應させる恒等的變換に外ならない。故にすべての $x\in X$ に對し，$x(\mathfrak{p})\equiv\bar{x}(\mathfrak{p})$ となり，前定理と同樣にして結論に到達する。　　以上。

定理 12. X を單位をもつ K_6^- 型“正則”ベクトル束とする。$X=\bar{\bar{X}}$ なるための條件は，X が $(\beta_0)_1$, $\bar{X}$ が (α_0) を滿足することである。

證明。 定理 1, §1 定理 5 から。　　以上。

§4. 弱位相。

ベクトル束 X に弱位相を導入しやう。$(x;|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon\ \ i=1,2,\dots n)$ の形で書かれる X の部分集合を x_0 の近傍と定める。此處に $f_i\in\bar{X}$ とする。この近傍系により定義される位相を**弱位相**と云ふ。X が $(※)_1$ を滿足するとせば，X はこの位相化により Hausdorff 空間となる。X の部分集合 A が弱位相でビコムパクト，コムパクトなるに從つて，A は夫々**弱ビコムパクト**，**弱コムパクト**であると云ふ。X からの要素列 $\{x_n\}$ は，すべての $f\in\bar{X}$ に對し $\lim_n f(x_n)$ が有限確定のとき，**弱基本列**であると云ひ，$\lim_n f(x_n)=f(x_0)$ なる $x_0\in X$ が存在するとき，$\{x_n\}$ は x_0 に**弱收斂**すると云ふ。弱基本列が常に弱收斂する X は**弱完備**である云ふ。A からの要素列が常に弱收斂部分列を含むとき，A は**制限的列的弱コムパクト**であると云ひ，もし A の要素に弱收斂する部分列を含むならば，A は**列的弱コムパクト**であると云ふ。

定理 1. X を $(※)_1$ を滿足するベクトル束とする。X の任意の區間が弱ビコムパクトなるための條件は，X か (α) を滿足する完全ベクトル束なることである。

證明。必要條件の證：A を X の正要素の任意の集合とし，A の下端の存在を示す。A は二要素と共にその下端を含むとしてよい。各 $x\in A$ に對し，$(x';x'\leqq x, x'\in A)$ の弱位相での閉苞を $A(x)$ とする。有限個の $A(x)$ は常に共通要素をもつから，すべての $A(x)$ に共通な要素 x_0 が存在する。容易に判る様に，$0\leqq f\in\bar{X}$ に對し，$0\leqq f(x_0)\leqq f(x), x\in A$. 故に x_0 は A の下界である。x_1 を $x_1\geqq x_0$ なる A の下界とせば，$f\geqq 0$ のとき，$f(x_0)\leqq f(x_1)\leqq f(x)$, $x\in A$. 然る任意の正數 ε に對し，$f(x_0)\leqq f(x)\leqq f(x_0)+\varepsilon$ なる $x\in A$ が存在する故，$f(x_0)=f(x_1)$, 即ち $x_0=x_1$ を得る。故に x_0 は A の下端である。次に $x_\delta\downarrow 0$ とすれば，同論法で $f(x_\delta)\to 0$ が云へる。故に X は (α) を滿足する完全ベクトル束でをる。

充分條件の證：任意の $0<a\in X$ をとり，$A=(x;0\leqq x\leqq a, x\in X)$ と置く。各正要素 $f\in\bar{X}$ に實區間 $[0,f(a)]$ を對應させ，その直積を作ると，ビコムパクト Hausdorff 空間を得る。$x\in A$ にこの積空間の點 $\{f(x)\}$ を對應させ，かゝる點よりなる集合が閉ぢてゐることを示せばよい。ξ をこの集合の任意の集積點とし，$[0,f(a)]$ に於ける ξ の座標を $\xi(f)$ と定めると，ξ は $\bar{X}$ 上の正汎函數を決定する。之を同記號 ξ で示す。$0\leqq\xi(f)\leqq f(a)$ のため，$\xi(f)$ は Moore-Smith の (o)-連續になる。前節定 5 理により，$\xi\in A$. 故に A は弱ビコムパクトである。 以上。

定理 2. X が $(\ast)_1$ を滿足するならば，次の各條件は互に同義である。

(1°) X の任意の區間は列的弱コムパクトである。

(2°) X の任意の區間は弱コムパクトである。

(3°) X の任意の區間は弱ビコムパクトである。

(4°) X は (α_0) を滿足する σ-完全ベクトル束である。

(5°) X は (α) を滿足する完全ベクトル束である。

證明。(2°)→(4°) 前定理の必要條件の證明に準ず。

(4°)→(5°) §1 定理 7 から。

(5°)→(3°) 定理 1 から。

(3°)→(2°) 自明。

(5°)→(1°) $0<e\in X$ に對し，$A=(x;0\leqq x\leqq e, x\in X)$ と置き，A が列的弱コムパクトなることを示す。e は X の單位として一般性を失はない。$\bar{X}$ が單位 h をもつ場合から始める。§2 の記法を踏襲する。X,

$\bar{X}$ の表現, (Ω, e, μ), (Ω, h, ν) を考へると,

$$(1)\qquad f(x)=\int_{\Omega} x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m(dE).$$

$x\in A$ とせば, $0\leqq x(\mathfrak{p})\leqq 1$. $\{x_n\}$ を A からの任意の列とせば, 可積分函數空間の性質から, 部分列 $\{x_{i_n}\}$ と Ω 上の連續函數 $\xi(\mathfrak{p})$ が存在し, 有界な $f(\mathfrak{p})$ に對し,

$$(2)\qquad \lim_n f(x_n)=\int_{\Omega}\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m(dE).$$

$0\leqq\xi(\mathfrak{p})\leqq 1$ なる故, $\xi(\mathfrak{p})$ は A の要素 ξ の表現函數である。任意の $0\leqq f\in \bar{X}$ をとる。正數 ε に對し, 充分大な正數 M をとれば, $\int_{(\mathfrak{p};f(\mathfrak{p})>M)}f(\mathfrak{p})m(dE)<\varepsilon$. この性質を使つて, 容易に $\lim_n f(x_n)=f(\xi)$ を得る。$\bar{X}$ が單位を有しないときも, 同樣な論法で證明される。　　　以上。

定理 3. X が (α), $(\beta)_3$ を滿足するならば, X は弱完備である。

證明。$\{x_n\}$ を弱基本列とし, §2 の記法を踏襲して,

$$(2)\qquad f(x)=\sum_{\alpha}\int_{\Omega_\alpha}x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE).$$

E を Baire の性質をもつ, Ω の任意の部分集合とし, $f_E(x)$, $\xi_E(f)$ を次式で定義する。

$$(3)\qquad f_E(x)=\sum_{\alpha}\int_{\Omega_\alpha E}x(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

$$(4)\qquad \xi_E(f)=\lim_n f_E(x_n)$$

f 及び x を固定すれば, $f_E(x), \xi_E(f)$ は完全加法的集合函數である。可積分函數空間の弱完備性から, $f(\mathfrak{p})$ が Ω_α 上で有界ならば,

$$(5)\qquad \xi_{\Omega_\alpha E}(f)=\int_{\Omega_\alpha E}\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

となる Ω 上の連續函數 $\xi(\mathfrak{p})$ が一意的に定まる。任意の $f\in\bar{X}$ に對し, $\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})$ は Ω_α 上で可積分である。$f\geqq 0$, $\xi(\mathfrak{p})\geqq 0$, $\mathfrak{p}\in\Omega_\alpha$ として示せばよい。$E_n=(\mathfrak{p}; f(\mathfrak{p})<n)$ とせば, (5) から,

$$\xi_{\Omega_\alpha E_n}(f)=\int_{\Omega_\alpha E_n}\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

を得る故, $n\to+\infty$ とせば

$$(6)\qquad \xi_{\Omega_\alpha}(f)=\int_{\Omega_\alpha}\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^{\alpha}(dE)$$

となり, $\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})$ は Ω_α 上で可積分である。任意の f に對し (6) が成立つことが云へるから, $\xi_E(f)$ の完全加法性から, (6) 式を使つて

$$\xi_\Omega(f)=\sum_\alpha\int_{\Omega_\alpha}\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^\alpha(dE) \tag{7}$$

$$\xi_{\Omega E}(f)=\sum_\alpha\int_{\Omega_\alpha E}\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})m^\alpha(dE) \tag{8}$$

を得る。これから $\sum_\alpha\int_{\Omega_\alpha}|\xi(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p})|m^\alpha(dE)$ の收斂が判り, §2 定理 1 の證明に於ける最後の論法により, $\xi(\mathfrak{p})$ は X の要素の表現函數なることが判る。この要素を $\xi\in X$ で表すと, $f(x_n)\to f(\xi)$. 即ち X は弱完備である。

以上。

定理 4. X を條件 $(\divideontimes)_1$ を滿足するベクトル束とする。X が弱完備なるための條件は, X が條件 (α_0), $(\beta_0)_1$ を滿足することである。

證明。必要條件の證: $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$, 且すべての $0<f\in\bar{X}$ に對し, $\lim_n f(x_n)<+\infty$ とする。このとき $\{x_n\}$ は弱基本列となる故に, 假定により, $\{x_n\}$ は或要素 $x_0\in X$ に弱收斂する。容易に $x_0=\bigvee_n x_n$ が云へるから, X は條件 $(\beta_0)_1$ を滿足する。同樣にして, $x_n\downarrow 0$ とすれば, $f(x_n)\to 0$ が云へる。即ち X は條件 (α_0) を滿足する。

充分條件の證: 前定理 3 及び §1 定理 9 から。 以上。

定理 5. X を條件 $(※)_1$ を滿足する K_6^- 型 "正則" ベクトル束とする。[1] X の任意の區間は, 弱ビコムパクト且列的弱コムパクトである。尙次の條件

(1°) X は弱完備である。

(2°) X は條件 $(\beta_0)_1$ を滿足する。

は互に同義にして, この何れかが成立つとき, 次の (3°) が成立つ。

(3°) X の任意の主イデヤルは, K_6 型 "正則" である。

證明。§2 定理 6 によつて, X の主イデヤルは條件 $(\divideontimes)_3$ を滿足する。故に定理 2 を使へば, X の任意の區間は弱ビコムパクト且列的弱コムパクトである。X の K_6^- 型 "正則" 性を使へば, X の任意の可附番個の要素は, X の主イデヤルに含まれる。故に定理 4 によつて, (1°) と (2°) とは同義である。次に (2°)→(3°) を證明する。X が單位をもつとして證明すれば充分である。從て $0<f_n\in\bar{X}$ が存在し, $f_n(|x|)=0$ $n=1,2,3,\dots$ ならば

(1) Kantorovitch の意味の正則には "正則", Banach 空間の正則 (再歸的と同義) には單に正則と書く。

$x=0$ となる。今第一級及び第二級のすべての順序數に對し定義せられた正要素の增加超限列 $x_1<x_2<\cdots<x_\alpha<\cdots$ が存在するとせば，$f_n(x_\alpha)=f_n(x_{\alpha+1})=\cdots$, $n=1,2,3,\ldots$ なる順序數 α が存在し，$x_\alpha=x_{\alpha+1}=\cdots$ なることが云へる。從て矛盾か起る。次に $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq\cdots$ が任意の $\lambda_n\to 0$ なる正數列に對し，$\lambda_n x_n\to 0\ (o)$ なるに拘らず，$\{x_n\}$ は (o)-有界でないとする。$\lim\limits_n f(x_n)=+\infty$ なる $0<f\in\bar{X}$ が存在する。$\lambda_n=\dfrac{1}{1+f(x_n)}$ と選ぶと，$\lambda_n\to 0$, $\lim\limits_n f(\lambda_n x_n)=1$ となり，$\lambda_n x_n\to 0\ (o)$ に矛盾する。故に X は K_6 型"正則"である。[1] 從て (3°) が成立つ。 以上。

§5. Bochner 束

ベクトル束 X が次の條件を滿足するとき，X を **Bochner 束**と呼ぶ。即ち $0<f_n\in\bar{X}$ が存在し，$n=1,2,3,\ldots$ に對し

(1°) $x_m\downarrow 0$ ならば，$\lim\limits_m f_n(x_m)=0$

(2°) $o\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$ $\lim\limits_m f_n(x_m)<+\infty$ $n=1,2,3,\ldots$ ならば，$\bigvee\limits_m x_m$ が存在する。

この定義は，第二編第三章 §1 で與へた Bochner 束の定義を書き換へたに過ぎない。Bochner 束は，K_6 型"正則"ベクトル束である。[2] 定義により，Bochner 束は條件 (β_0) を滿足する。前節定理 5 を使つて

定理 1. Bochner 束は弱完備にして，任意の區間は弱ビコムパクト且列的弱コメパクトである。

が得られる。

以下再歸的 Bochner 束の構造を調べやう。Ω を完全ブール代數 A の表現ブール空間とする。Ω 上の有界連續函數全體の作るベクトル束を L とする。Ω の一點 $\mathfrak{p}$ をり，L 上の汎函數 $f_{\mathfrak{p}}(x)=x(\mathfrak{p})$ を定義する。$f_{\mathfrak{p}}(x)$ が (o)-連續のとき，即ち $x_n\downarrow 0$ のとき，常に $x_n(\mathfrak{p})\to 0$ となるならば，$\mathfrak{p}$ を**連續點**，然らざるときは**不連續點**と云ふ。$a\in A$ に對應する Ω の開且閉集合を $\mathfrak{E}(a)$ で表すと，

補助定理 1. $\mathfrak{p}_0$ が不連續點なるための條件は，$a_n\downarrow 0$, $\mathfrak{p}_0\in\prod\limits_1^\infty\mathfrak{E}(a_n)$ なる $a_n\in A$, $n=1,2,3,\ldots$ が存在することである。

證明。$\mathfrak{p}_0$ を不連續點とすれば，$x_n\downarrow 0$, $\lim\limits_n x_n(\mathfrak{p}_0)>\delta>0$ なる $x_n\in L$ と

(1) 本紀要，**12** (昭 18), 237 頁脚註 (4) 參照。
(2) 本紀要，**12** (昭 18) 243 頁 §3 に簡單な證明がある。

正數 δ が存在する。$x_n \downarrow 0$ は，第一種集合上を除いて $x_n(\mathfrak{p}) \downarrow 0$ と同義であるから，$\big(\mathfrak{p};\ x_n(\mathfrak{p}) > \delta\big)$ の閉苞を $\mathfrak{E}(a_n)$ と置くと，$a_n \downarrow 0$, $\mathfrak{p}_0 \in \prod_1^{\infty} \mathfrak{E}(a_n)$ となる。逆に $\mathfrak{p}_0$ に於てかゝる $a_n \in A$ が存在するとせば，$x_n(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{E}(a_n)$ の特性函數とすれば，$\mathfrak{p}_0$ が不連續點なることを示してゐる。 以上。

L を含む連續函數のベクトル束のうち，K_6^- 型“正則”なものが存在すれば，連續點と Ω の孤立點は同義になる。[1]

補助定理 2. Ω の各點が連續點ならば，A は有限ブール代數である。

證明。 $x \in L$ はノルム $\|x\| = \underset{\mathfrak{p}}{\mathrm{l.u.b.}} |x(\mathfrak{p})|$ により Banach 束となる。$x_n \downarrow 0$ とすれば，Ω の各點が連續點ならば，Dini の定理[2]により，$\|x_n\| \to 0$ となる。A が有限ブール代數でないとすれば，$a_n \frown a_m = 0$ $(n \neq m)$ なる $0 < a_n \in A$ が存在する。$x_n = \bigvee_{m \geqq n} a_m$ とすれば，$x_n \downarrow 0$ となる。然るに $\|x_n\| \geqq \|a_n\| = 1$ なる故 $\|x_n\| \to 0$ に反する。 以上。

補助定理 3. A が原子的要素[3]を含まないときは，不連續點は到る所稠密である。

證明。 前補助定理を使つて。 以上。

Bochner 束の定義に表れる f_n は $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$, $x \geqq 0$ として差支ない。何者，$\sum_1^n f_i$ を新に f_n とすればよいから。以下 f_n はこの假定を滿足するものとする。

補助定理 4. X が再歸的 Bochner 束ならば，X は廣義の列空間である。[4]

證明。 X が廣義の列空間でないとすれば，$0 < e \in X$ なる正要素 e が存在し，e に關する特性要素の作る完全ブール代數は原子的要素を含まない。これが矛盾を起すことを示すには，e を X の單位とし，且 $f_1(|x|) = 0$ ならば常に $x = 0$ となる場合に證明すればよい。X の表現 (Ω, e, μ) を考へ，$m(E) = f_1\big(\mu(E)\big)$ と置くと，

$$f_n(x) = \int_{\Omega} x(\mathfrak{p}) f_n(\mathfrak{p}) m(dE) \tag{1}$$

(1) 拙著： 本紀要，**12** (昭 18), 217–234. §5.

(2) A. D. Alexandroff: Recueil Math., **50** (1940), 307–348, 326, 定理 8.

(3) $a \in A$ が原子的であるとは，$a > 0$ にして，$a \geqq b$ なる $b \in A$ は，a 又は 0 に限ることである。

(4) X が廣義の列空間であるとは，互に直交する $\{e^{\alpha}\}$ が存在し，任意の $x \in \mathrm{X}$ は，$x = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e^{\alpha}$ と書かれることである。但し此處に高々可附番個の λ_{α} のみ 0 でないとする。 拙著：本紀要，**12** (昭 18) 參照。

と書かれる連續函數 $f_n(\mathfrak{p})$ が存在し, $1 \leqq f_n(\mathfrak{p}) \leqq f_{n+1}(\mathfrak{p})$ となる。可積分函數空間の性質から, 連續函數 $\varphi(\mathfrak{p})$ が存在し, 各 $f_n(\mathfrak{p})$ に對し, $f_n(\mathfrak{p}) \leqq \lambda_n \varphi(\mathfrak{p})$ なる正數 λ_n が存在する。故に $\mathfrak{p}_0$ に於てすべての $f_n(\mathfrak{p})$ が有限値をとる様な $\mathfrak{p}_0 \in \Omega$ が存在する。任意の $f \in \bar{X}$ をとると,

$$f(x) = \int_\Omega x(\mathfrak{p}) f(\mathfrak{p}) m(dE) \tag{2}$$

の形に書かれる連續函數 $f(\mathfrak{p})$ が存在する。本編第二章 §3 補助定理 2 を使へば, $|f(\mathfrak{p})| \leqq \dfrac{1}{\delta} f_n(\mathfrak{p})$ なる正數 δ と f_n が存在する。逆にかゝる $f(\mathfrak{p})$ によつて (2) 式で定義される $f(x)$ は $f \in \bar{X}$ である。X は K_6^- 型 “正則” なる故に, $\mathfrak{p}_0$ は不連續點である。$\xi(f) = f(\mathfrak{p}_0)$, $f \in \bar{X}$ とすれば, $\xi(f)$ は $\bar{X}$ 上の汎函數であるが (o)-連續でない。從て §3 定理 1 に矛盾する。 以上。

補助定理 5. X が再歸的 Bochner 束ならば, X は有限次元か列空間である。

證明。 補助定理 4 により X は廣義の列空間であるから, X の正要素 $e^\alpha > 0$ の集合 $\{e^\alpha\}$ を次の (i)–(iv) を滿足する様にとる。

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき $e^\alpha \frown e^\beta = 0$

(ii) すべての e^α に對し, $e^\alpha \frown x = 0$ ならば, $x = 0$

(iii) 任意の $x \in X$ は, $x = \sum_\alpha \lambda_\alpha e^\alpha$ (但高々可附番個の λ_α のみ 0 でない) と書ける。

(iv) $f_n(x) = \sum \lambda_\alpha c_\alpha^{(n)}$, $c_\alpha^{(n+1)} \geqq c_\alpha^{(n)}$, $c_\alpha^{(1)}$ は 0 又は 1.

今 $(\alpha; c_\alpha^{(1)} \neq 0)$ が非可附番集合とすれば, $\alpha_n \in (\alpha; c_\alpha^{(1)} \neq 0)$ を, 各 $\left(\dfrac{c_{\alpha_n}^{(m+1)}}{c_{\alpha_n}^{(m)}}; n = n = 1, 2, \dots\right)$ が有界なる様にとることが出來る。[1] 故に $(e^{\alpha_n}; n = 1, 2, \dots)$ の生成する主イデヤルは (l) 空間と線形-束-同型になり, (l) が再歸的となり矛盾が起る。同様にして $(\alpha; c_\alpha^{(2)} \neq 0), \cdots (\alpha; c_\alpha^{(n)} \neq 0)$ は何れも高々可附番になることが證明される。故に X は有限次元か列空間である。 以上。

補助定理 6. Bochner 束 X が列空間にして, $x \in X$ 及び f_n に對し,

(1°) $x = \sum_1^\infty \lambda_n e_n$, 但し $e_n \frown e_m = 0$, $(n \neq m)$, $e_n > 0$

---

(1) 正數 M_1 を充分大にとれば, $\mathrm{I}_1 = \left(\alpha; \dfrac{c_\alpha^{(2)}}{c_\alpha^{(1)}} \leqq M_1, c_\alpha^{(1)} \neq 0\right)$ は非可附番となる。非可附番集合 I_{m-1} が定義されたとと, I_m を, M_n を充分大にとり $I_m = \left(\alpha; \dfrac{c_\alpha^{(m+1)}}{c_\alpha^{(m)}}, \alpha \in I_{m-1}\right)$ が非可附番となる様に定める。互に異なる a_n, $n = 1, 2, \dots$ を $a_n \in I_n$ なる様にとればよい。

(2°) $f_n(x)=\sum_1^\infty \lambda_m c_m^{(n)}$, $c_m^{(n+1)} \geqq c_m^{(n)} \geqq 0$, $m, n=1, 2, 3, \dots$ とする。

X が再歸的なるための條件は，如何に $m_1 < m_2 < \cdots$ をとるとき

(3°) $c_{m_p}^{(n_0)} > 0$, $p=1, 2, 3, \dots$

(4°) $\left(\dfrac{c_{m_p}^{(n+1)}}{c_{m_p}^{(n)}}\ ;\ p=1, 2, 3, \dots\right)$ は $n \geqq n_0$ ならば有界である。

が同時に成立つ自然數 n_0 が存在しないことである。

證明。必要條件の證：X を再歸的とする。(3°), (4°) が成立つ n_0 が存在するとせば，$(e_{m_p}; p=1, 2, \dots)$ の生成する主イデヤルは (l) 空間と考へられるから，(l) が再歸的となり矛盾が起る。

充分條件の證：f_n に關して (o)-有界な $\bar{X}$ の要素の全體を $\bar{X}_n$ とすれば，$\bar{X}_n$ は有限次元か (m) 空間に線形-束-同形であつて，$\bar{X}=\sum_1^\infty \bar{X}_n$ となる。ξ を $\bar{X}$ 上の正汎函數とする。§3 定理 3 により，ξ が (o)-連續なることを示せばよい。即ち各 $\bar{X}_n$ に於て ξ が (o)-連續なることを云へばよい。$\bar{X}_n$ が有限次元ならば，ξ の (o)-連續は自明なる故に，$\bar{X}_n$ が有限次元でないときを考へる。$n=1$, $c_m^{(1)}=1$, $m=1, 2, \dots$ と假定して證明を進めて一般性を失はない。X の表現ブール空間を Ω とし，f_1 が恒等的 1 となる樣 $\bar{X}$ を連續函數のベクトル束で同型表現する。X は單位をもつ K_6^- 型 "正則" なる故に，Ω の連續點と弧立點は一致する。Ω の不連續點全體からなる集合を Ω' とすれば，Ω' は Ω の非稠密な閉部分集合にして，それ自身ブール空間にして，$\Omega-\Omega'$ は可附番である。その點を $1, 2, 3, \dots$ で表せば，m に於ける x, f_n の表現函數の値は λ_m, $c_m^{(n)}$ である。$\mathfrak{p} \in \Omega'$ に於ける x, f_n の表現函數の値を $x(\mathfrak{p}), f_n(\mathfrak{p})$ で表すと，條件 (4°) により，$E_n=\left(\mathfrak{p}\,;\, f_n(\mathfrak{p})=+\infty,\ \mathfrak{p} \in \Omega'\right)$ と置けば，E_n は閉集合にして，$\Omega'=\sum_1^\infty E_n$ となる。ξ は $\bar{X}_1$ 上で正汎函數を表す故に，第二編第四章 §1 の所論により，Ω 上に正則な測度函數 $m_\xi(E)$ が定まり，$\xi(f)=\sum_1^\infty c_m \mu_m+\int_{\Omega'} f(\mathfrak{p}) m_\xi(dE)$ と書かれる。但し c_m は m に於ける f の表現函數の値である。$m_\xi(\Omega')=0$ なることを示せば，$\xi(f)$ は $\bar{X}_1$ で (o)-連續になる。$m_\xi(\Omega') > 0$ とすれば，$m_\xi(E_n) > 0$ なる n が存在する。今 $g_j=f_n \frown jf_1$, $j=1, 2, \dots$ と置けば，

$$\xi(f_n) \geqq \xi(g_j) \geqq j m_\xi(E_n), \qquad j=1, 2, 3, \dots$$

となる故に $\xi(f_n)=+\infty$ となり矛盾が起る。 以上。

定理 2. Bochner 束 X が再歸的なるための條件は，X が有限次元か或は列空間にして，f_n に對して補助定理 6 の條件が成立つことである。

證明。以上の補助定理から。 以上。

本定理により再歸的 Bochner 束の種々の例を與へることが出來る。例へば (s) 空間は其の一例である。尙 (s)-空間は環束として特性づけられる，即ち

定理 3. 單位 e をもつ Bochner 束が e を積單位とする環束を作るならば，有限次元であるか (s)-空間である。

證明。Bochner 束 X が單位 e を積單位とするならば，X は有限次元であるか列空間である。[1] X は列空間であるとし，補助定理 6 及びその證明中の記法を踏襲する。各 n に就いて，f_n に關して (o)-有界な汎函數の全體 $\bar{X}_n$ が有限次元なることを示せば充分である。今或 $\bar{X}_n$ が有限次元でないとし矛盾の起ることを示す。このためには，$n=1$，$c_m^{(1)}\neq 0$，$m=1,2,\ldots$ としてよい。e が $(1,1,1,\ldots)$ となる様な X の表現を考へると，すべての n に對して，$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(n)}<+\infty$．$X$ が環束を作るから，任意の $x=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)\in X$ に對し，$\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|^p c_m^{(p)}<+\infty$．$p=1,2,3,\ldots$．$\|x\|_p=\{\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|^p c_m^{(p)}\}^{\frac{1}{p}}$ と置くと，$\|x\|_p\leqq \gamma_p\|x\|_{p+1}$ なる正數 γ_p の存在が容易に判る。X は $\|x\|_p<+\infty$，$p=1,2,\ldots$ なる $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ の全體と考へられる。之から X は次章 §3 の (K_∞) を滿足するベクトル束になる。$\bar{X}$ は p が充分大なるとき常に $\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|^{\frac{p}{p-1}} c_m^{(p)}<+\infty$，なる $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ の全體からなる。次章 §3 定理 3 を使つて，$\bar{X}$ は "正則" でないから，$\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|^2 c_m^{(p)}<+\infty$，$p=1,2,3,\ldots$ が成立しない X の要素 $x=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ が存在しなければならないことになり矛盾が起る。 以上。

定理 4. X を Bochner 束とすれば，$\bar{\bar{X}}$ も Bochner 束である。

證明。f_n に關して (o)-有界な X 上の汎函數の全體を $\bar{X}_n$ とすれば，$\bar{X}_n\leqq\bar{X}_{n+1}$ にして，$\bar{X}=\sum_1^{\infty}\bar{X}_n$ である。$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}(f_1)$，$\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}(f_n)\frown\mathfrak{A}(f_{n-1})'$ とする。[2] $\bar{\bar{X}}$ は $\mathfrak{A}_n$ の直和であつて任意の $f\in\bar{\bar{X}}$ は，高々有限個の $\mathfrak{A}_n$ への射影のみが 0 でない。$\mathfrak{A}_p$ 上では，$\bar{X}_n$ の共軛ベクトル束は抽象 L 空間にして，それらの共通集合が，$\mathfrak{A}_p$ 上での X の共軛ベクトル束である。これから $\bar{\bar{X}}$ が Bochner 束になることが容易に確められる。 以上。

---

(1) 本紀要，**12**（昭 18），246 頁，補題 3.

(2) $\mathfrak{A}'$ は $\mathfrak{A}$ の各要素と直交する要素の全體からなる正規イデヤルを表す。

第二章 Kantorovitch 空間

§1. K^--空間。

ベクトル束 X の各要素 x に實數 $\|x\|$ が對應し，條件

(i) $\|x\| \geqq 0$, $x=0$ のときに限り $\|x\|=0$

(ii) $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$, 但し λ は實數

(iii) $|x| \leqq |y|$ ならば，$\|x\| \leqq \|y\|$

を滿足するとする。X がノルム $\|x\|$ に關して完備ならば，X を Banach 束と呼ぶ。X が條件

(K^-) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots \geqq 0$ ならば，$\{x_n\}$ は强收斂する。

を滿足するならば，X は，明かに σ-完全ベクトル束にして次の條件

(iv) $x_n \downarrow 0$ ならば，$\|x_n\| \to 0$

を滿足する。逆に X が (iv) を滿足する σ-完全ベクトル束ならば，X は (K^-) を滿足する。(K^-) を滿足する Banach 束を **K^--空間**と云ふ。(1) K^--空間と K_6^- 型 "正則" な Banach 束とは同義である。(2) (K^-) を滿足する X は，ノルムによる完備化により K^--空間になり(3)，X の區間は，この完備化で影響を受けない。故に X は

$(K^-)_\delta$ A を二要素と共に其の下端を含む正要素の任意の集合とせば，A を有個集合と考へて，A は Moore-Smith の意味で强收斂する。

從て

$(\mathrm{iv})_\delta$ $x_\delta \downarrow 0$ ならば，$\|x_\delta\| \to 0$.

を滿足する。

Banach 束に於ては，(o)-有界線形汎函數と有界線形汎函數と同義である。以下之を單に**汎函數**と呼ぶ。

定理 1. X を K^--空間とすれば，X の主イデヤルに對應する(4) $\bar{X}$ の正規イデヤルは主イデヤルである。從て X が單位をもつならば，$\bar{X}$ も單位をもつ。

---

(1) 本紀要, **12** (昭 18), 241 頁 §2.

(2) 本紀要, 同上 §2 定理 2.

(3) 本紀要, 同上 §2 定理 3. 單位のない場合も本定理は成立つ。 (證) X の完備化を X_1 とする。$0 \leqq x \leqq x_0$, $x_0 \in X$, $x \in X_1$ ならば，$x \in X$ が成立つ。$x_n \geqq x_{n+1} \geqq 0$, $x_n \in X_1$ なる $\{x_n\}$ を考へ，正數 ε に對し，$\rho(x_1-x_1') < \varepsilon$ なる $0 \leqq x_1' \in X$ をとり，$x_n' = x_1' \frown x_n$ と置くと，$x_n' \in X$, $\rho(x_n - x_n') \leqq \rho(x_1 - x_1') < \varepsilon$. $\{x_n'\}$ は基本列を作るから，$\{x_n\}$ も基本列を作る。故に $\{x_n\}$ は强收斂する。

(4) 第一章 §2, 52 參照。

證明。 $A=\mathfrak{A}(e)$ を X の主イデヤルとし，之に對應する $\bar{X}$ の正規イデヤルを B とする。$B=\bigvee_{\alpha}\mathfrak{A}(h^{\alpha})$ の形に書く。此處に $\alpha\neq\beta$ のとき $h^{\alpha}\frown h^{\beta}=0$, $\mathfrak{A}(h^{\alpha})$ に對應する A の部分正規イデヤルは，A が主イデヤルなる故，主イデヤルである。之を $\mathfrak{A}(e^{\alpha})$ と置く。此處に e^{α} を e に關する特性要素にとれば，$\alpha\neq\beta$ のとき $e^{\alpha}\frown e^{\beta}=0$. X は"正則"であるから，0 でない e^{α} は高々可附番である。之を e^{α_n}, $n=1,2,\dots$ とし，正數列 $\{\lambda_n\}$ を $\sum_{n}\lambda_n h^{\alpha_n}$ が强收斂する様にとり，この和を h とすれば，$B=\mathfrak{A}(h)$ となり，B は主イデヤルである。　以上。

定理 2. Banach 束に於て次の條件は互に同義である。

(1°) (K^-)

(2°) (K^-) に於て强收斂に弱收斂で置き換へたもの

(3°) 如何なる汎函數も (o)-連續となる σ-完全ベクトル束である

(4°) $(K^-)_{\delta}$

(5°) $(K^-)_{\delta}$ に於て强收斂を弱收斂で置き換へたもの。

(6°) 如何なる汎函數も Moore-Smith の (o)-連續となる完全ベクトル束である。

(7°) K_6^- 型"正則"ベクトル束である。

(8°) 任意の區間は弱ビコムパクトである。

(9°) 任意の區間は弱コムパクトである。

(10°) 任意の區間は列的弱コムパクトである。

證明。 (1°)→(2°)→(3°), (4°)→(5°)→(6°), (1°)→(7°)→(4°)→(1°), (8°)→(9°), (10°)→(9°) は自明。

(3°)→(1°) $\bar{X}$ の單位球 Γ は X による弱位相でビコムパクト Hausdorff 空間である。Γ に屬する正要素の全體を Γ_0 とすれば，Γ_0 もビコムパクトである。$x_1\geqq x_2>\cdots>0$ とすれば，$x_0=\bigwedge_{n}x_n$ と置くと，$f(x_n)\to f(x_0)$, $f(x_n)$ を x_n を固定し，f を Γ_0 上で變化させれば，Γ_0 上の連續函數である。Dini の定理[1] を使つて，$f(x_n)-f(x_0)=f(x_n-x_0)$ は Γ_0 上で一様に 0 に收斂する。然るに $\|x_n-x_0\|=\underset{f\in\Gamma_0}{\mathrm{l.u.b.}}f(x_n-x_0)$ なる故に，$\{x_n\}$ は强收斂する。

(6°)→(4°)　　(3°)→(1°) の證明に準ず。

(1) A. D. Alexandroff: Recueil Math., **50**. (1940), 307-348. 定理 8.

$(7^\circ) \to (8^\circ)$ 前定理及び第一章 §4 定理 2 から

$(9^\circ) \to (3^\circ)$ 第一章 §4 定理 1 の證明法による。

$(7^\circ) \to (10^\circ)$ 前定理及び第一章 §4 定理 2 から。 以上。

定理 3. 單位をもつ K^--空間は，必要あらば，ノルムの變更により，(iii) を

(iii)′ $|x|<|y|$ をなら，$\|x\|<\|y\|$

で置き換へることが出來る。

證明。定理 1 を使つて，共軛空間の單位を h とする。必要あらば，ノルム $\|x\|$ の代りに，新に $\|x\|+h(|x|)$ をノルムと定めればよい。 以上。

定理 4. 可分 Banach 束は，(iv) が成立つとき K^--空間になる。

證明。X を (iv) を滿足する可分 Banach 束とする。X が K^--空間なることを示すには，X が完全ベクトル束であることを云へばよい。X_1 を切斷による X の完全化とし，ξ を X_1 の任意の要素とする。$A=(x;\ x\leqq\xi,\ x\in X)$, $B=(y;\ y\geqq\xi,\ y\in X)$ と置くと，$\wedge(y-x;\ x\in A,\ y\in B)=0$. A, B は可分であるから，容易に $y_n-x_n\downarrow 0$, $x_1\leqq x_2\leqq\cdots$, $y_1\geqq y_2\geqq\cdots$ なる $x_n\in A$, $y_n\in B$ が存在する。$\|x_n-x_{n+p}\|\leqq\|y_n-x_n\|\to 0$. $\{x_n\}$ の强收斂極限は ξ に外ならない。故に $X_1=X$ 即ち X は完全ベクトル束である。

定理 5. $(\text{iv})_\delta$ を滿足する Banach 束は K^--空間である。

證明。定理 4 の證明法から。 以上。

定理 6. K^--空間に於て可分部分集合の張る部分 Banach 束は K^--空間である。

證明。殆ど自明。 以上。

定理 7. X が單位をもつ K^--空間の共軛 Banach 束ならば，X は完全ベクトル束にして，次の條件を滿足する。

(1°) 正要素の任意の集合 A に對し，高々可附番部分集合 A_0 が存在し，A が (o)-有界ならば，A と A_0 は同じ上端をもち，A が (o)-有界でなければ，A_0 も (o)-有界でない。

(2°) $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$, $\{\|x_n\|\}$ が有界ならば，$\bigvee_n x_n$ が存在する。

證明。(1°) は第一章 §1 定理 4 と同様な方法で證明される。

(2°) は共軛 Banach 束に對し常に成立つ性質である。 以上。

(注意) $(1^\circ), (2^\circ)$ から次の性質が存在する。X の部分集合 A は，$\lambda_n\to 0$

なる任意の正數列 $\{\lambda_n\}$ に對し, $\{\lambda_n x_n\}$, $x_n \in A$, が常に (o)-收斂するならば, (o)-有界である。

次節に述べる K-空間に屬しない K^--空間の一例として, 0 に收斂する數列全體からなる (c_0)-空間を擧げることが出來る。

K^--空間とその共軛 Banach 束は, 第一章 §2 の所論から, 同じ表現ブール空間をもつ。この性間は後で使ふ。

§2. *K*-空間。

X を前節の條件 (i), (ii), (iii) を滿足するベクトル束とする。次の條件

(K) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\{\|x_n\|\}$ が有界ならば, $\{x_n\}$ は强收斂する。

は, 明かに次の二條件が同時に成立つことと同義である。

(iv) $x_n \downarrow 0$ ならば, $\|x_n\| \to 0$

(v) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\{\|x_n\|\}$ が有界ならば, $\bigvee_n x_n$ が存在する。

(i) (ii) (iii) (iv) (v) を滿足するベクトル束を ***K*-空間** (Kantorovitch 空間) と稱した[1] K-空間は K_6 型 "正則" な Banach 束と同義である[2] 故に條件 (K) と次の條件

$(K)_\delta$ A を二要素と共にその上端を含む正要素の集合とする。A がノルムで有界ならば, 有向集合と解して, A は Moore-Smith の意味で强收斂する。

とは同義である。K-空間は勿論 K^--空間である。前節定理 2 と同樣にして, (K) 及び $(K)_\delta$ に於て强收斂と弱收斂とを置き換へても同義な條件を得る。K-空間を Banach 空間論的に特性づければ, 弱完備 Banach 束と云ふことが出來る[3]

(iii) の代りに, 前節の條件 (iii)′ を滿足する K-空間を Kantorovitch に從つて B_2 型空間[4] と呼ぶと,

定理 1. 單位をもつ K-空間は, 必要あらばノルムの變更により, B_2 型空間になる。

證明。 前節定理 3 の證明法による。 以上。

(1) 第二編, 第二章 §1.

(2) 本紀要, **12** (昭 18) 241 頁 §2.

(3) 第二編第二章 §1 定理 2. (證明は本編第一章 §3 定理 3 或はその證明法に從へば簡單になる)。

(4) L. Kantorovitch: Recueil Math. **44** (1937), 121–165. §9 參照。

定理 2. Banach 束に於て次の條件は互に同義である。

(1°) Banach 空間として正則 (再歸的の意) である。

(2°) 共軛 Banach 束と共に K-空間である。

(3°) 局所弱ビコムパクトである。

(4°) 局所弱コムパクトである。

(5°) 局所列的弱コムパクトである。[1]

證明。 (1°), (2°), (3°), (5°) の同義は既に證明した[2] (4°)→(2°) を示せば充分である。X を局所弱コムパクト Banach 束とする。$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$ $\|x_n\| \leqq c,\ n=1,2,\ldots$ とすれば，$\{x_n\}$ の弱集積點 x_0 が存存する。$0 \leqq f \in \bar{X}$ に對し，$\lim\limits_n f(x_n)=f(x_0)$ 從て任意の $f \in \bar{X}$ に對しこの等式が成立つ。故に $\{x_n\}$ は弱收斂する。從て X は K-空間である。次に X の單位球のうち正要素の全體を Γ_0 とすれば，Γ_0 は $\bar{X}$ による弱位相により弱コムパクトである。前節定理 2 (3°)→(1°) の證明同樣 Dini の定理を使つて $\bar{X}$ が條件 (K) を滿足すること，即ち $\bar{X}$ が K-空間になることが云へる。 以上。

定理 3. X が K-空間なるための條件は，X が $\bar{X}$ の (o)-連續汎函數の全體からなることである。

證明。 必要條件の證： 第一章 §3 定理 7 から。

充分條件の證： $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots,\ \|x_n\| \leqq c,\ n=1,2,3,\ldots$ とすれば，$0 \leqq f \in \bar{X}$ に對し，$0 \leqq f(x_n) \leqq c\|f\|$ なる故，$\lim\limits_n f(x_n)$ が存在する。從て任意の f に對し，$\lim\limits_n fx_n)$ は有限確定である。之を $\xi(f)$ とすれば，$\xi \in \bar{\bar{X}}$. 第一章 §1 定理 3 を使つて，$\xi \in X$. 故に X は K-空間になる。 以上。

補助定理 1. 共軛 Banach 束に於ては，K-空間と K^--空間とは同義である。

證明。 共軛 Banach 束は條件 (v) を滿足するから。 以上。

定理 4. Banach 束 X の共軛 Banach 束 $\bar{X}$ が K-空間になるための條件は，X を $\bar{\bar{X}}$ に埋藏するとき，X のすべての要素と直交する $\bar{\bar{X}}$ の要素は 0 以外に存在しないことである。

證明。 第一章 §3 定理 9 から。 以上。

定理 5. Banach 束 X に於て，ノルムで有界な要素列から常に弱基本列を取出し得るとき，$\bar{X}$ は K-空間である。

---

(1) 第二編第二章 §3 定理 3 に於ける局所弱コムパクトは，局所列的弱コムパクトの意である。

(2) 第二編第二章 §3 參照。

證明。 $f_n \downarrow 0$. $f_n \in \bar{X}$ とする。$\|f_n\| \to 0$ でないとすれば，$\|f_n\| > \delta > 0$, $n=1,2,\dots$ なる正数 δ が存在する。$f_n(x_n) > \delta > 0$, $x_n > 0$, $\|x_n\|=1$ なる X からの列 $\{x_n\}$ が存在する。$\{x_n\}$ は弱基本列を作るとして差支ない。$\xi(f) = \lim\limits_n f(x_n)$ と定義する。$\xi(f)$ が (o)-連續なることが判れば，$\xi(f_n) \geqq \delta$. $n \to \infty$ として $\lim\limits_n \xi(f_n) = 0 \geqq \delta$ となり矛盾が起る。以下 $\xi(f)$ の (o)-連續の證明。X は Banach 束であるから，各 x_n が e に關して有界となる X の正要素 e が存在する。$f_n \to 0\,(o)$ とし，$|f_n| < h$ なる正要素 $h \in \bar{X}$ をとり，h に關して有界な $\bar{X}$ の要素の全體を $\bar{X}_h$ とする。$\bar{X}_h$ の表現 (Ω, h, ν) を考へ，$m(E) = \nu(E)(e)$, $m_{x_n}(E) = \nu(E)(x_n)$ と置けば，$m(E)$ は完全加法的，$m_{x_n}(E)$ は $m(E)$ に關して絕對連續である。$f \in \bar{X}_h$ の表現函數を $f(\mathfrak{p})$ と置くと，

$$m_{x_n}(E) = \int_E x_n(\mathfrak{p}) m(dE) \tag{1}$$

$$f(x_n) = \int_\Omega x_n(\mathfrak{p}) f(\mathfrak{p}) m(dE), \qquad f \in \bar{X}_h \tag{2}$$

なる有界な連續函數 $x_n(\mathfrak{p})$ の存在が判る。すべての $f \in \bar{X}_h$ に對し，$\lim\limits_n f(x_n) = \xi(f)$ となる故に，L-空間の弱完備から，

$$\xi(f) = \int_\Omega \xi(\mathfrak{p}) f(\mathfrak{p}) m(dE)$$

なる連續函數 $\xi(\mathfrak{p})$ が存在する。この式から，$f_n \to 0\,(o)$ とせば，$\xi(f_n) \to 0$ が容易に判る。　　以上。

定理 6. Banach 束 X に於て，$\bar{\bar{X}}$ の任意の要素が X の要素列の弱極限（$\bar{X}$ の弱位相による）として表されるとき，$\bar{X}$ は K-空間である。

證明。 前定理と同じ考へ方で $\{x_n\}$ を作り，ξ として $\{x_n\}$ の弱集積點（$\bar{X}$ の弱位相で）の一つとすればよい。

定理 7. X を Banach 束とする。$\bar{X}$ が K-空間なるための條件は，$\bar{X}$ の可分部分 Banach 束が $\bar{X}$ の σ-完全部分ベクトル束となることである。

證明。 $\{f_n\}$ を含む可分 Banach 束を考へ定理 5 の證明法を少し修正すれば得られる。　　以上。

定理 8. 可分共軛 Banach 束は K-空間である。

證明。 $\bar{X}$ が可分な Banach 束 X は定理 5 の假設を滿足するから。

以上。

定理 9. $\overline{\overline{X}}$ が可分な Banach 束 X は Banach 空間として正則である。

證明。 $\overline{\overline{X}}$ が可分なる故，$\overline{X}$ も可分である。前定理により，$\overline{X}, \overline{\overline{X}}$ は共に K-空間になる。從て $\overline{X}$ は正則，故に X は正則である。 以上。

定理 10. X と $\overline{X}$ が Banach 束として同型な可分 Banach 束 X は正則である。

證明。 定理 9 から。 以上。

定理 11. X をその共軛 Banach 束とが Banach 束として同型にして，$x \in X$ に對應する $\overline{X}$ の要素を $\bar{x}$ と書くとき，$x \frown y=0$ ならば $\bar{x}(y)=0$ を滿足するならば，X は Hilbert 空間にして，x, y の內積 (x, y) 及び x のノルム $\|x\|$ は夫々，$\bar{x}(y)$, $\sqrt{\bar{x}(x)}$ で與へられる。

證明。 第一章 §3 定理 10 により，$\|x\|^2=(x, x)$ を示せばよい。$|x, y)|=|\bar{x}(y)| \leqq \|\bar{x}\|\|y\|=\|x\|\|y\|$. 從て $(x, x) \leqq \|x\|^2$. 一方 $\|x\|=\bar{y}(x)$, $\|y\|=1$ なる $y \in X$ を考へる。$\bar{y}(x)=(y, x) \leqq (y, y)^{\frac{1}{2}}(x, x)^{\frac{1}{2}} \leqq \|y\|(x, x)^{\frac{1}{2}}$ 從て $\|x\| \leqq (x, x)^{\frac{1}{2}}$ 故に $\|x\|^2=(x, x)$. 以上。

定理 12. (i)–(iv) を滿足する σ-完全ベクトル束がノルムによる完備化により K-空間になる條件は，$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim\limits_n \|x_n\| < +\infty$ ならば，$\lim\limits_{n, m}\|x_n - x_m\|=0$ を滿足することである。

證明。 必要條件であることは，K-空間の定義から明かである。充分條件であることを示す。X を (i)–(iv) を滿足する σ-完全ベクトル束にして本定理の條件をも滿足するとする。X の完備化を X_1 とすると，X_1 は K^--空間である。[1] 今 $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim\limits_n \|x_n\| < +\infty$ なる X_1 からの要素列 $\{x_n\}$ を考へると，$\|x_n - x'_n\| < \dfrac{1}{n}$, $0 \leqq x'_n \leqq x'_{n+1}$ なる X からの要素列の存在が容易に判る。[2] $\lim\limits_{n, m}\|x'_n - x'_m\|=0$ から，$x=\lim\limits_n x'_n$ なる $x \in X_1$ が存在する。明かに $\{x_n\}$ は x に强收斂する。故に X_1 は K-空間である。

§3. 條件 (K_∞)

ベクトル束の各要素 x に實數 $\|x\|_p$, $p=1, 2, 3$, が對應し

(i) $\|x\|_p \geqq 0$, $x=0$ のときに限り，$\|x\|_p=0$, $p=1, 2, 3, \ldots$

(ii) $\|x+y\|_p \leqq \|x\|_p + \|y\|_p$, $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$, λ は實數

---

(1) 本紀要，**12** (昭 18) 241 頁 §2 定理 3. この定理は單位のない場合も成立つ。

(2) 同上，參照。

(iii) $|x| \leqq |y|$ ならば, $\|x\|_p \leqq \|y\|_p$

を滿足するとき, 計量函數

$$\rho(x)=\sum_p \frac{1}{2^p} \frac{\|x\|_p}{1+\|x\|_p}$$

に關し完備ならば Fréchet 束である。[1] $\lim_n \rho(x_n - x)=0$ のとき, $\{x_n\}$ は x に强收斂すると云ふ。(i), (ii), (iii) 及び次の條件

(K_∞) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim_n \|x_n\|_p < +\infty$, $p=1, 2, 3, \ldots$ ならば, $\{x_n\}$ は强收斂する。

を滿足するベクトル束は, K_6 型 "正則" Fréchet 束になる。[2] 條件 (K_∞) は次の二つの條件

(iv) $x_n \downarrow 0$ ならば, $\|x_n\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$

(v) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim_n \|x_n\|_p < +\infty$, $p=1, 2, 3, \ldots$ ならば, $\bigvee_n x_n$ が存在する。

で置き換へてもよい。Bochner 束, K-空間等は, (i), (ii), (iii), (K_∞) を滿足するベクトル束である。(i), (ii), (iii), (K_∞) を滿足するベクトル束を單に (K_∞) **を滿足するベクトル束**と呼ぶことにする。$\sum_{i=1}^{p} \|x\|_i$ を新に $\|x\|_p$ ととることにより, 必要な場合には, $\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$ と假定することが出來る。

先づ X を (i), (ii), (iii) を滿足し, $\rho(x)$ に關して完備とすれば

補助定理 1. X が適當な計量により Banach 束になる條件は, すべての $x \in X$ に對し, $\sum_p \alpha_p \|x\|_p < +\infty$ なる正數列 $\{\alpha_p\}$ が存在することである。

證明。 必要條件の證: X がノルム $\|x\|$ により Banach 束になつたとする。Banach 束に於ては, ノルムによる收斂と相對一様 (*)-收斂は同義である。[3] この性質から $\|x\|_p$ はノルム $\|x\|$ に關して連續になる。故に $\|x\|_p \leqq c_p \|x\|$ なる正數 c_p が存在する。從て正數列 $\{\alpha_p\}$ を $\sum \alpha_p c_p < +\infty$ なる様にとれば, すべての $x \in X$ に對し, $\sum_p \alpha_p \|x\|_p < +\infty$ となる。

充分條件の證: $\sum_p \alpha_p \|x\|_p < +\infty$, $x \in X$ なる正數列 $\{\alpha_p\}$ が存在するとする。$\|x\| = \sum_p \alpha_p \|x\|_p$ と定めると, X が $\|x\|$ をノルムとする Banach 束になることは, 容易に確められる。 以上。

---

(1) 本紀要, **12** (昭 18), 235 頁 §1.
(2) 本紀要, 同上。240 頁 例 1.
(3) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, (1940). 定理 7.21.

補助定理 2. X が $\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$, $p=1,2,3,\ldots$ を滿足するとき，X 上の線形汎函數 $f(x)$ に對し，次の條件は互に同義である。

(1°) $f(x)$ は ρ に關して連續である。

(2°) $f(x)$ はある $\|x\|_p$ に關して連續である。

證明。(1°)→(2°) 正數 ε を $\rho(x)<\varepsilon$ ならば，$|f(x)|\leqq 1$ なる樣にとる。p を充分大にとり，$\sum_{n>p}\frac{1}{2^n}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n}<\frac{\varepsilon}{2}$ にとる。また正數 δ を $\|x\|_p<\delta$ のとき，$\sum_1^p\frac{1}{2^n}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n}<\frac{\varepsilon}{2}$ なる樣にとると，$\|x\|_p<\delta$ ならば，$\rho(x)<\varepsilon$ 從て $|f(x)|\leqq 1$ となり，$f(x)$ は $\|x\|_p$ に關して連續になる。

(2°)→(1°) 殆ど自明。　　以上。

補助定理 3. X が K_6 型 “正則” になる條件は，(K_∞) を滿足することである。

證明。充分條件であることは，上で說明したから，必要條件であることを示す。$0\leqq x_1\lneqq x_2\leqq\cdots$, $\lim_n\|x_n\|_p<+\infty$, $p=1,2,\ldots$ とすれば，$\lim_{\lambda\to 0}\lim_n\rho(\lambda x_n)=0$ となる。故に $\{x_n\}$ は (o)-有界になるから[(1)] $x=\bigvee_n x_n$ が存在する。X の “正則” 性から $\{x_n\}$ は x に相對一樣收斂する故，$\lim_n\|x_n-x\|_p=0$ となり，條件 (K_∞) が成立する。　　以上。

以下 X を (K_∞) を滿足するベクトル束とする。

定理 1. (K_∞) を滿足するベクトル束は，弱完備にして，任意の區間は列的弱コムパクトであると同時に弱ビコムパクトである。

證明。X を (K_∞) を滿足するベクトル束とする。X が K_6 型 “正則” であること，及び補助定理 2 より，X は前章 §1 に於て說明した條件 $(※)_1$, (α), $(\beta)_1$ を滿足する。故に前章 §4 定理 1, 3 により，X は弱完備にして，その任意の區間は弱ビコムパクトである。前章 §2 定理 6 を使へば，X の主イデヤルは條件 $(※)_3$ を滿足する。故に前章 §4 定理 2 により，X の任意の區間は列的弱コムパクトである。　　以上。

定理 2. X が (K_∞) を滿足するベクトル束にして，$\|x\|_p\leqq\|x\|_{p+1}$, $p=1,2,3,\ldots$ が成立つとき，次の條件は互に同義である。

(1°) X は Banach 束である。

---

(1) 本紀要，**12** (昭 18) 238 頁條件 **(IV)** 參照。

(2°) $\bar{X}$ は Banach 束である。

(3°) 任意の $0 \leqq f_n \in \bar{X}$, $n=1,2,3,\ldots$ に對し, $\sum_n \alpha_n f_n$ が (o)-收斂する正數列 $\{\alpha_n\}$ が存在する。[1]

(4°) 充分大なる p に對し, X は $\|x\|_p$ をノルムとする K-空間である。

證明。(1°)→(2°)→(3°), (4°)→(1°) は自明。(3°)→(4°) を證明すればよい。$\bar{X}_p$ で X 上の (o)-有界線形汎函數のうち, $\|x\|_p$ に關して連續なるものの全體を表す。このとき, $\bar{X}_n=\bar{X}_{n+1}=\cdots$ なる n が存在する。何者, かゝる n が存在しないとすれば, $0<f_{i_p}\in \bar{X}_{i_p}$, $f_{i_{p+1}}\notin \bar{X}_{i_p}$, なる $i_1<i_2<\cdots$ が存在する。正數列 $\{\alpha_p\}$ を $\sum_p \alpha_p f_{i_p}$ が (o)-收斂する様にとり, $f=\sum_p \alpha_p f_{i_p}$ と置くと, $f\in \bar{X}_p$ なる p は存在しない。補助定理 2 により, 矛盾が起る。$\bar{X}_n=\bar{X}_{n+1}=\cdots$ とすれば, $p\geqq n$ に對し, $\|x\|_p=0$ と $x=0$ とは同義である。$\|x\|_p$ により $\bar{X}_p$ に導入せられるノルムを $\|f\|_p$ で表すと, $p\geqq n$ ならば, $\bar{X}_p$ と $\bar{X}_{p+1}$ は Banach 空間として, Banach の意味で同型である。[1] 故に $c_p\|x\|_{p+1}\leqq\|x\|_p\leqq\|x\|_{p+1}$ なる正數 c_p が存在することになり, 條件 (K_∞) は, $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$, $\lim_m\|x_m\|_n<\infty$ ならば, $\{x_m\}$ はノルム $\|x\|_n$ に關して强收斂すると同義になる。即ち X は $\|x\|_n$ をノルムとする K-空間である。以上。

定理 3. X が (K_∞) と滿足するベクトル束にして, $\|x\|_p\leqq\|x\|_{p+1}$, $p=1,2,3,\ldots$ が成立つとき, 次の條件は互に同義である。

(1°) $\bar{X}$ は K_6 型 "正則" ベクトル束である。

(2°) 充分大なる p に對し, X は $\|x\|_p$ をノルムとする正則 (再歸的と同義) Banach 空間である。

證明。(1°)→(2°) 前定理の條件 (3°) が成立つから, 前定理の (4°) が成立つ。故に §2 定理 2 により, 本定理の條件 (2°) が成立つ。

(2°)→(1°) §2 定理 2 から。以上。

本定理を Bochner 束へ適用すれば,

定理 4. $\bar{X}$ が K_6^- 型 "正則" な Bochner 束 X は有限次元である。

が得られる。

$\bar{X}_p$ を $\|x\|_p$ に關して連續な線形汎函數の全體とする。

定理 5. X が (K_∞) を滿足するベクトル束にして, $\bar{X}_p$, $p=1,2,3,\ldots$ が

---

(1) $\{\alpha_p\}$ は $\{f_p\}$ に依存して變化する。

(2) G. Birkhoff, 前掲, 定理 7.21 を使つて。

K_6^- 型 "正則" ならば, X は再歸的, 即ち $X=\overline{\overline{X}}$ を滿足する。

證明。 X は $(\alpha), (\beta)_1$ を滿足する。補助定理 2 を使へば, $\overline{X}$ は (α) を滿足する。故に前章 §3 定理 1 により, X は再歸的である。　　以上。

例 1. Ω を完全加法的測度 $\beta(E)$ の定義された集合とする。Ω 上の β-可測函數 $x(t)$ のうち, $\|x\|_p=\left\{\int_\Omega |x(t)|^p \beta(dE)\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty,\ p=1,2,3,\dots$ を滿足するもの全體を X とすれば, X は條件 (K_∞) を滿足するベクトル束である。定理 5 により, X は再歸的である。$\overline{X}$ は, 少くとも或正數 α に對し, 絶對値の $(1+\alpha)$ 乘が β-可積分となる Ω 上の β-可測函數の全體からなる。零測度集合を法とする β-可測集合の Boole 代數は有限でないと假定する。このとき, 定理 3 を使へば, $\overline{X}$ は "正則" でない。β-可積分な β-可測函數の全體は, K_6 型 "正則" であるから, β-可積分函數で, 如何なる正數 α に對しても, その $(1+\alpha)$ 乘が β-可積分でないもの存在が判る。簡單のため, $\Omega=[0,1]$. $\beta(E)$ を Lebesgue 測度とする。L_r, $0<r<1$ で絶對値の r 乘が可積分な可測函數の全體とすれば, L_r は K_6 型 "正則" ベクトル束である。$\rho_1(x)=\int_0^1 |x(t)|^r\,dt$ とすれば, ρ_1 に關して連續な線形汎函數は trivial なものを除いて存在しないことは, 上述から導かれる。假に存在するとして, $f(x)$ を ρ_1 に關して連續, 即ち (o)-連續線形汎函數とすると, 容易に判る様に, $f(x)=\int_0^1 x(t)f(t)dt$ と書かれる可積分函數 $f(t)$ が存在する。$f>0$ として矛盾の起ることを示せばよい。適當に正數 δ をとれば, $E=\big(t;\ f(t)\geqq\delta\big)$ の測度は正である。故に任意の $x\in L_r$ に對し, $x(t)$ は E 上で可積分である。然るに上述の說明から, E 上では, 絶對値の r 乘が可積分であるが, 任意の正數 α に對し, $r(1+\alpha)$ 乘が可積分でないものがある。$r(1+\alpha)=1$ なる $\alpha>0$ が存在するから, 矛盾が起る。

例 2. (s)-空間は Bochner 束である。定理 5 により, (s)-空間は再歸的であるが, 定理 4 により共軛ベクトル束は "正則" ではない。

定理 6. Bochner 束 X から條件 (K_∞) を滿足するベクトル束 Y への線形作用素 $U(x)$ に就いて次の條件は互に同義である[1]。

(1°) $U(x)$ は正線形作用素の差として表される。

---

(1) 本定理は本紀要, **12** (昭 18), 244 頁, 定理 1 の擴張である。

(2°) $U(x)$ (o)は連續である。即ち (o)-收斂列を (o)-收斂列に變換する。

(3°) $U(x)$ は $(^*)$-連續である。即ち $(^*)$-收斂列を $(^*)$-收斂列に變換する。

證明。(1°)$\leftrightarrow$(2°) Kantorovitch の定理から。[1]

(2°)$\rightarrow$(3°) 自明。

(3°)$\rightarrow$(1°) $U(x)$ を $(^*)$-連續とする。$0<a\in X$ を任意にとり，$a=\sum_1^n x_i$, $0<x_i\in X$ なる a の分割に對し，$\sum_1^n|U(x_i)|$ なる形に書かれるすべての $\sum_1^n|U(x_i)|$ の集合を E とする。$y_1, y_2\in E$ なるとき，$y_1 y_2\leqq y_3\in E$ なる y_3 が存在する。[2] E が (o)-有界であることを示せばよい。E が (o)-有界でないとすれば，$y_n<y_{n+1}$, $y_n\in E$ なる (o)-有界でない $\{y_n\}$ が存在する。今 $\{f_n\}$ を前章 §5 Bochner 束の定義に表れた正汎函數列とし，正數列 $\{\alpha_n\}$ を $\sum_1^\infty \alpha_n f_n(a)<+\infty$ なる樣にとる。L_a で，X に於ける主イデヤル $\mathfrak{A}(a)$ の要素 x のうち，$\sum_1^\infty \alpha_n f_n(|x|)<+\infty$ なるものの全體とすれば，L_a は $\|x\|=\sum_1^\infty \alpha_n f_n(|x|)$ をノルムとする抽象 L-空間である。$U(x)$ は，L_a から Y への作用素として $(^*)$-連續である。從て $\|U\|_p=\text{l. u. b.}(\|U(x)\|_p;\ \|x\|\leqq 1,\ x\in L_a)$ と置けば，$\|U\|_p<+\infty$. 故に $y=\sum_1^n|U(x_i)|$ に對し，$\|y\|_p\leqq\|U\|_p\ (\sum_1^n\|x_i\|)=\|U\|_p\|a\|$ となる。從て $\lim_n\|y_n\|_p<+\infty$ となり，$\bigvee_n y_n$ が存在することになり，矛盾が起る。 以上。

定理 7. Bochner 束 X から X への線形作用素について，前定理が成立つ。

證明。前定理から。 以上。

以上は，Bochner 束と K-空間との擴張として，條件 (K_∞) を滿足するベクトル束の概念に到達した。K^--空間の擴張を考へるため，次の條件

(K^-) $x_1\geqq x_2\geqq\cdots\geqq 0$ ならば，$\{x_n\}$ は强收斂する。

を考へる。

定理 8. (i), (ii), (iii), (K^-) を滿足するベクトル束は ρ による完備化により，K_δ^- 型 "正則" Fréchet 束になる。[3] このとき區間は完備化により，影響を受けない。

---

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math, **49** (1940), 227 頁, 定理 8.

(2) L. Kantorovitch: 同上, 定理 11 の證明參照。

(3) 之を (K^-) を滿足するベクトル束と呼ぶ。

證明。§1 の所論參照[1] 以上。

定理 9. 前定理に於て，各 $\|x\|_p$ が，$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$，$\lim_n \|x_n\|_p < +\infty$ ならば，$\lim_{n,m} \|x_n - x_m\|_p = 0$ を滿足するならば，完備化は，條件 (K_∞) を滿足するベクトル束である。

證明。前節定理 1, 2 の證明法による。 以上。

第一章 §1 で述べた條件 $(**)_2$ を滿足する σ-完束ベクトル束 X を考へやう。$(**)_2$ に表れる正汎函數を $f_n(x)$ とし，$\|x\|_p = f_p(|x|)$ と置くと，$\|x\|_p$ は本定理の假定を滿足する。このとき

$$\rho(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^p} \frac{f_p(|x|)}{1 + f_p(|x|)}$$

による X の完備化は Bochner 束になる。故に條件 $(**)_2$ と條件 $(**)_3$ とは同義である。

定理 10. $(**)_2$ を滿足する σ-完全ベクトル束に於ては，(o)-連續 (o)-有界線形汎函數は Moore-Smith の (o)-連續である。

證明。上述の記法を使ふ。X を $(**)_2$ を滿足する σ-完全ベクトル束とし，$f(x)$ を任意の正線形汎函數とする。上述の $\rho(x) + f(|x|)$ を新に計量函數に選べば，X の完備化は Bochner 束になるから，$f(x)$ は X 上で Moore-Smith の (o)-連續なることが判る。 以上。

§4. 抽象 S 空間。

完全ベクトル束が次の二つの條件

(μ) 任意の正要素 $a > 0$ に關する特性要素の全體からなる完全ブール代數は，0 ならざるすべての要素に正値を與へる完全加法的計量函數をもつ。[2]

$(\aleph_0)$ $x_n \frown x_m = 0$ $(n \neq m)$ なる x_n，$n = 1, 2, 3, \ldots$ と共にその上端 $\bigvee_n x_n$ を含む。

を滿足するとき，**抽象 S 空間**であると云ふ。

定理 1. 完全ベクトル束が抽象 S 空間の正規部分空間となるための條件は，上述の條件 (μ) を滿足することである。

---

(1) 本編第二章 67，脚註 (3) 參照。

(2) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, (1940), 43 の術語を使へば，$a > 0$ に關する特性要素の全體は，**連續的計量ブール代數** (continuous metric Boolean algebra) を作ると云ふに外ならない。

證明。必要であることは，抽象 S 空間は定義から條件 (μ) を滿足する故に，その任意の正規部分空間も條件 (μ) を滿足することから明かである。次に充分であることを證明する。X を條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束とする。X の主イデヤルの作る廣義のブール代數を $\boldsymbol{P}$, X の正規イデヤルの作る完全ブール代數を $\boldsymbol{N}$ とすれば，$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{N}$ の部分束である。$\boldsymbol{N}$ の表現ブール空間を Ω とし，その點を $\mathfrak{p}$ で表す。$\boldsymbol{P}$ の高々可附番個の要素の上端として表される $\boldsymbol{N}$ の要素の全體を $\boldsymbol{N}_0$ と置く。X が條件 (μ) を滿足することは，任意の $\mathfrak{A}\in\boldsymbol{P}$ に對し，$(\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}\leqq\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\in\boldsymbol{N})$ なる完全ブール代數が，その 0 ならざるすべての正要素に正値を與へる完全加法的計量函數をもつことに外ならない。$\mathfrak{A}\in\boldsymbol{N}_0$ を任意にとると，$\mathfrak{A}=\bigvee_n\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n\frown\mathfrak{A}_m=0$, $(n\neq m)$, $\mathfrak{A}_n\in\boldsymbol{P}$, $n=1,2,\dots$ なる形に書かれる。$(\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}\leqq\mathfrak{A}_n,\ \mathfrak{B}\in\boldsymbol{N})$ に存在する上述の完全加法的計量函數を $m_n[\mathfrak{B}]$ とするとき，正數 λ_n, $n=1,2,\dots$ を $\sum\lambda_n m_n[\mathfrak{A}_n]<+\infty$ なる様に選び，$\mathfrak{B}\leqq\mathfrak{A}$ なる任意の $\mathfrak{B}\in\boldsymbol{N}$ に對し，$m[\mathfrak{B}]=\sum\lambda_n m_n[\mathfrak{A}_n\frown\mathfrak{B}]$ と定める。明かに $\mathfrak{B}>0$ のとき，$m[\mathfrak{B}]>0$ となる。故に $(\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}\leqq\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\in\boldsymbol{N})$ は，0 ならざるすべての要素に正値を與へる完全加法的計量函數をもつ完全ブール代數になる。Ω の非稠密部分集合上を除いて有限値をとる Ω 上の連續函數 $\varphi(\mathfrak{p})$ のうち，$\big(\mathfrak{p};\ \varphi(\mathfrak{p})\neq 0\big)$ の閉苞が $\boldsymbol{N}_0$ の要素に對應する開且閉集合となるものの全體を Y とする。Y は，明かに完全ベクトル束にして，Y の主イデヤルの作る廣義のブール代數は $\boldsymbol{N}_0$ と束同型になる。從て Y は，條件 (μ) を滿足する。$\varphi_n\frown\varphi_m=0$, $(n\neq m)$ なる $\varphi\in Y$ に對し，$\varphi=\bigvee_n\varphi_n$ (Ω 上の連續函數の作るベクトル束に於ける上端を表す) と置くと，$\big(\mathfrak{p};\ \varphi(\mathfrak{p})\neq 0\big)$ の閉苞は，容易に判る様に，$\boldsymbol{N}_0$ の要素に對應する開且閉集合になる。故に $\varphi\in Y$. 從て Y は抽象 S 空間である。今 X から正要素 $e^\alpha>0$ の集合を次の條件

(1) $\alpha\neq\beta$ ならば，$e^\alpha\frown e^\beta=0$

(2) すべての e^α に對し，$e^\alpha\frown x=0$ ならば，$x=0$

を滿足する様にとる。主イデヤル $\mathfrak{A}(e^\alpha)$ に對應する Ω の開且閉集合を Ω_α とし，e^α が Ω_α の特性函數となる様に，X を Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現する。$x\in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ で表すと，$x(\mathfrak{p})$ は Y に屬する。x と $x(\mathfrak{p})$ とを恒等視して，X を Y に埋藏すれば，明かに，X は Y の正規部分空間になる。以上。

(注意)　本定理の證明に於ける記法を踏襲する。任意の $\mathfrak{A}\in\boldsymbol{P}$ に對し，$\mathfrak{A}=\bigvee_{\alpha}\left(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}(e^{\alpha})\right)$，且 $\alpha\neq\beta$ のとき，$\left(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}(e^{\alpha})\right)\frown\left(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}(e^{\beta})\right)=0$. 條件 (μ) により，$\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}(e^{\alpha})>0$ なる e^{α} は高々可附番である。從て任意の $x\in X$ に對し，$x(\mathfrak{p})$ は，高々可附番個の Ω_{α} を除いて，Ω_{α} 上で恒等的に 0 になる。$\mathfrak{A}\in\boldsymbol{N}_0$ としても同様のことが云へる。故に $\varphi\in Y$ は，$\left(\mathfrak{p};\ \varphi(\mathfrak{p})\neq 0\right)$ が第一種集合を法として，高々可附番個の Ω_{α} で被覆される如き，Ω 上の非稠密集合上を除いて有限値をとる連續函數として特性づけられる。これからも明かな様に，X が抽象 S 空間ならば，$X=Y$ が得られる。また上述の抽象 S 空間 Y は，X の表現の如何に拘らず一定なものである。Y を X の**擴大抽象 S 空間**と呼ぶことにする。本定理の證明中に述べた様に，X が條件 (μ) を滿足することは，P に於て，任意の $\mathfrak{A}\in\boldsymbol{P}$ に對し，$(\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}\leqq\mathfrak{A})$ が 0 ならざるすべての要素に正値を與へる完全加法的計量函數をもつ完全ブール代數となることと同義である。從て各 $\left(\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}\leqq\mathfrak{A}(e^{\alpha})\right)$ がこの性質をもてば充分である。特に X が單位をもつ場合に次の補助定理を擧げて置かう。

補助定理 1.　X を單位 e をもつ完全ベクトル束とする。e に關する特性要素の全體からなる完全ブール代數が，0 ならざるすべての要素に正値を與へる完全加法的計量函數をもつならば，X は條件 (μ) を滿足する。

定理 2.　X を抽象 S 空間とすれば，X は K_6^- 型“正則”ベクトルにして，次の各條件は互に同義となる。

(1°)　X は單位をもつ。

(2°)　X は K_6 型“正則”ベクトル束である。

(3°)　X は Fréchet 束になる。

證明。X が K_6^- 型“正則”ベクトル束になることを示すには，その任意の主イデヤルが K_6^- 型“正則”ベクトル束になることと云へば充分である。X の任意の主イデヤルも抽象 S 空間なる故に，$(1°)\to(2°)$ を示せばよい。

$(1°)\to(2°)$, $(1°)\to(3°)$ の證：e を X の單位とし，e が恒等的 1 となる様，X をその表現ブール空間 Ω の連續函數のベクトル束で同型表現し，$x\in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ とすれば，Ω 上の非稠密集合を除いて有限値をとる連續函數は何れもある $x\in X$ の表現函數である。e に關する特性要素の全體からなる完全ブール代數に，條件 (μ) により，存在が保證される完全加法的計量函數を $m[x]$ とする。E を Ω の任意の Baire の性質をもつ部分集合と

するとき，E と第一種集合を法として一致する開且閉集合の特性函數を表現函數とする X の要素を $\mu(E)$ とする。即ち表現 (Ω, e, μ) を考へる。$m(E)=m[(\mu E)]$ とすれば，$m(E)$ は Ω の完全加法的測度函數にして，$m(E)=0$ と E が第一種集合とは同義になる。$\rho_0(x)=\int_{\Omega}\frac{|x(\mathfrak{p})|}{1+|x(\mathfrak{p})|}m(dE)$ と定義すると，X は K_6 型"正則"Fréchet 束になることが容易に云へる。[1]

$(2^\circ)\to(1^\circ)$　定理 1 の證明中の記法を踏襲する。X が K_6 型"正則"ベクトル束なる故に，$\{e^\alpha\}$ は高々可附番集合である。[2] 故に條件 $(\aleph_0)$ を使へば，X が單位をもつことが判る。

$(3^\circ)\to(1^\circ)$　X が計量函數 $\rho(x)$ をもつ Fréchet 束になるとする。定理 1 の證明中の記法を踏襲する。$\{e^\alpha\}$ が非可附番集合とすれば，或適當な正數 δ に對し，$\rho(e^\alpha)>\delta$ を滿足する e^α が無數に存在する。之を e^{α_n}, $n=1, 2, 3, \ldots$ とする。$e=\bigvee_n e^{\alpha_n}$ とすれば，$\mathfrak{A}(e)$ は抽象 S 空間なる故に $\mathfrak{A}(e)$ は $\rho(x)$ により，K_6 型"正則"Fréchet 束になる。$x_n=\bigvee_{i\geqq n} e^{\alpha_i}$ と置くと，$x_n\downarrow 0$ なる故，$\rho(x_n)\to 0$ となる。然るに $\rho(x_n)\geqq\rho(e^{\alpha_n})>\delta$ なる故矛盾が起る。以上。

定理 3. (1°)　K^--空間

(2°)　K-空間

(3°)　Bochner 束

(4°)　(K_∞) を滿足するベクトル束

(5°)　單位をもつ K^--空間 の共軛 Banach 束

(6°)　單位をもつ K-空間の共軛ベクトル束

(7°)　單位をもつ Bochner 束の共軛ベクトル束

(8°)　單位をもつ (K_∞) を滿足するベクルル束の共軛ベクトル束

(9°)　條件 $(※)_2$ を滿足する σ-完全ベクトル束

(10°)　條件 $(※)_1$ を滿足する K_6^- 型"正則"ベクトル束

(11°)　條件 (α_0), $(※)_2$ を滿足し，且單位をもつ σ-完全ベクトル束の共軛ベクトル束

(12°)　條件 $(※)_1$ を滿足し，且單位をもつ K_6^- 型"正則"ベクトル束の共軛ベクトル束

---

(1) 小笠原藤次郎：本紀要 **12** (昭 18), 235–248.
(2) 小笠原藤次郎：數物會誌 **16** (昭 17), 391–406. §8.

は何れも條件 (μ) を滿足する，從て擴大抽象 S 空間をもつ。(5°), (6°), (7°), (8°), (11°), (12°) の擴大抽象 S 空間は單位をもつ。(1°), (2°), (3°), (4°), (9°), (10°) が單位をもつ場合には，その擴大抽象 S 空間は單位をもつ。また (1°), (2°) が單位をもつとき，及び (5°), (6°), (7°), (8°) は，單位をもつ抽象 L 空間の正規部分空間になる。

證明。 完全ベクトル束が條件 (μ) を滿足することを示すには，その任意の主イデヤルが條件 (μ) を滿足することを云へばよい。故に (1°), (2°), (3°), (4°), (9°), (10°) に於て最初から單位をもつ場合を考へれば充分である。

(1°), (5°) の場合. X を單位 e をもつ K^--空間とすれば，§1 定理 1 により，$\bar{X}$ も單位をもつ。之を $h\in\bar{X}$ とする。e に關する特性要素 u に對し，$m[u]=h(u)$ と置けば，X が條件 (μ) を滿足することが判る。明かに X は單位 e をもつ抽象 S 空間の正規部分空間になる。また X を計量 $h(|x|)$ によつて完備化すれば，單位 e をもつ抽象 L 空間が得られ，X はその正規部分空間になる。次に h に關する特性要素 g に對して，$m[g]=g(e)$ と定義すれば，$\bar{X}$ が滿件 (μ) を滿足することが云へる。$X, \bar{X}$ の表現 (Ω, e, μ), (Ω, h, ν) を考へ，$m(E)=h\big(\mu(E)\big)=\nu(E)(e)$ と置く。$x\in X$, $f\in\bar{X}$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{p})$ とすれば，

$$f(x)=\int_{\Omega}f(\mathfrak{p})x(\mathfrak{p})m(dE) \tag{1}$$

となる故に，$\int_{\Omega}f(\mathfrak{p})m(dE)$ が存在し，$\bar{X}$ は單位をもつ抽象 L 空間及び單位をもつ抽象 S 空間の正規部分空間になる。

(2°), (6°) の場合。 上の (2°), (5°) の場合の特例である。

(4°), (10°) の場合。 X を單位 e をもち，條件 (K_∞) を滿足するベクトル束とする。(K_∞) に表れる $\|x\|_p$ を $\|x\|_p\leqq\|x\|_{p+1}$ にとる。$\|x\|_p$ に關して連續な汎函數の全體を $\bar{X}_p$ とすれば，§1 定理 1 を使つて，$\bar{X}_p$ が單位 h_p をもつことが云へる。正數 λ_p, $p=1,2,\dots$ を $\sum\lambda_p h_p(e)<+\infty$ なる樣にとる。h_p は h_{p+1} に關する特性要素として差支へない。X の表現，(Ω, e, μ) を考へ，$x\in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ とする。また h_p, $p=1,2,\dots$ が開且閉集合 Ω_p の特性函數となる樣 $\bar{X}$ を表現し，$f\in\bar{X}$ の表現函數を $f(\mathfrak{p})$ とする。u を e に關する

(1) 本定理に於て擧げた例は，すべて trivial でない汎函數の存在を許す場合であるが，此等に屬しないものとして，L_p, $0<p<1$, を擧げることが出來る。

特性要素とするとき，$m[u]=\sum\lambda_p h_p(u)$ と置くことにより，X は條件 (μ) を滿足することが判る。X が單位をもつことから，X は單位をもつ抽象 S 空間の正規部分空間になる。$m_p(E)=h_p\big(\mu(E)\big)$，$m(E)=\sum_1^\infty\lambda_p\big(m_p(E)-m_{p-1}(E)\big)$ と置く。(但し $m_0(E)=0$ とする)。任意の $f\in\bar{X}$ には，$f\in\bar{X}_p$ なる $\bar{X}_p$ が存在し，

$$f(x)=\int_\Omega f(\mathfrak{p})x(\mathfrak{p})m_p(dE) \tag{2}$$

となることから，$\int_\Omega f(\mathfrak{p})m(dE)$ が存在する。これから $\bar{X}$ は單位をもつ抽象 L 空間の正規部分空及び單位をもつ抽象 S 空間の正規部分空間となることが云へる。

(3°)，(7°) の場合は，(4°)，(8°) の場合の特例である。

(9°) の場合。前節最後の所論から單位をもつ Bochner 束に埋藏される。故に單位をもの抽象 S 空間の正規部分空間になる。

(11°) の場合。X を (α_0)，$(\divideontimes)_2$ を滿足し，單位 e をもつベクトル束とすれば，X は Bochner 束に埋藏されるから，條件 (f) を滿足し，X は條件 (α) を滿足する完全ベクトル束になる。X と $\bar{X}$ の正規イデヤルが束同型ブール代數を作ることから，(9°) の場合によつて，$\bar{X}$ が單位をもつ抽象 S 空間の正規部分空間となることが分る。

(10°)，(12°) の場合。X を單位 e をもち條件 $(※)_1$ を滿足する K_6^- 型 "正則" ベクトル束とする。前章 §2 定理 6 により，X は (α_0)，$(\divideontimes)_2$ を滿足する。故に (9°)，(11°) の場合から，(10°)，(12°) の場合に對する結果が得られる。 以上。

單位 e をもつ K^--空間の擴大抽象 S 空間を得るには，$\rho(x)=\left\|\frac{x}{e+|x|}\right\|$ によつて完備化を行へばよい。K-空間，Bochner 束，(K_∞) を滿足するベクトル束に對しても同様である。

今 X を單位 e をもち條件 $(\aleph_0)$ を滿足するベクトル束とし，e が恒等的 1 となる様 X をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し，$x\in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ とする。條件 $(\aleph_0)$ により，X の要素の表現函數の全體は，Ω 上非稠密集合上を除いて有限値をとる連續函數の全體からなる。このとき次の補助定理が成立つ。

補助定理 2. $\{x_n\}$ が (o)-收斂することと，第一種集合上を除いて $\lim_n x_n(\mathfrak{p})$ が有限確定とは同義である。

證明。 $x_n \to x\,(o)$ とすれば，第一種集合上を除いて，$\lim_n x_n(\mathfrak{p})=x(\mathfrak{p})$，從て $\lim_n x_n(\mathfrak{p})$ は有限確定である。この逆を示す。$x_n \geqq 0$ としてよい。第一種集合上を除いて $\lim_n x_n(\mathfrak{p})$ は有限確定とすれば，$\mathrm{l.u.b.}_n\, x_n(\mathfrak{p})$ は第一種集合上を除いて有限である。故に第一種集合上を除いて，$x(\mathfrak{p})=\lim_n x_n(\mathfrak{p})$，$x_0(\mathfrak{p})=\mathrm{l.u.b.}_n\, x_n(\mathfrak{p})$ なる連續函數 $x(\mathfrak{p})$，$x_0(\mathfrak{p})$ が存在する。$x_n \leqq x_0$ なる故，$\{x_n\}$ は (o)-有界，從て $x_n \to x\,(o)$ が判る。 以上。

定理 4. X を抽象 S 空間とし，定理 1 の證明中に述べた X の表現を考へ，$x \in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ とする。X からの要素列 $\{x_n\}$ が (o)-收斂することと，第一種集合上を除いて $\lim_n x_n(\mathfrak{p})$ が有限確であることとは同義である。

證明。 補助定理 1 を使つて。 以上。

以下條件 $(\aleph_0)$ に就いて少しく調べて見やう。

定理 5. X を $(\aleph_0)$ を滿足する Banach 束とすれば，X は有限次元である。

證明。 X が有限次元でないとすれば，$a_n \frown a_m=0\ (n \neq m)$ なる $0 < a_n \in X$ $n=1,2,3,\dots$ が存在する。$\|a_n\|=1$ としてよい。$(\aleph_0)$ により，$\bigvee_n na_n \in X$. 然るに $\|\bigvee_n na_n\| \geqq na_n\|=n$ となる故矛盾が起る。 以上。

定理 6. X を $(\aleph_0)$ を滿足する K_6^- 型 “正則” Fréchet 束とする。X は單位をもつ K_6 型 “正則” である。倘 X が有限次元でないとすれば，“正則” 性の非本義的公理(1) を滿足しない。また X が Banach 束になる條件は，有限次元になることである。

證明。 X の計量函數を $\rho(x)$ とする。定理 2 の證明と同様にして單位 e の存在が云へる。$\rho'(x)=\rho\left(\dfrac{x}{e+|x|}\right)$ と置くと，X は $\rho'(x)$ により，K_6^- 型 “正則” Fréchet 束になるが，$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$ が (o)-有界でないときは，$\lim_{\lambda\to 0}\lim_n \rho'(\lambda x_n) > 0$ となることが容易に確められる。故に X は K_6 型 “正則” である(2) X が有限次元でないとすると，$e_n \frown e_m=0\ (n \neq m)$ なる $e_m > 0$，$n=1,2,3,\dots$ が存在する。$E_n=\{pe_n\}$，$p=1,2,\dots$ とすると，各 E_n は

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math. **44** (1937), 121–168, § 5.
(2) 小笠原藤次郎: 本紀要 **12** (昭 18), 235–249.

上方有界でない。如何に E_n の有限部分集合 E_n' をとるも，E_n' の上端は $p_n e_n$ の形に書かれ，$\{p_n e_n\}$ は $(\aleph_0)$ により (o)-有界であるから，X は非本義的 "正則" 性の公理を滿足しない。定理の最後の部分は前定理から明かである。 以上。

定理 7. $(※)_1$, $(\aleph_0)$ を滿足する K_6^- 型 "正則" Fréchet 束は有限次元であるか，(s)- 空間になる。

證明。X を $(※)_1$, $(\aleph_0)$ を滿足する K_6^- 型 "正則" Fréchet 束とすれば，前定理により單位 e をもつ，從て e に關する特性要素の全體 A が原子的ブール代數なることが云へれば，X の K_6^- 型 "正則" 性と條件 $(\aleph_0)$ から，X は，有限次元か (s)-空間である。前章 §2 定理 6 の證明から判る樣に，X は，對應する $\bar{X}$ の正規イデヤルが主イデヤルとなる X の主イデヤルの高々可附番個の上端である。故に $\bar{X}$ が單位 h を持つ場合に證明すれば充分である。表現 (Ω, e, μ) を考へ，$m(E)=h\big(\mu(E)\big)$ と置くと，$m(E)=0$ と E が第一種集合とは同義である。$x \in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ とすると，$h(x)=\int_{\Omega} x(\mathfrak{p}) m(dE)$ となる。$x(\mathfrak{p})$ は Ω 上非稠密集合上を除いて有限値をとる任意の連續函數となり得るため，零測度集合を法とする m-可測集合は有限ブール代數になる。從て A は有限である。故に一般の場合は，A は，高々可附番個の原子的要素で生成されたブール代數である。 以上。

定理 8. $(\aleph_0)$ を滿足する Bochner 束は，有限次元であるが (s) 空間である。

證明。前定理を使つて。 以上。

定理 9. 條件 (K_∞) を滿足するベクトル束が條件 $(\aleph_0)$ を滿足するならば，有限次元か (s) 空間である。

證明。定理 9 から。 以上。

第四編 ベクトル束に於ける積分論

第一章 點函數の (o)-積分

§1. Riemann 式積分。

本章に於ては，斷り無き限り，X は少くとも二つの要素をもつ σ-完全ベクトル束とする。實區間 $a \leqq t \leqq b$ 上で定義せられ X を値域とする函數

$x(t)$ を考へる。$x(t)$ に適用し得る實函數に於ける積分概念の最も簡單なものは，Riemann 式積分である。區間 $[a, b]$ の分割 $\varDelta$

(1) $$\varDelta:\quad a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

を考へ，τ_i, $i=1, 2, \ldots n$ を $t_{i-1}\leqq\tau_i\leqq t_i$ なる様に任意にとり，Riemann 和 $S_\varDelta(x)$ を

(2) $$S_\varDelta(x)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,x(\tau_i)$$

に依つて定義する。$\underset{i}{\text{l. u. b.}}|t_i-t_{i-1}|$ を分割 $\varDelta$ のノルムと云ひ，$|\varDelta|$ で表す。$|\varDelta_n|\to 0$ なる任意の分割列 $\{\varDelta_n\}$ に對し，$\{S_{\varDelta_n}(x)\}$ が $\{\varDelta_n\}$ のとり方に無關係に X の一要素に (o)-收斂するとき，$x(t)$ は可積分であると云ひ，この (o)-收斂極限を $x(t)$ の $[a, b]$ 上の積分と云ひ

(3) $$\int_a^b x(t)dt$$

で表す。

この積分定義が常に適用し得る函數のうち，此處では，相對一樣連續函數と (o)-有界變動函數とを導入しやう。

定理 1. 正要素 e が存在し $\big(x(t)$ に依存する$\big)$，任意の正數 ε に對し，正數 δ が定まり，

$$|t-t'|<\delta \quad ならば,\quad |x(t)-x(t')|<\varepsilon e$$

を滿足するとき，$x(t)$ は e に關して**一樣連續**，或は單に**相對一樣連續**であると云ふ。

$x(t)$ が e に關して一樣連續ならば，その定義から，$x(t)$ のとる値の集合は (o)-有界である，且 $e'\geqq e$ なる e' をとれば，$x(t)$ は e' に關しても一樣連續となる故に，すべての t に對して $|x(t)|\leqq e$ が成立つものとして一般性を失はない。$x(t)$ の外に $y(t)$ を相對一樣連續とすれば，$x(t)$, $y(t)$ は共に同一の e に關して一樣連續としてよい。今 $z(t)$ を各點 t で $x(t)$, $y(t)$ の上端 (join) を値とする $[a, b]$ 上の函數とすれば，

$$|z(t)-z(t')|\leqq|x(t)-x(t')|+|y(t)-y(t')|$$

のため，$z(t)$ も e に關して一樣連續になる。また，$\alpha(t)$ を任意の實數値連續函數とすれば，$\alpha(t)x(t)$ も相對一樣連續になる。之を要約すれば，

補助定理 1. 相對一樣連續函數の全體はベクトル束を作る。$\alpha(t)$ を實數値

連續函數, $x(t)$ を相對一様連續函數とすれば, $a(t)x(t)$ は相對一様連續函數である。

が得られる。

今 $x(t)$ を e に關して一樣連續とし, $|x(t)|\leqq e$ とする。定義 1 に於ける樣に ε, δ を定める。分割 $\varDelta$ 及び $\varDelta'$

(4) $$\varDelta':\quad a=t'_0<t'_1<\cdots<t'_{n'}=b$$

のノルムを δ より小にとり, 二つの分割 $\varDelta, \varDelta'$ の分割點の全體を分割點とする分割を $\varDelta\varDelta'$ で表し,

(5) $$\varDelta\varDelta':\quad a=t''_0<t''_1<\cdots<t''_{n''}=b$$

とすると, $S_\varDelta(x)$, $S_{\varDelta'}(x)$ は

$$S_\varDelta(x)=\sum_1^{n''}(t''_i-t''_{i-1})x(\bar{\tau}_i)$$

$$S_{\varDelta'}(x)=\sum_1^{n''}(t''_i-t''_{i-1})x(\bar{\tau}'_i)$$

の形に書かれる。$|\bar{\tau}_i-\bar{\tau}'_i|<2\delta$ なる故に, δ のとり方から, $|x(\bar{\tau}_i)-x(\bar{\tau}'_i)|<2\varepsilon e.$ 從て

$$|S_\varDelta(x)-S_{\varDelta'}(x)|\leqq\sum_1^{n''}(t''_t-t''_{i-1})|x(\bar{\tau}_i)-x(\bar{\tau}'_i)|<2\varepsilon(b-a)e$$

となる。これから $|\varDelta_n|\to 0$ なるとき, $\{S_{\varDelta_n}(x)\}$ は $\{\varDelta_n\}$ のとり方に無關係に X の一要素に e に關して一樣 (o)-收斂することが判る。X の主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ を e が恒等的 1 となるやうに, $\mathfrak{A}(e)$ の表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し, $x\in X$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ 或は $x_{(\mathfrak{p})}$ で表すと, 上記相對一樣連續函數 $x(t)$ に對しては, 積分定義の過程から, すべての $\mathfrak{p}\in\Omega$ に對し,

(6) $$\int_a^b x(t)dt_{(\mathfrak{p})}=\int_a^b x(t)_{(\mathfrak{p})}dt$$

が成立つ。また, $\alpha(t)$ を任意の實數値連續函數とすれば, 補助定理 1 を使つて

(7) $$\int_a^b \alpha(t)x(t)dt_{(\mathfrak{p})}=\int_a^b \alpha(t)x(t)_{(\mathfrak{p})}dt$$

が得られる。(6), (7) の關係から, 實函數論の所論から, 相對一樣連續函數に關する定理が導かれる。其の一例として, Fourier 級數に就いて説明しやう。

定理 1. $x(t)$ を相對一様連續とすれば，$n \to +\infty$ のとき，

$$\int_a^b \cos nt \cdot x(t)dt \to 0 \ (o)$$

$$\int_a^b \sin nt \cdot x(t)dt \to 0 \ (o)$$

證明。 $\left|\int_a^b \cos nt \cdot x(t)dt\right| \leqq \int_a^b |x(t)|\,dt$ から $\left\{\int_a^b \cos nt \cdot x(t)dt\right\}$ は (o)-有界である。(7) 式から $\int_a^b \cos nt \cdot x(t)dt_{(\mathfrak{p})} = \int_a^b \cos nt \cdot x(t)_{(\mathfrak{p})}dt$. 然るにこの等式の右邊は，各點$\mathfrak{p}$ に於て $n \to +\infty$ のとき 0 に收斂する。故に $\int_a^b \cos nt \cdot x(t)dt \to 0$ (o) を得る。$\int_a^b \sin nt \cdot x(t)dt \to 0 \ (o)$ に就いても同樣にして證明される。

$x(t)$ を $[0, 2\pi]$ 上の相對一様連續函數とし，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot x(t)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot x(t)dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

により $x(t)$ の Fourier 級數

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (\cos nt \cdot a_n + \sin nt \cdot b_n) \tag{8}$$

を定義する。定理 1 により，$n \to +\infty$ のとき，$a_n \to 0(o)$, $b_n \to 0 \ (o)$. また，(7) 式を使へば，$x(t)_\mathfrak{p}$ の Fourier 級數は，

$$x(t)_\mathfrak{p} \sim \frac{1}{2}a_0(\mathfrak{p}) + \sum_1^\infty (\cos nt \cdot a_n(\mathfrak{p}) + \sin nt \cdot b_n(\mathfrak{p}))$$

となる故に，$a_0 = a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ならば，$x(t) \equiv 0$ となる。Riemann-Lebesgue の定理に基礎を置く，多くの定理から，相對一様連續函數に對する定理が得られる。尙 Parseval の關係に就いて一瞥しやう。

定理 2. X が單位をもち，$x^2(t)$ が存在し(1) $x(t)$ と共に相對一様連續ならば，a_0^2, a_n^2, b_n^2, $n = 1, 2, 3, \ldots$ が存在して

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) \tag{9}$$

が成立つ。

證明。 X の單位を e とし，e を恒等的 1 となる樣に，X をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現する。$x(t)$, $x^2(t)$ は e

---

(1) X の單位を積單位とする積である。積の定義に就いては，第一編第三章 §3 定理 3 參照。

に關して一樣連續とし，尙 $|x(t)|\leqq e$, $|x^2(t)\leqq e$ とする。積の定義により，$x^2(t)_{(\mathfrak{p})}=\{x(t)_{(\mathfrak{p})}\}^2$ にして，$e_{(\mathfrak{p})}$ は非稠密集合上を除いて有限である。積分の定義の仕方から，$e_{(\mathfrak{p})}$ が有限な點 $\mathfrak{p}$ では，(6), (7) 式に對應するものが成立つから，實函數に對する Parseval の關係式から，$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{x(t)_{(\mathfrak{p})}\}^2dt=\frac{1}{2}\{a_0(\mathfrak{p})\}^2+\sum_1^{\infty}(\{a_n(\mathfrak{p})\}^2+\{b_n(\mathfrak{p})\}^2)$ を得る。故に a_0^2, a_n^2, b_n^2 の存在並びに (9) 式の成立つことが判る。　以上。

然しながら，Parseval の關係式を單に手段とする場合には，X に單位の存在を假定する必要はない。$x(t)$ を e に關して一樣連續とし，且 $|x(t)|\leqq e$ とすれば，主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ に於て，e を單位とすれば，$x^2(t)$ は常に存在して，e に關して一樣連續になる。また X に單位 a の存在を考へ，a に關する積を必要とするかに見える場合も之を避けゐことが出來る場合がある。$x_i\in X$, $i=1,2,3,\dots n$ とする。X に單位が存在すると否とに拘らず，$\{\sum_1^n x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$ を，$\sum_1^n c_i^2=1$ なるあらゆる實數の組 $\{c_i\}$ に對し，$\bigvee_{\sum c_i^2=1}\{\sum c_ix_i\}$ として定義する。もし X に單位 a が存在し，a を積單位として x_i^2 が存在するならば，$\{\sum x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$ は式通りの意味をもつことになる。また，$x_i\in X$, $i=1,2,\dots$ に對して，$\{\sum_1^n x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$ が (o)-有界のとき，その上端を $\{\sum_1^{\infty}x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$ で表す。積分の定義に於ても，Riemann 和の代りに，$\{\sum_1^n(t_i-t_{i-1})x^2(\tau_i)\}^{\frac{1}{2}}$ を考へ，$|\varDelta_n|\to 0$ のときの (o)-極限が，$\{\varDelta_n\}$ のとり方に無關係に定まるならば，$\left\{\int_0^{2\pi}x^2(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}}$ と書く。$x(t)$ が e に關して一樣連續ならば，$|x(t)|\leqq e$ とすれば，e を積單位とすれば，$\int_0^{2n}x^2(t)dt$ が存在し，Parseval の關係式が成立つから，

定理 3. $x(t)$ を相對一樣連續函數とすれば，

$$\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

が成立つ。

が得られる。(10) は X に單位の存在と否とに拘らず成立する式である。同樣な考へ方によつて，冪に關する Fourier 係數の關係式を，ベクトル値函數の場合に飜譯することが可能てある。

定義 2. 任意の t, t' に對し $|x(t)-x(t')|\leqq|t-t'|^{\alpha}e$ が成立する正要素 e 及び正數 $\alpha\leqq 1$ が存在するとき，$x(t)$ は α **位の Lipschitz 條件**を滿足する

といひ，$x(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ で表す。

$x(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ ならば，$x(t)$ は相對一様連續函數である。

Parseval の關係式に關する上述の注意により，次の S. Bernstein の定理が成立つ。

定理 4. $x(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\left(\alpha>\dfrac{1}{2}\right)$ ならば，$\sum_1^\infty(|a_n|+|b_n|)$ は (o)-收斂する。但し $x(0)=x(2\pi)$ とする。

證明。Zygmund の本(1)の證明法による。 以上。

次に有界 (o)-變動函數を考へやう。區間 $[a,b]$ 上の函數 $x(t)$ に對し，X を完全ベクトル束として，

定義 3. あらゆる $[a,b]$ の分割 Δ に對し，$\sum_{i=1}^n|x(t_i)-x(t_{i-1})|$ の全體からなる集合が (o)-有界のとき，$x(t)$ は**有界 (o)-變動**(2)であると云ひ，その上端を $\mathop{\mathrm{var.}}_a^b x(t)$ 或は $\mathop{\mathrm{var.}}_a^b x$ で表す。

$x(t)$ が $[a,b]$ で 有界 (0)-變動ならば，$[a,b]$ の任意の部分區間の上でも有界 (o)-變動なる故に，$a\leqq c\leqq d\leqq b$ なる $[c,d]$ に對して $\mathop{\mathrm{var.}}_c^d x$ が定義せられる。尙このとき，$x(t)$ のとる値の集合は (o)-有界となる故に，$|x(t)|\leqq e$, $\mathop{\mathrm{var.}}_a^t x\leqq e$ なる正要素 e が存在する。主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ を考へ，e を恒等的 1 となる樣に，$\mathfrak{A}(e)$ をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で表現すれば，各 $\mathfrak{p}\in\Omega$ に於て，$x(t)_{(\mathfrak{p})}$ は t の有界變動函數にして，第一種集合上を除いて $\mathop{\mathrm{var.}}_a^b\{x(t)_{(\mathfrak{p})}\}=\{\mathop{\mathrm{var}}_a^b x\}_{(\mathfrak{p})}$ となる。この性質を利用しても，$a\leqq c\leqq b$ に對し，$\mathop{\mathrm{var.}}_a^c x+\mathop{\mathrm{var.}}_c^b x=\mathop{\mathrm{var.}}_a^b x$ の成立が判る。從て第一種集合上を除いた各點 $\mathfrak{p}$ で，すべての $t\in[a,b]$ に對し

$$\mathop{\mathrm{var}}_a^t\left\{x(t')_{(\mathfrak{p})}\right\}=\left\{\mathop{\mathrm{var.}}_a^t x\right\}_{(\mathfrak{p})} \tag{11}$$

が成立つ。

分割 Δ の相隣る分割點によつて作られた部分區間の中から勝手に $[t_{j_0},t'_{j_0}]$, $\dots[t_{j_k},t'_{j_k}]$ をとり出し

$$0\cup\sum_{m=0}^k\left(x(t'_{j_m})-x(t_{j_m})\right) \tag{12}$$

を作り，あらゆる分割 Δ に對して作られる (12) 式が (o)-有界のとき，その上端を $\mathop{\mathrm{var.}}_a^{b\,+} x(t)$ 或は $\mathop{\mathrm{var.}}_a^{b\,+} x$ と書く。$\mathop{\mathrm{var.}}_a^b x$ が存在することと $\mathop{\mathrm{var.}}_a^{b\,+} x$ が

(1) A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, (1935) 135.
(2) L. Kantorovitch: Recueil Math. **49** (1940), 240.

存在することは同義である。これは連續函數で表現して考へることにより容易に判ることである。$\mathrm{var}^{-}_{\cdot}\, x = \mathrm{var}^{+}_{\cdot}(-x)$ と定義すれば，

$$\mathrm{var}_a^b.\, x = \mathrm{var}_a^{b\,+}x + \mathrm{var}_a^{b\,-}x \tag{13}$$

$$x(b) - x(a) = \mathrm{var}_a^{b\,+}x - \mathrm{var}_a^{b\,-}x \tag{14}$$

が得られることも同樣にすれば判る。

今 $x(t)$ を有界 (o)-變動とし，正要素 e を $|x(t)| \leqq e$, $\mathrm{var}_a^b.\, x \leqq e$ なる樣にとり，上述の表現を考へる。$x(t)$ に對して作られた Riemann 和 $S_\Delta(x)$ は (o)-有界にして，各點 $\mathfrak{p}$ を固定して考へると，$x(t)_{(\mathfrak{p})}$ は實數値有界變動函數なる故に，$|\Delta_n| \to 0$ のとき，

$$\lim_n \{S_{\Delta_n}(x)_{(\mathfrak{p})}\} = \int_a^b x(t)_{(\mathfrak{p})} dt$$

となる。從て $S_{\Delta_n}(x)$ は $\{\Delta_n\}$ のとり方に無關係な X の要素に (o)-收斂する。故に $x(t)$ は可積分にして，第一種集合上を除いて，(6), (7) 式が成立する。[1] 從て相對一樣連續函數に就いて述べたと同樣に，實數値有界變動函數に關する定理から，有界 (o)-變動に關する定理が導かれる。例を Fourier 級數にとつても，定理 1, 2, 3 に對應するものが成立つ。同樣な議論を繰返すに止まるから省略する。

§2. (o)-積分とその簡單な性質。

R を基本集合とし，R を一員とする R の部分集合の作る Borel 族を $\mathfrak{K}_R$ とし，$\mathfrak{K}_R$ 上で非負な實數値をとる完全加法的集合函數(之を單に測度函數と呼ぶ) $\beta(U)$ が定義せられ，[2] 零測度集合の任意の部分集合は $\mathfrak{K}_R$ に屬するとする。$\mathfrak{K}_R$ に屬する集合は，β-可測或は單に可測であると云ふ。X を完全ベクトル束とし，R 上殆ど到る所で定義せられ X を値域とする函數を $x(t)$, $y(t)$ 等で表す。R が有限個の互に共通點のない可測集合にわかれ，その各可測集合上で一定の X の要素を値とする函數を單函數と云ひ，$\boldsymbol{s}(t)$ 或は之に指標をつけて表すことにする。

定義 1. $x(t)$ が殆ど到る所單函數列 $s_n(t)$ の (o)-收斂極限となるとき，$x(t)$ は β に關して **(o)-可測**，或は單に **(o)-可測** であると云ひ，$s_n(t)$ を $x(t)$ の

---

(1) これ等から判る樣に積分の定義が適用されるために，$\mathrm{var}_a^b\{x(t)_{(\mathfrak{p})}\} < +\infty$ の性質を利用したのであつて，$\mathrm{var}_a^b.\, x$ の存在を必要としないから，X は σ-完全ベクトルとしてもよいことになる。

(1) $0 < \beta(R) < +\infty$ とする。

(o)-可測定義列と云ふ。

この定義に依れば，單函數は (o)-可測にして，(o)-可測函數は線形空間を作り，$x(t)$ と共に $|x(t)|$ も (o)-可測である。また $\alpha(t)$ を實可測函數とすれば，(o)-可測函數 $x(t)$ に對し，$\alpha(t)x(t)$ も (o)-可測である。

單函數 $s(t)$ が U_i, $i=1,2,\dots n$ 上で夫々 a_i なる値をとり，$U_iU_j=0$, $i\neq j$, $\sum_{i=1}^{n}U_i=R$ のとき，

$$\int_R s(t)\beta(dU)=\sum_1^n \beta(U_i)a_i$$

と定義する。

定義 2. (o)-可測函數 $x(t)$ の (o)-可測定義列 $s_n(t)$ を，$n,m\to+\infty$ とき，$\int_R|s_n(t)-s_m(t)|\beta(dU)\to 0$ (o) なる樣にとり得るとき，$x(t)$ は **(o)-可積分**であるといひ，このときの (o)-可測定義列 $s_n(t)$ を **(o)-積分定義列**と云ふ。$\int_R|s_n(t)-s_m(t)|\beta(dU)\to 0$ (o) から，$\int_R s_n(t)\beta(dU)$ は $n\to+\infty$ のとき，X の一要素に (o)-收斂する。之を $x(t)$ の (o)-積分と云ひ，(o)-$\int_R x(t)\beta(dU)$ 或は $\int_R x(t)\beta(dU)$ で表す。

此處に述べた (o)-積分が意味をもつためには，(o)-積分定義列のとり方に無關係に (o)-積分が決定されなければならない。この要求を滿足するため，X に制限を加へやう。先づ X が條件 (※)$_2$[1]

(※)$_2$ 如何なる $0<x_0\in X$ に對しても，之に正値を與へる (o)-連續 (o)-有界線形汎函數 (x_0 と共に變化する) が存在する。

を滿足する場合から考へやう。

補助定理 1. X が條件 (※)$_2$ を滿足するならば，(o)-積分は (o)-積分定義列の如何に拘らず一定である。

證明。(o)-可積分函數の線狀性から，(o)-可積分函數 $x(t)$ が $x(t)\equiv 0$ の場合に證明すれば充分である。$f(x)$ を任意の (o)-連續正線形汎函數とすれば，(o)-積分定義列 $s_n(t)$ に對し，

$$\int_R\left|f\big(s_n(t)\big)-f\big(s_m(t)\big)\right|\beta(dU)\leqq f\Big(\int_R|s_n(t)-s_m(t)|\beta(dU)\Big)$$

となる故に

$$f\Big(\lim_n\int_R s_n(t)\beta(dU)\Big)=\lim_n f\Big(\int_R s_n(t)\beta(dU)\Big)=\int_R f\Big(\lim_n s_n(t)\Big)\beta(dU)=0$$

となる。　以上。

(1) 第三編第一章 §1, 44 に條件 (*)$_2$ の説明がある。

$x(t)$ を (o)-可積分とし，$s_n(t)$ をその (o)-積分定義列とする。簡単のため $x(t)\geqq 0$ とする。從て $s_n(t)\geqq 0$, $n=1,2,3,\dots$ としてよい。$e_n \frown e_m=0$, $n\neq m$ なる $o<e_n\in X$, $n=1,2,3,\dots$ を，$s_n(t)$, $n=1,2,3,\dots$ のとる値が $\{e_n\}$ の生成する正規イデヤル X_0 に屬する様にとる。從て $x(t)$ のとる値も X_0 に屬するとしてよい。X_0 の表現ブール空間 Ω を考へ，X_0 を Ω 上の連續函數で表現し，名 e_n が開且閉集合 Ω_n の特性函數となる様にする。各 Ω_n 上で Baire の性質をもつ部分集合 E に對し，$\mu^{(n)}(E)$ を E と第一種集合を法として一致する開且閉集合の特性函數を表現函數とする X_0 の要素と定める。かゝる表現を簡單に $(\Omega_n, e_n, \mu^{(n)})$, $n=1,2,3,\dots$ で表さう。$x\in X_0$ の表現函數を $x(\mathfrak{p})$ 或は $x_{(\mathfrak{p})}$ で表す。今

$$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\overline{\lim_n}\,\{s_n(t)_{(\mathfrak{p})}\} \tag{1}$$

$$\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\underline{\lim_n}\,\{s_n(t)_{(\mathfrak{p})}\} \tag{2}$$

と置くと，殆どすべての t に對して，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{p}$ の函數と考へれば，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ は Ω の第一種集合上を除いて $x(t)_{(\mathfrak{p})}$ と一致する。f を (o)-連續正線形汎函數とし，$m^{(n)}(E)=f\left(\mu^{(n)}(E)\right)$ と置くと，$x(t)=\sum_1^\infty\int_{\Omega_n}\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\mu^{(n)}(dE)$ なる故に，

$$f\left(x(t)\right)=\sum_1^\infty\int_{\Omega_n}\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\,m^{(n)}(dE),\ (\text{殆どすべての } t \text{ に對し}) \tag{3}$$

となる。一方 $\int_R\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\,\beta(dU)$ は，

$$\lim_{n\to+\infty}\ \lim_{m\to+\infty}\ \lim_{p\to+\infty}\int_R\min\left(\max\left(s_m(t)_{(\mathfrak{p})},\cdots s_{m+p}(t)_{(\mathfrak{p})}\right),\,n\right)\beta(dU)$$

と書かれる故に，Baire の函數である。Fubini の定理を使つて

$$\begin{aligned}\int_R f\left(x(t)\right)\beta(dU)&=\sum_1^\infty\left\{\int_R\beta(dU)\int_{\Omega_n}\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})m^{(n)}(dE)\right\}\\&=\sum_1^\infty\left\{\int_{\Omega_n}m^{(n)}(dE)\int_R\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\beta(dU)\right\}\end{aligned} \tag{4}$$

$\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ に對しても，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ と同樣にして，

$$\int_R f\left(x(t)\right)\beta(dU)=\sum_1^\infty\left\{\int_{\Omega_n}m^{(n)}(dE)\int_R\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\,\beta(dU)\right\} \tag{5}$$

$$E_0=\left(\mathfrak{p}\,;\int_R\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\,\beta(dU)=+\infty\ \text{或は}\ \int_R\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\beta(dU)\neq\int_R\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\beta(dU)\right)$$

と置く。E_0 は Borel 集合である。E_0 が第一種集合でないとすれば，$E_0\Omega_n$

が第一種集合でない n が存在する。從て $(※)_2$ を使つて (4), (5) から矛盾が導かれる。故に Ω の第一種集合上を除いて,

$$(6)\qquad 0 \leqq \int_R \underline{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU) = \int_R \overline{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU) < +\infty$$

$$(7)\qquad \underline{\varphi}(t, \mathfrak{p}) = \overline{\varphi}(t, \mathfrak{p}) \quad (\text{殆どすべての } t \text{ に對し})$$

が成立つ。故に Ω の第一種集合を除いた Ω' の各點 $\mathfrak{p} \in \Omega'$ に對し, 殆どすべての點 t で ($\mathfrak{p}$ に依存する), $\lim_n s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ は有限確定にして,

$$(8)\qquad \lim_{n, m \to +\infty} \int_R |s_n(t)_{(\mathfrak{p})} - s_m(t)_{(\mathfrak{p})}| \beta(dU) = 0$$

$$(9)\qquad \int_R x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})} = \int_R \overline{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU) = \int_R \underline{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU)$$

今 $y(t)$ を $|y(t)| \leqq x(t)$ なる (o)-可測函數とする。$y(t)$ の (o)-可測定義列 $s'_n(t)$ を, $x(t)$ の (o)-積分定義列 $s_n(t)$ に對し,

$$|s'_n(t)| \leqq s_n(t)$$

なる様にとれば, $\int_R |s'_n(t)\beta(dU) \leqq \int_R s_n(t)\beta(dU)$ なる故に,

$\int_R |s'_n(t) - s'_m(t)| \beta(dU)$ は (o)-有界である。$\lim_{n, m \to +\infty} \int_R |s'_n(t)_{(\mathfrak{p})} - s'_m(t)_{(\mathfrak{p})}| \beta(dU)$ が第一種集合上を除いて 0 となることを云へば, $s'_n(t)$ は $y(t)$ の (o)-積分定義列になる。このためには, $y(t) \geqq 0, s'_n(t) \geqq 0$ として證明すれば充分である。$\overline{\varphi}'(t, \mathfrak{p}) = \overline{\lim_n} s'_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ と置けば, 上と同様にして, Ω の第一種集合を除いた Ω'' の各點 $\mathfrak{p} \in \Omega''$ に對し, 殆どすべての點 t で ($\mathfrak{p}$ に依存する)。$\lim_n s'_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ は有限確定である。然るに (8) から $\mathfrak{p} \in \Omega'$ に對し, $\mathfrak{p}$ を固定すれば, $\int_U s_n(t)_{(\mathfrak{p})}\beta(dU)$ は同程度絶對連續 (equi-absolutely continous) となる故に, $\int_U s'_n(t)_{(\mathfrak{p})}\beta(dU)$ も同程度絶對連續である。故に $\mathfrak{p} \in \Omega'\Omega''$ ならば,

$$\lim_{n, m \to +\infty} \int_R |s'_n(t)_{(\mathfrak{p})} - s'_m(t)_{(\mathfrak{p})}| \beta(dU) = 0$$

となる。從て $s'_n(t)$ は $y(t)$ の (o)-積分定義列である。故に

定理 1. X を條件 $(※)_2$ を滿足する完全ベクトル束とする。$x(t)$ を (o)-可積分函數とすれば, $|y(t)| \leqq |x(t)|$ なる任意の (o)-可測函數 $y(t)$ は (o)-可積分である。

證明。 上述から。 以上。

本定理から (o)-有界な値をとる (o)-可測函數は (o)-可積分なることが判る。

定理 2. X を條件 $(※)_2$ を滿足する完全ベクトル束とすれば，(o)-可積分函數 $x(t)$, $y(t)$ 等に對し

(1°) $x(t)$ は任意の可測部分集合上で (o)-可積分である。

(2°) U を可測集合とすれば，

$$\int_U \big(x(t)+y(t)\big)\beta(dU)=\int_U x(t)\,\beta(dU)+\int_U y(t)\,\beta(dU)$$

$$\int_U ax(t)\beta(dU)=a\int_U x(t)\beta(dU)\,, \qquad a \text{ は常數}$$

(3°) $|x(t)|$ も (o)-可積分にして，可測集合 U に對し，

$$\left|\int_U x(t)\,\beta(dU)\right| \leqq \int_U |x(t)|\,\beta(dU)$$

(4°) (o)-可測函數 $x_0(t)$ が殆どすべての點 t に於て (o)-可測函數 $x_n(t)$ の (o)-收斂極限にして，$|x_0(t)|\leqq x(t)$, $|x_n(t)|\leqq x(t)$ なる (o)-可積分函數 $x(t)$ が存在するならば，可測集合 U に對し，$\left|\int_U x_n(t)\beta(dU)\right| \leqq \int_U |x(t)|\,\beta(dU)$ にして且

$$\int_U x_0(t)\,\beta(dU)=(o)\text{-}\lim_n \int_U x_n(t)\,\beta(dU)$$

證明。(1°), (2°), (3°) は (o)-可積分の定義から自明である。(4°) を證明する。定理 1 により，$x_0(t)$, $x_n(t)$ は (o)-可積分である。$x_0(t)\geqq 0$, $x_n(t)\geqq 0$ のとき證明すれば充分である。また $U=R$ として證明してよい。上述の記法を踏襲して，$x_0(t)$, $x_n(t)$ に對する $\overline{\varphi}(t, \mathfrak{p})$ を $\overline{\varphi}_0(t, \mathfrak{p})$, $\overline{\varphi}_n(t, \mathfrak{p})$ と書けば，第一種集合上を除いて，$0\leqq \overline{\varphi}_0(t, \mathfrak{p})$, $\overline{\varphi}_n(t, \mathfrak{p})\leqq \overline{\varphi}(t, \mathfrak{p})$, 且

$$\int_R x_0(t)\,\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R \overline{\varphi}_0(t, \mathfrak{p})\,\beta(dU) \tag{10}$$

$$\int_R x_n(t)\,\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R \overline{\varphi}_n(t, \mathfrak{p})\,\beta(dU) \tag{11}$$

$\bar{\psi}_0(t, \mathfrak{p})=\overline{\lim_n}\,\overline{\varphi}_n(t, \mathfrak{p})$ と置く。殆どすべての t に對し，第一種集合を除いて，$x_0(t)_{(\mathfrak{p})}=\bar{\psi}_0(t, \mathfrak{p})$ となる故，

$$\int_R f\big(x_0(t)\big)\beta(dU)=\sum_1^\infty\left\{\int_R \beta(dU)\int_{\Omega_n}\bar{\psi}_0(t, \mathfrak{p})m^n(dE)\right\}$$

$$=\sum_1^\infty\left\{\int_{\Omega_n} m^n(dE)\int_R \bar{\psi}_0(t, \mathfrak{p})\beta(dU)\right\}$$

同様にして，$\underline{\psi}_0(t, \mathfrak{p})=\underline{\lim_n}\,\overline{\varphi}_n(t, \mathfrak{p})$ とすると，

$$\int_R f\bigl(x_0(t)\bigr)\beta(dU)=\sum_1^\infty\left\{\int_{\Omega_n} m^n(dE)\int_R \psi_0(t,\mathfrak{p})\beta(dU)\right\}$$

これから，第一集合上を除いて

$$(12) \qquad \int_R \bar{\varphi}_0(t,\mathfrak{p})\beta(dU)=\int_R \psi_0(t,\mathfrak{p})\beta(dU).$$

一方 (4) 式から

$$\int_R f\bigl((x)_0(t)\bigr)\beta(dU)=\sum_1^\infty\left\{\int_{\Omega_n} m^n(dE)\int_R \bar{\varphi}_0(t,\mathfrak{p})\beta(dU)\right\}$$

となる故に，第一種集合上を除いて，(12) 式は $\int_R \bar{\varphi}_0(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ となる。(12) 式から，第一種集合上を除いて，殆どすべての t に對し，$\lim_n \bar{\varphi}_n(t,\mathfrak{p})=\bar{\varphi}_0(t,\mathfrak{p})$ となる故に，(10), (11) から第一種集合上を除いて各 $\mathfrak{p}$ に對し，

$$\lim_n \int_R x_n(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R x_0(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}$$

となる。一方 $\int_R x_n(t)\beta(dU)\leqq\int_R x(t)\beta(dU)$ のため，$\int_R x_n(t)\beta(dU)$ は (o)-有界なる故に (4^0) の成立が判る。 以上。

(o)-可積分函數 $x(t)$ に對し，$\int_U x(t)\beta(dU)$ を $\mathfrak{R}_R$ 上の集合函數と考へるとき，$x(t)$ の**不定 (o)-積分**と呼ぶ。

定理 3. X を條件 $(※)_2$ を滿足する完全ベクトル束とする。$x(t)$ が (o)-可積分ならば，その不定 (o)-積分は (o)-有界な値をとり，任意の $\beta(U_n)\to 0$ なる可測集合列 $\{U_n\}$ に對し，

$$(o)\text{-}\lim_n \int_{U_n} x(t)\beta(dU)=0$$

證明。 $x(t)\geqq 0$ の場合に證明すれば充分である。上述の記法を使つて，第一種集合上を除いて，

$$\int_{U_n} x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_{U_n} \bar{\varphi}(t,\mathfrak{p})\beta(dU), \qquad n=1,2,3,\dots$$

となる故に，$\lim_n \int_{U_n} x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=0$ を得る。是から容易に本定理の成立が判る。 以上。

(o)-可積分函數 $x(t)$ に對し，$F(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$ と置けば，(o)-位相で $F(U)$ は完全加法的なることが判る。定理 3 に於て述べた様に，$\beta(U_n)\to 0$ のとき $F(U_n)\to 0\ (o)$ となる。かゝる性質をもつ集合函數は**絶對 (o)-連續**であると云ふ。U を互に共通點のない有限個の可測集合 $U_i,\ i=1,2,\dots,n$ に分け，

$\sum_{i=1}^{n}|F(U_i)|$ を作る。あらゆる U の分割に對する $\sum_{i=1}^{n}|F(U_i)|$ の上端を $F(U)$ の **全 (o)-變動**といひ。$\underset{U}{\mathrm{var.}}F$ で表す。明かに $\underset{U}{\mathrm{var.}}F \leqq \int_U |x(t)|\beta(dU)$ となる。また $\underset{U}{\mathrm{var.}}F = \bigvee\left(F(U') - F(U-U');\ U \geqq U' \in \mathfrak{K}_R\right)$ と定義してもよい。これは連續函數で表現して考へれば容易に判ることである。$x(t) \geqq 0$ として，(8), (9) 式を得たが $x(t) \geqq 0$ としなくとて成立することも容易に判る。$x(t)$ の (o)-積分定義列 $s_n(t)$ の何れかが一定の値をとる可測集合は高々可附番，從てこれ等を含む最小のブール代數も高々可附番である。之を $\mathfrak{K}'_R$ とし，$\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p}) = \lim_n s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ と置くと，Ω の第一種集合を除いた各點 $\mathfrak{p}$ で

$$\int_R |\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})|\beta(dU) = \underset{U \in \mathfrak{K}_R}{\mathrm{l.u.b.}}\left(\int_U \bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU) - \int_{R-U}\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU)\right)$$

また第一種集合を除いた Ω の各點 $\mathfrak{p}$ で

$$(13)\qquad \int_R x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})} = \int_R \bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})\beta(dU)$$

$$(14)\qquad \int_R |x(t)|\beta(dU)_{(\mathfrak{p})} = \int_R |\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})|\beta(dU)$$

を得る。これ等の式は R を $U \in \mathfrak{K}_R$ で置きかへても成立つ。故に $\underset{U}{\mathrm{var}}F = \int_U |x(t)|\beta(dU)$ となる。故に次の定理を得る。

定理 4. X を $(※)_2$ を滿足する完全ベクトル束とする。$x(t)$ が (o)-可積分ならば，その不定 (o)-積分の $U \in \mathfrak{K}_R$ 上の全 (o)-變動は $\int_U |x(t)|\beta(dU)$ である。

特に R を區間 $[0, 2\pi]$, $\mathfrak{K}_R$ を Lebesgue 可測集合の Borel 族, β を Lebesgue 測度函數とする。$x(t)$ を (o)-可積分とし，その $[0, 2\pi]$ 上の (o)-積分を $\int_0^{2\pi} x(t)dt$ と書く, $x(t)$ に對し，$\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})$ を上と同樣に定義する。$\cos nt.\, x(t)$, $\sin nt.\, x(t)$ も (o)-可積分にして，a_0, a_n, b_n を夫々 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt.\, x(t)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt.\, x(t)dt$ と定義すれば，第一種集合を除いた Ω の各點 $\mathfrak{p}$ で

$$a_0(\mathfrak{p}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})dt, \qquad a_n(\mathfrak{p}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt.\, \bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})\, dt.$$

$$b_n(\mathfrak{p}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt.\, \bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})\, dt, \qquad n = 1.\, 2, \dots$$

が成立つことが云へる。かゝる表現を使へば，(o)-可積分函數の Fourier 級數の理論を構成することが出來る。例へば，X が單位をもち，それを積單位として $x^2(t)$ が (o)-可積分な (o)-可測函數 $x(t)$ に對して，Parseval の關係式が成立つことが證明出來る。

次に X が條件 (μ)[1]

(μ) 任意の正要素 $a>0$ に對し，a に關する特性要素の全體の作る完全ブール代數は，0 ならざるすべての要素に正値を與へる完全加法的計量函數をもつ。

を滿足する完全ベクトル束の場合を考へやう。

$x(t)$ を (o)-可測とし，$s_n(t)$ をその可測定義列とする。$e_n \frown e_m=0,\ n \neq m$ なる $o<e_n \in X$ を適當にとれば，零測度集合の上を除いて $x(t),\ s_n(t)$ のとる値は，$e_n,\ n=1,2,3,\ldots$ の生成する正規イデヤル X_0 に屬する。[2] 故に $x(t),\ s_n(t)$ の値は X_0 に屬するとしてよい。X_0 の表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で X_0 を同型表現し，以前の様に $(\Omega_n, e_n, \mu^{(n)}),\ n=1,2,\ldots$ を考へる。條件 (μ) により，e_n に關する特性要素の作るブール代數に定義された計量函數を $m^{(n)}[x]$ とし，正數列 $\{\alpha_n\}$ を $\sum_1^\infty \alpha_n m^{(n)}[e_n]<+\infty$ なる様にとり，Baire の性質をもつ Ω の任意の部分集合 E に對し，$m(E)=\sum_1 \alpha_n m^{(n)}\left[\mu^{(n)}(\Omega_n E)\right]$ と置くと，$m(E)$ は Ω の完全加法的測度函數にして，$m(E)=0$ と E は第一種集合とは同義になる。R と Ω の積空間 $R\times\Omega$ を作り，同時に β と m の積測度 $\beta\times m$ を作る。$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\overline{\lim_n}\, s_n(t)_{(\mathfrak{p})},\ \underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\underline{\lim_n}\, s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ と置くと，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p}),\ \underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ は何れも $\beta\times m$-可測にして，殆どすべての t に對し，兩者は第一種集合上從て m-測度 0 の集合上を除いて一致する。故に $\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\neq\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ なる $(t,\mathfrak{p})$ の集合は $\beta\times m$-測度 0 である。同様に $\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\pm\infty$ 或は $\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\pm\infty$ なる $(t,\mathfrak{p})$ の集合も $\beta\times m$-測度 0 である。故に m-測 0 の集合を除いた Ω' の各點 $\mathfrak{p}\in\Omega'$ に對し，殆どすべての t で ($\mathfrak{p}$ に依存する。) $\lim_n s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ が有限確定である。$x(t)$ を (o)-可積分，$s_n(t)$ を (o)-積分定義列とすれば，殆どすべての $\mathfrak{p}$ に對し

$$(15) \qquad \lim_{n,m}\int_R |s_n(t)_{(\mathfrak{p})}-s_m(t)_{(\mathfrak{p})}|\,\beta(dU)\equiv 0$$

---

(1) 前編第二章 §4 參照。

(2) 次章 §2 の所論を使へば，零測度集合上を除いて，$x(t),\ s_n(t)$ は X の主イデヤルを値域としてよいことが云へる。

$$\int_R x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R \bar{\varphi}(t,\mathfrak{p})\beta(dU) \tag{16}$$

が成立つことが容易に判る。補助定理 1 に對應して

補助定理 2. X を (μ) を滿足する完全ベクトル束とする。(o)-可積分函數の (o)-積分は，(o)-積分定義列の如何に拘らず一定である。

證明。 $x(t)\equiv 0$ なる (o)-可積分函數 $x(t)$ に對して證明すればよい。$\bar{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ は $\beta\times m$ 測度 0 の集合上を除いて 0 となる故に (16) 式により，$\int_R x(t)\beta(dU)=0$ が得られる。 以上。

定理 5. 定理 1, 2, 3, 4 に於て條件 $(※)_2$ を (μ) に置き換へたものが成立つ。尙 $\int_U x(t)\beta(dU)\equiv 0$, $U\in\mathfrak{K}_R$ ならば，殆ど到る所で $x(t)=0$ である。

證明。 條件 $(※)_2$ を滿足する場合と同樣の方針で證明される。 以上。

(o)-可測な $x(t)$ に對しては，$\beta\times m$-可測な $\varphi(t,\mathfrak{p})$ が存在し，殆どすべての t に對し，殆どすべての $\mathfrak{p}$ で $x(t)_{(\mathfrak{p})}=\varphi(t,\mathfrak{p})$ が成立する。かゝる性質をもつ任意の二つの $\varphi(t,\mathfrak{p})$ は $\beta\times m$-測度 0 の集合上を除いて一致し，$x(t)$ が (o)-可積分のとき，殆どすべての $\mathfrak{p}$ に對し，$\int_R x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R\varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ となる。この性質を使つて (o)-可積分函數に對する Fourier 級數の理論を構成することが出來る。

以上に於ては，(o)-可測，(o)-積分の概念を導入したが，$x(t)$ が殆どすべての t に對して (o)-可測函數列 $x_n(t)$ の (o)-收斂極限のとき，一般には $x(t)$ が (o)-可測なりや否やは不明である。かゝる $x(t)$ を (o')-可測であると云ひ，$x_n(t)$ を (o')-可測定義列と云はう。$x_n(t)$ が $(o)\text{-}\lim_{n,m}\int_R|x_n(t)-x_m(t)|\beta(dU)=0$ なる樣にとり得るとき，$x(t)$ は (o')-可積分であると云ひ，$(o)\text{-}\lim_n\int_R x_n(t)\beta(dU)$ をその (o)-積分と云ひ，$\int_R x(t)\beta(dU)$ で表す。このとき，$x_n(t)$ を $x(t)$ の (o')-積分定義列と云ふ。(o')-可積分函數に對しても本節の所論を擴張することが出來る。此處には，不定 (o')-積分は，(o)-有界，加法的，絕對 (o)-連續なることを注意して置かう。

§ 3. Dunford 積分との關係。

R を集合とし，前節と同じ性質をもつ Borel 族 $\mathfrak{K}$ 及び測度函數 $\beta(U)$ を考へる。先づ X を Banach 空間とし，R 上の單函數を前節と同樣に定義する。$x(t)$ が單函數列 $s_n(t)$ の，殆ど到る所に於て，强收斂極限となるき，$x(t)$

は Bochner の意味で**可測**であると云ひ，$s_n(t)$ を $\lim_{n,m}\int_R \|s_n(t)-s_m(t)\|\beta(dU)=0$ なる如くとり得るとき，$x(t)$ は Bochner の意味で**可積分**であると云ふ。この際前節同様可測定義列，積分定義列なる概念を導入する。$x(t)$ を Bochner の意味で可積分とし，$s_n(t)$ をその積分定義列とすれば $\int_R s_n(t)\beta(dU)$ は $n\to+\infty$ のとき，X の一要素に強收斂する。之を $\int_R x(t)\beta(dU)$ で表す。$x(t)$ が R 上で可積分ならば，可測部分集合 U の上でも可積分である。このとき集合函數 $\int_U x(t)\beta(dU)$ を不定 Bochner 積分と呼ぶ。

補助定理 1. X を K^--空間とすれば，次の各命題は互に同義である。

(1°) $x(t)$ は Bochner の意味で可測である。

(2°) $x(t)$ は (o)-可測である。

(3°) $x(t)$ は (o')-可測であ　。

證明。K^--空間の性質から (2°)→(1°) は自明。

(1°)→(2°)　可測定義列 $s_n(t)$ を，高々 β-測度 $\frac{1}{2^n}$ の集合上を除いて $\|x(t)-s_n(t)\|\leqq\frac{1}{2^n}$ なる様にとることが出來る。これから容易に $s_n(t)$ が殆ど到る所で $x(t)$ に (o)-收斂することが判る。

(2°)→(3°)　自明。

(3°)→(1°)　$x(t)$ を (o')-可測とすると，Bochner の意味で可測な函數列 $x_n(t)$ の，殆ど到る所，强收斂極限となるから，周知の様に $x(t)$ は Bochner の意味で可測となる。　　以上。

$x(t)$ を Bochnerの意味の可測函數とする。X の共軛 Banach 空間 $\bar{X}$ の任意の要素 f に對し，U を任意の可測集合とするとき，

$$f\bigl(F(U)\bigr)=\int_U f\bigl(x(t)\bigr)\beta(dU)$$

なる X の値をとる $F(U)$ が存在するならば，$x(t)$ は N. Dunford の意味で**可積分**であると云て，$F(R)$ を $\int_R x(t)\beta(dU)$ で表し，$x(t)$ の R 上の **Dunford 積分**と云ふ。[1]

定理 1. X を K^--空間とすれば，可測函數 $x(t)$ に對し次の命題

(1°) $x(t)$ は (o)-可積分である。

(1) N. Dunford: Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), p. 178 (abstract).
B. J. Pettis: Trans. Amer. Math. Soc., **44** (1938), p. 292.

(2°)　$|x(t)|$ は Dunford の意味で可積分である。

は互に同義にして，$x(t)$ の (o)-積分と Dunford 積分は一致する。

證明。(1°)→(2°)　$|x(t)|$ の (o)-積分定義列を $s_n(t)$ とすると，$0 \leqq f \in \bar{X}$ に對し，$\int_R \left| f\left(s_n(t)\right) - f\left(s_m(t)\right) \right| \beta(dU) \leqq f\left(\int_R |s_n(t) - s_m(t)| \beta(dU)\right)$ なる故に，$\int_U f\left(x(t)\right)\beta(dU) = \lim_n f\left(\int_U s_n(t)\beta(dU)\right) = f\left(\int_U x(t)\beta(dU)\right)$ となり，$|x(t)|$ は Dunford の意味で可積分となる。

(2°)→(1°)　$|x(t)|$ を Dunford の意味で可積分とすると，$\left\| \int_U |x(t)| \beta(dU) \right\|$ は $\beta(U)$ と共に 0 に收斂する。これを利用すれば，次の (i), (ii) の性質をもつ單函數列の存在が判る。

(i)　高々 β-測度 $\frac{1}{2^n}$ の集合だ除いて，$\|x(t) - s_n(t)\| \leqq \frac{1}{2^n}$

(ii)　$\left\| \int_R |x(t) - s_n(t)| \beta(dU) \right\| \leqq \frac{1}{2^n}$ (積分は Dunford の意味)

(i), (ii) より $s_n(t)$ が $x(t)$ の (o)-積分定義列なること，及び兩定義の積分値の一致が判る。　以上。

$x(t)$ が Dunford の意味で可積分のとき，不定 Dunford 積分 $\int_U x(t)\beta(dU)$ のとる値が (o)-有界ならば，Dunford 不定積分は (o)- 有界であると云ふ。

定理 2.　X を K^--空間とする。Dunford の意味で可積分な函數 $x(t)$ が (o)-可積分なるための條件は，$x(t)$ の Dunford 不定積分が (o)-有界となることである。

證明。前定理 (2°)→(1°) の證明に準ず。　以上。

次に X を K_6^- 型 “正則” Fréchet 束[1] とし，その計量函數を $\rho(x)$ とする。$x(t)$ が單函數列 $s_n(t)$ の，殆ど到る所で，(t)-收斂極限のとき，$x(t)$ を (t)-可測と云ふ。補助定理 1 に對應して，次の補助定理 2 が成立つ。

補助定理 2.　X を K_6^- 型 “正則” Fréchet 束とすれば，次の各命題は互に同義である。

(1°)　$x(t)$ は (t)-可測である。

(2°)　$x(t)$ は (o)-可測である。

(3°)　$x(t)$ は (o')-可測である。

---

(1)　小笠原藤次郎：本紀要 12 (昭 18), 235–248.

證明。 補助定理 1 の證明法に準じて行へばよい。 以上。

第三編第二章 §3 の記法を使つて，X を (K^-) を滿足するベクトル束とする。X の値をとる集合函數 $F(U)$ が，任意の $f\in\overline{X}$ に對し，$f\big(F(U)\big)$ が完全加法的のとき，**弱完全加法的**と云ひ，$f\big(F(U)\big)$ が $\beta(U)$ に關して絕對連續のとき**弱絕對連續**といふ。

補助定理 3. X を (K^-) を滿足するベクトル束とする。$F(U)$ が $\beta(U)$ に關して弱絕對連續な加法的集合函數ならば，$\beta(U_n)\to 0$ のとき，$F(U_n)$ は 0 に强收斂する。

證明。 $\|F(U_n)\|_p\to 0$ なることを云へばよい。前編第二章 §3 補助定理を使へば，$\|x\|_p$ に關して連續な $f\in\overline{X}$ に對して $f\big(F(U)\big)$ は絕對連續且加法的なる故に，[1] $\|F(U_n)\|_p\to 0$ を得る。 以上。

(o)-可測函數 $x(t)$ に對して X の値をとる集合函數 $F(U)$ が定まり，任意の $f\in\overline{X}$ に對して，$f\big(F(U)\big)=\int_U f\big(x(t)\big)\beta(dU)$ となるとき，$x(t)$ は Dunford の意味で可積分であると云はう。

定理 3. 定理 1, 2 は，X に關する假定を，X は (K^-) を滿足するベクトル束である，としても成立つ。

證明。 補助定理 2, 3 を使つて，定理 1, 2 の證明法に準じて行へばよい。

以上。

次に X を K-空間或は (K_∞) を滿足するベクトル束とする。X を値域とする R 上の函數 $x(t)$ は，すべての $f\in\overline{X}$ に對し，$f\big(x(t)\big)$ が可積分ならば，**弱可積分**であると云ふ。

定理 4. X を K-空間或は (K_∞) を滿足するベクトル束とする。Xを値域とする R 上の (o)-可測函數 $x(t)$ が (o)-可積分なるための條件は，$|x(t)|$ が弱可積分なることである。

證明。 必要條件であることは明かなる故に，充分條件であることを示さう。$|x(t)|$ を弱可積分とする。$x(t)$ の (o)-可積分を證明するには，$|x(t)|$ の (o)-可積分を云へば充分である。故に $x(t)\geqq 0$ として證明すればよい。また X は單位 e をもつとしてよい。[2] $x_n(t)=x(t)\frown ne$ と置くと，$|x_n(t)|\leqq ne$ な

---

(1) Kunisawa: 學士院紀事。**16** (昭 15), 68–72.

(1) 次節補助定理 1 參照。

る故に，$x_n(t)$ は (o)-可積分である。$f\geqq 0$ に對し， $\lim_n f\left(\int_R x_n(t)\beta(dU)\right)=\lim_n\int_R f\left(x_n(t)\right)\beta(dU)=\int_R f\left(x(t)\right)\beta(dU)$ が成立つ。X は弱完備なる故に，$\int_R x_n(t)\beta(dU)$ は，$n\to+\infty$ のとき，(o)-收斂する。故に $(o)\text{-}\lim_{n,m}\int_R|x_n(t)-x_m(t)|\beta(dU)=0$. 從て $x_n(t)$ は $x(t)$ の (o')-積分定義列となる。單函數 $s_n(t)$ を

(i) β-測度 $\dfrac{1}{2^n}$ なる集合上を除いて $\rho\left(x_n(t)-s_n(t)\right)\leqq\dfrac{1}{2^n}$

(ii) $\rho\left(\int_R|x_n(t)-s_n(t)|\beta(dU)\right)\leqq\dfrac{1}{2^n}$

なる如くとると，$s_n(t)$ は $x(t)$ の (o)-積分定義列になり，$x(t)$ は (o)-可積分である。　以上。

最後に Bochner 積分について一注意を加へやう。

定理 5. X が抽象 L 空間ならば，(o)-可測函數 $x(t)$ に對し，(o)-可積分と Bochner の意味で可積分とは同義にして，兩義に於ける積分値は一致し，$x(t)$ が可積分のとき，

$$\left\|\int_R|x(t)|\beta(dU)\right\|=\int_R\|x(t)\|\beta(dU)$$

が成立つ。

證明。$x(t)$ を (o)-可積分とする。X は抽象 L 空間なる故，$f(x)=\|x_+\|-\|x_-\|$ は X 上の有界線形汎函數である。故に，$f\left(|x(t)|\right)=\|x(t)\|$ が可積分となることから，$x(t)$ は Bochner の意味で可積分にして，$f\left(\int_R|x(t)|\beta(dU)\right)=\int_R f\left(|x(t)|\right)\beta(dU)$ を書き換へれば，$\left\|\int_R|x(t)|\beta(dU)\right\|=\int_R\|x(t)\|\beta(dU)$ となる。逆に $x(t)$ を Bochner の意味で可積分とすれば，定理 1 により，$x(t)$ は (o)-可積分にして，兩義の積分値は一致する。　以上。

§4. 抽象 S 空間に於ける (o)-積分。

$R, \mathfrak{R}_R, \beta$ 等は §2 に於けると同樣に定義されたものとする。

補助定理 1. X を K_6^- 型 "正則" ベクトル束とするならば，(o)-可測函數 $x(t)$ がとる値の全體は，零測度集合上でとる値を除けば，X の主イデヤルに含まれる。

證明。$s_n(t)$ を $x(t)$ の (o)-可測定義列とする。$s_n(t)$, $n=1,2,\cdots$ のとる値の全體は，高々可附番集合を作るから，X の主イデヤルに含まれる。從て零

測度集合の上でとる値を除いて，$x(t)$ のとる値は X の主イデヤルに含まれる。 以上。

X を抽象 S 空間とし，$x(t)$ を任意の (o)-可測函數とする。補助定理 1 によつて，$x(t)$ のとる値は，零測度集合上でとる値を除いて X の主イデヤルに含まれる。之を X_0 とし，e を X_0 の單位として，e が恒等的 1 となる様に X_0 を連續函數のベクトル束で同型表現する。この表現を (Ω, e, μ) とする。e に關する特性要素の全體の作る完全ブール代數に，條件 (μ) により與へられる計量函數を $m[x]$ とし，$m(E)=m[\mu(E)]$ と定める。$x(t)$ の (o)-可測定義列 $s_n(t)$ を考へ

$$\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})=\lim_n s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$$

と置けば，§2 により，$\bar{\varphi}(t, \mathfrak{p})$ は $\beta\times m$-可測にして，殆どすべての t に對し，$x(t)_{(\mathfrak{p})}$ と $s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ は Ω 上の函數として對等 (m-測度 0 の集合上を除いて一致するの意) である。かゝる性質をもつ任意の $\beta\times m$-可測函數 $\varphi(t, \mathfrak{p})$ は $\beta\times m$-測度 0 の集合を除いて，即ち，$R\times\Omega$ 上で對等な函數を無視すれば一意に定まる。$\varphi(t, \mathfrak{p})$ を $x(t)$ の $R\times\Omega$ 上に於ける**表現函數**と呼ぶ。逆に $\varphi(t, \mathfrak{p})$ を $\beta\times m$-可測且殆ど到る所有限値をとる $R\times\Omega$ 上の函數とするとき，$\varphi(t, \mathfrak{p})$ を表現函數とする (o)-可測函數 $x(t)$ の存在を示さう。このためには，前節定理 3 (定理 1 に對應する部分) により，$\varphi(t, \mathfrak{p})$ が $\beta\times m$-可測集合の特性函數の場合に證明すればよい。このとき，

$$\lim_n \iint_{R\times\Omega} |\varphi(t, \mathfrak{p})-\varphi_n(t, \mathfrak{p})|\, d(\beta\times m)=0 \tag{1}$$

なる $\varphi_n(t, \mathfrak{p})$ を，$U\times E$ なる形の有限個の和集合の特性函數にとることが出來る。[1] φ_n は，更に次の條件を満足するとしてよい。

(2) β-測度 $\dfrac{1}{2^n}$ の集合上を除いて，$\displaystyle\int_\Omega |\varphi(t, \mathfrak{p})-\varphi_n(t, \mathfrak{p})|\, m(dU)<\frac{1}{4^n}$.

明かに，$\varphi_n(t, \mathfrak{p})$ は單函數の表現函數である。この單函數を $s_n(t)$ とすれば，$s_n(t)$ は殆どすべての點で (o)-收斂する。この (o)-收斂極限と殆どすべての點で一致する函數を $x(t)$ とすれば，$\varphi(t, \mathfrak{p})$ は $x(t)$ の表現函數になる。$\varphi(t, \mathfrak{p})$ を表現函數とする (o)-可測函數も對等な函數を無視すれば一意に定まる。之を纏めて

---

(1) N. Dunford and B. J. Pettis, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 336 頁, 定理 1.3.3.

補助定理 2. X を抽象 S 空間とすれば，(o)-可測函數と，$R\times\Omega$ 上殆ど到る所有限値をとる $\beta\times m$-可測函數とは，對等な函數を無視すれば，後者は前者の表現函數として一對一對應する。

が得られる。

(o)-可測函數 $x(t)$ が (o)-可積分となる條件を，$x(t)$ の表現函數 $\varphi(t,\mathfrak{p})$ を使つて表さう。$x(t)$ を (o)-可積分とすれば，§2 の所論から $\int_R x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}$ と $\int_R \varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ とは互に對等である。即ち殆どすべての $\mathfrak{p}$ に對し，$\int_R \varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ が存在する。逆に $\int_R \varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ が殆どすべての $\mathfrak{p}$ に對して存在するとする。$\varphi(t,\mathfrak{p})\geqq 0$ として $\int_R x(t)\beta(dU)$ の存在を示さう。$x_n(t)=x(t)\frown ne$ と置けば，$\min\big(\varphi(t,\mathfrak{p}),n\big)$ は $x_n(t)$ の表現函數である。$\varphi_n(t,\mathfrak{p})=\min\big(\varphi(t,\mathfrak{p}),n\big)$ とすると，$x_n(t)$ のとる値は (o)-有界なる故に，

(3) 殆ど到る所 $\displaystyle\int_R x_n(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R \varphi_n(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$

となる。從て殆ど到る所，$x_n(t)\dashrightarrow x(t)\,(o)$ 及び $(o)\text{-}\lim\limits_{n,m}\int_R |x_n(t)-x_m(t)|\beta(dU)=0$ が得られる。即ち $x(t)$ は (o')-可積分である。然るに X の主イデヤルは K_6 型“正則”Fréchet 束なる故に，前節定理 3 により，$x(t)$ は (o)-可積分となる。之を纒めて

定理 1. X を抽象 S 空間とすれば，(o)-可測函數 $x(t)$ が (o)-可積分なるための條件は，$x(t)$ の表現函數 $\varphi(t,\mathfrak{p})$ に對し，殆ど到る所 $\int_R \varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ が存在することである。且このとき，殆ど到る所 $\int_R x(t)\beta(dU)_{(\mathfrak{p})}=\int_R \varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ となる。

が得られる。

今 R の外に集合 R' を考へ，$\mathfrak{R}_{R'},\beta'$ を R に於ける $\mathfrak{R}_R,\beta$ と同じ性質をもつ，R' の集合族及び測度函數とし，R と R' の直積を作り，測度 β,β' の直積を $\beta\times\beta'$ で表す。$x(t,t')$ を $R\times R'$ 上の (o)-可測函數とすれば，$x(t,t')$ に對して，Fubini の定理が成立つ。

定理 2. X を抽象 S 空間とすれば，(o)-可測函數 $x(t,t')$ が $R\times R'$ で (o)-可積分になるための條件は，殆どすべての t に對し $\int_{R'}|x(t,t')|\beta'(dU')$ が存在し，且 $\int_R\left\{\int_{R'}|x(t,t')|\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$ が存在することである。このとき，

$$\iint_{R\times R'} x(t, t')d(\beta\times\beta') = \int_R\left\{\int_{R'} x(t, t')\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$$

となる。

證明。$x(t, t')$ の表現函數を $\varphi(t, t', \mathfrak{p})$ とする。前定理により，$x(t, t')$ の (o)-可積分と殆ど到る所 $\iint_{R\times R'}\varphi(t, t', \mathfrak{p})d(\beta\times\beta')$ の存在することとは同義である。故に實函數に對する Fubini の定理を使へば，本定理が得られる。以上。

Y を K-空間，K^--空間，Bochner 束，(K_∞) を滿足するベクトル束，(K^-) を滿足するベクトル束の様に，條件 (μ) を滿足する K_6^- 型 “正則” Fréchet 束とし，X をその擴大抽象 S 空間とする。$y(t)$ で Y の値をとる R 上の函數を表すと，

補助定理 3. $y(t)$ が (o)-可測なるための條件は，$y(t)$ を X を値域とする函數と考へて (o)-可測なることである。

證明。必要條件であることは明かである。$y(t)$ を X を値域として (o)-可測とする。$y(t)\geqq 0$ としてよい。$y(t)$ のとる値は零測度集合上でとる値を除いて X の主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ に含まれる。$e\in Y$ としてよい。$y_n(t)=y(t)\frown ne$ と置くと，$y_n(t)$ のとる値は (o)-有界なる故に，補助定理 2 の證明から，$y_n(t)$ は Y を値域とする函數と考へて (o)-可測なることが判る。從て $y(t)$ は (o')-可測になる。前節定理 3 により $y(t)$ は Y を値域とする函數と考へて (o)-可測である。

定理 3. $y(t)$ が (o)-可積分なるための條件は，$|y(t)|$ が，X を値域とする函數と考へて，(o)-可積分にして且その (o)-積分が Y の要素となることである。

證明。必要條件であることは明かである。§2 の所論により，$y(t)\geqq 0$ の場合に證明すればよい。前補助定理と同じ記法を使へば，$y_n(t)$ は，そのとる値が (o)-有界なる故，Y を値域とする函數と考へて (o)-可積分である。定理 1 の證明と同様にして，$y(t)$ は (o')-可積分，從て (o)-可積分なることが證明される。以上。

$R\times R'$ で Y を値域とする函數を $y(t, t')$ で表すと，

定理 4. (o)-可測函數 $y(t, t')$ に對し，殆どすべての t に對し，$\int_{R'}|y(t, t')|\beta'(dU')$ が存在し，且 $\int_R\left\{\int_{R'}|y(t, t')|\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$ が存在するならば，$y(t, t')$

は (o)-可積分にして

$$\iint_{R\times R'} y(t,t')\,d(\beta\times\beta')=\int_R\left\{\int_{R'} y(t,t')\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$$

證明。 定理 2 の證明に準ず。　　以上。

定理 5. Y を抽象 L 空間とすれば，(o)-可測函數 $y(t,t')$ が $R\times R'$ で (o)-可積分になるための條件は，殆どすべての t に對し $\int_{R'}|y(t,t')|\beta'(dU')$ が存在し，且 $\int_R\left\{\int_{R'}|y(t,t')|\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$ が存在することである。このとき，

$$\int_{R\times}\int_{R'} y(t,t')d(\beta\times\beta')=\int_R\left\{\int_{R'} y(t,t')\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$$

となる。

證明。 定理 4 により，必要條件であることを示せばよい。$y(t,t')$ を (o)-可積分とすれば，§3 定理 4 により，$\|y(t,t')\|$ は可積分，從て殆どすべての t に對して，$\int_{R'}\|y(t,t')\|\beta'(dU')<+\infty$ となる故に，殆どすべての t に對して，$\int_{R'}|y(t,t')|\beta'(dU')$ が存在する。定理 2,3 を使つて $\int_R\left\{\int_{R'}|y(t,t')|\beta'(dU')\right\}\beta(dU)$ の存在が判る。　　以上。

定理 6. 前定理は，“X は抽象 L 空間である” を “X は Bochner 束である” に置き換へても成立つ。

證明。 前定理の證明と同方針による。$y(t,t')$ を (o)-可積分とするとき，殆どすべての t に對し $\int_{R'}|y(t,t')|\beta'(dU')$ の存在を云へばよい。f_n を Bochner 束を定義する正汎函數とすれば (第三編第一章 §5), $\int_{R\times R'}\int f_n\left(\left|y(t,t')\right|\right)d(\beta\times\beta')$ の存在から，殆どすべての t に對し，$\int_{R'} f_n\left(\left|y(t,t')\right|\right)\beta'(dU')$, $n=1,2,3,\dots$ が存在する。これから，殆どすべての t に對し，$\int_{R'}|y(t,t')|\beta'(dU')$ の存在が判る。　　以上。

上述の所論を例に依つて示さう。X として，R' 上の殆ど致る所有限値をとる可測函數の作る S 空間とする。本節の始めの所論に於て Ω を R' と考へることにより，$R\times R'$ 上で殆ど到る所有限値をとる可測函數 $\varphi(t,t')$ に於て，$\varphi(t,t')$ を t を固定して t' の函數と考へれば，殆どすべての t に對して X の要素を定める。$x(t)=\varphi(t,t')$ と置けば，$x(t)$ は (o)-可測である。逆に任意の可測函數はかゝる $\varphi(t,t')$ によつて表現される。$x(t)$ が (o)-可積分といふことと，殆どすべての t' に對し，$\int_R\varphi(t,t')\beta(dU)$ が存在すると云ふことは同義に

して，$\int_R x(t)\beta(dU)$ は $\int_R \varphi(t,t')\beta(dU)$ に外ならない。Yを X の部分空間として，絶對値の r 乘 $(0<r<+\infty)$ が可積分となる R' 上の可測函數の作る L_r 空間とすれば，Y の値をとる (o)-可測函數は，上述の $\varphi(t,t')$ が殆どすべての t に對し Y の要素を表すこと，即ち，$\int_{R'}|\varphi(t,t')|^r\beta'(dU)<+\infty$ なることにより特徴づけられ，このとき (o)-可積分であることは，$\int_R|\varphi(t,t')|\beta(dU)$ が Y の要素を表すこと，即ち，$\int_{R'}\left\{\int_R|\varphi(t,t')|\beta(dU)\right\}^r\beta'(dU)<+\infty$ なることと同義にして，(o)-積分は $\int_R\varphi(t,t')\beta(dU)$ に外ならない。本節の所論は，Y が R' 上の有界可測函數の作る M^* 空間（對等な函數を恒等視する）の場合を缺いでゐる。此處に於ては，(o)-可測，(o)-可積分の代りに (o')-可測，(o')-可積を考へるならば，上述の所論が成立つことを以下で示さう。M^* 空間は L 空間の共軛 Banach 束なることに注意すれば，Y を單位をもつ K^- 空間の共軛 Banach 束としたときを論ずれば，より一般な理論が得られることが判る。

以下 Y を單位をもつ K^--空間の共軛 Banach 束とする。前編第二章 §1 定理 1 により，Y は單位をもつ。e を Y の單位とし，表現 (Ω,e,μ) を考へると，Ω 上非稠密集合上を除いて有限値をとる連續函數の全體は Y の擴大抽象 S 空間である。之を X で表し，本節始めの記法を踏襲する。$y(t)$ で Y の値をとる R 上の函數とする。

定理 7. Y を單位をもつ K^--空間の共軛 Banach 束，X をその擴大抽象 S 空間とする。Y の値をとる R 上の函數 $y(t)$ に對して

(1°) $y(t)$ が (o')-可測なるための條件は，X を値域とする函數と考へて $y(t)$ が (o)-可測となることである。

(2°) (o')-可測な $y(t)$ が (o')-可積分なるための條件は，X を値域とする函數と考へて $|y(t)|$ が (o)-可積分且その (o)-積分が Y に屬することである。このとき積分の値は一致する。

證明。上述の記法を使つて證明する。

(1°) 必要條件であることは明かである。故に充分條件であることを示す。$y(t)$ を X を値域として (o)-可測とする。$y(t)$ の (o)-可測定義列 $s_n(t)$ を考へる。$y(t)$ のとる値が Y に於て有界，即ち $|y(t)|\leqq y_0$ なる $y_0\in Y$ が存在するならば，$|s_n(t)|\leqq y_0$ としてよい。從て $y(t)$ は Y を値域として (o)-可測になる。一般の場合を證明するには $y(t)\geqq 0$ としてよい。$y_n(t)=y(t)\frown ne$

と置けば，$y_n(t)$ は Y を値域として (o)-可測，從て $y(t)$ は (o')-可測になる。

(2°) 必要條件であることは明かであるから，充分條件なることを示す。$|y(t)|\leqq y_0$ なる $y_0\in Y$ が存在せば，その (o)-積分定義列 $s_n(t)$ は $|s_n(t)|\leqq y_0$ を滿足する樣にとることが出來るから，$y(t)$ は Y と値域として (o)-可積分にして積分の値は一致する。一般の場合を證明するには，$y(t)\geqq 0$ としてよい。$y_n(t)=y(t)\frown ne$ と置くと，$y_n(t)$ は Y を値域として (o)-可積分なる故，$y(t)$ は Y を値域として，$y_n(t)$ を (o')-積分定義列とする (o')-可積分函數なることが容易に判る。　以上。

今 Y を單位をもつ K^--空間 Z の共軛 Banach 束とする。$y(t)$ は任意の z に對し $y(t)(z)$ が可測ならば，**汎函數として弱可測**であると云ひ，また $y(t)(z)$ が可積分ならば，$y(t)$ は，**汎函數として弱可積分**であると云ふ。

定理 8. Y に就て前定理と同じ假定のもとに，(o')-可測函數 $y(t)$ が (o')-可積分なるための條件は，$|y(t)|$ が汎函數として弱可積分なることである。

證明。必要條件であることは明かなる故に，充分條件であることを示す。$|y(t)|$ の (o')-可積分なることを示せば充分であるから，$y(t)\geqq 0$ として證明を進めてよい。$y_n(t)=y(t)\frown ne$ とすれば，$|y_n(t)|\leqq ne$ なる故に，$y_n(t)$ は (o)-可積分である。$F_n=\int_R y_n(t)\beta(dU)$ と置くと，$0\leqq z\in Z$ に對し，$\lim_n F_n(z)=\lim_n \int_R y_n(t)(z)\beta(dU)=\int_R y(t)(z)\beta(dU)$ なる故に，$F_n\to F$ (o) なる $F\in Y$ が存在し，$F(z)=\int_R y(t)(z)\beta(dU)$ となる。これから $y_n(t)$ が $y(t)$ の (o')-積分定義列なることが容易に判る。故に $y(t)$ は (o')-可積分である。　以上。

定理 9. Z が可分ならば，Y の値をとる函數 $y(t)$ に對して，(o')-可測と汎函數として弱可測とは同義である。

證明。$y(t)$ が (o')-可測ならば，汎函數として弱可測なることは，(o')-可測の定義から容易に判る。今 $y(t)$ を汎函數として弱可測とする。z_0 を Z の單位とし，Y の表現 (Ω, e, μ) に於て $m(E)=\mu(E)(z_0)$ とすれば，Y の要素の表現函數は m-可積分である。m-可積分函數の全體の作る L 空間を Y_1 とし，Y の要素とその表現函數を恒等視して，Y を Y_1 に埋藏する。z_0 に關して有界な要素の全體は，Y の共軛ベクトル束を作る。Z が可分なることから，m-可測集合は m に關して可分となることが容易に云へるから，Y_1 は可分である。故に $y(t)$ は Y_1 を値域とする函數と考へて，Bochner の意味で可測と

なる。從て $y(t)$ は X を値域とする函數と考へて (o)-可測となる故に，定理 7 を使つて，$y(t)$ は Y を値域とする函數と考へて (o')-可測になる。以上。

本定理により，R' の可測集合が β' に關して可分のとき，R' 上の有界可測函數の作る M^* 空間を値域とする R 上の函數に對しては，(o')-可測と汎函數として弱可測とは同義になる。

§5. 測度函數が無限大値をとり得る場合。

以上の所論に於ては，記述を簡單にするため，$\beta(R)<+\infty$ とした。$\beta(R)=+\infty$ となり得る場合を考へやう。即ち $\beta(U)$ は，$\mathfrak{R}_R$ の完全加法的非負實集合函數にして，$+\infty$ なる値もとり得るとする。$0<\beta(U)<+\infty$ なる $U\in\mathfrak{R}_R$ の存在を假定する。かゝるとき，β を R の**測度函數**と呼ぶ。X を完全ベクトルとするとき，R 上殆どすべての點で定義された，X を値域とする函數を $x(t)$ で表す。$x(t)$ のとる値が有限個，例へば，$a_1, a_2, \dots, a_k$ にして，各 $\left(t; x(t)=a_j\right)$，$j=1,2,\dots k$ が $\mathfrak{R}_R$ に屬し，$a_j\neq 0$ のとき，$\beta\Big(\left(t; x(t)=a_j\right)\Big)<+\infty$ ならば，$x(t)$ は**單函數**であると云ひ，一般に $s(t)$ で表す。このとき，$\int_R s(t)\beta(dU)=\sum_1^k \beta\Big(\left(t; s(t)=a_j\right)\Big)a_j$ と定める。但し $a_j=0$ のとき，$\beta\Big(\left(t; s(t)=a_j\right)\Big)a_j=0$ と定める。$x(t)$ が單函數列 $s_n(t)$ の殆どすべての點で (o)-收斂極限となるとき，$x(t)$ は (o)-**可測**であると云ひ，特に $\int_R |s_n(t)-s_m(t)|\beta(dU)\to 0\,(o)$ $(m,n\to+\infty)$ なる樣に $s_n(t)$ をとり得るとき，$x(t)$ は (o)-**可積分**であると云ひ，(o)-$\lim\int_R s_n(t)\beta(dU)$ をその R 上に於ける (o)-**積分**と云ふ。(o')-**積分**に就いても同樣に定義する。前節までの所論は，この新に定義した (o)-積分，(o')-積分等に對し，擴張することが出來る。單に同樣な議論を繰返すに過ぎないから省略する。これ等の議論が本質的には R の測度が有限の場合に歸せられることは次の樣にすれば明かである。(o)-積分の定義から明かな樣に，一般の場合は本質的には R が測度が有限な高々可附番個の可測集合の和となる場合に歸せられる。$R=\sum R_n$，$R_nR_m=0$ $(n\neq m)$ $R_n\in\mathfrak{R}_R$，$n=1,2,\dots$ 且 $\beta(R_n)<+\infty$ とする。正數列 λ_n，$n=1,2,3,\dots$ を $\sum\lambda_n\beta(R_n)<+\infty$ なる樣にとり，$\beta_0(U)=\sum\lambda_n\beta(R_nU)$，$U\in\mathfrak{R}_R$ と置けば，$\beta_0(U)$ は，$\mathfrak{R}_R$ の完全加法的測度にして，$\beta_0(R)<+\infty$ である。β の代りに β_0 を使ふことにより，本質的には，R の測度が有限なるときに歸着せしめられる。次章以下に於ても，所論を簡單にするため，主として $\beta(R)<+\infty$ のときに限る。

第二章 Radon-Nikodym 型定理

§1. Banach 空間に於ける Radon-Nikoydm 型定理。

本章に於ては，R, $\mathfrak{R}_R$, β は前章第二節に於て定義せられたと同じ意味をもつものとする。先づ X を Banach 空間とし，$F(U)$ を X を値域とする $\mathfrak{R}_R$ 上で定義せられた完全加法的集合函數とする。$U=\sum_1^n U_i$, $U_iU_j=0\ (i\neq j)$, $U_i\in\mathfrak{R}$ なるあらゆる U の分割に對し，$\sum_1^n\|F(U_i)\|$ の上端を U 上に於ける $F(U)$ の**全强變動**と云ひ，$\operatorname*{var}_U\|F\|$ で表す。$\operatorname*{var}_R\|F\|<+\infty$ ならば，$F(U)$ は**有界强變動**であると云ふ。このとき，$\operatorname*{var}_U\|F\|$ は完全加法的集合函數である。今 $F(U)$ として，Bochner 不定積分 $\int_U x(t)\beta(dU)$ をとるならば，よく知られてゐるやうに，$\operatorname*{var}_U\|F\|=\int_U\|x(t)\|\beta(dU)$ となる。[1] 任意の完全加法的集合函數 $F(U)$ に對し，$\beta(U_n)\to 0$ のとき，$F(U_n)\to 0$ (强)[2] となることと，$\beta(U)=0$ のとき，$F(U)=0$ となることとは同義である。[3] $\beta(U_n)\to 0$ のとき，$F(U_n)\to 0$ (强) を滿足する $F(U)$ は，β に關して**絶對强連續**であると云はう。$F(U)$ が β に關する Bochner 不定積分ならば，上述から明かなる樣に，$F(U)$ は有界强變動且 β に關して絶對强連續な完全加法的集合函數である。逆にかゝる性質をもつ $F(U)$ が如何なる制限のもとに Bochner 不定積分になるかに就いては，未だ充分研究されてゐない問題である。これに對する充分條件として次の定理が成立つ。

定理 1. $F(U)$ を有界强變動且 β に關して絶對强連續な完全加法的集合函數とする。次の條件 (1°), (2°) (3°) の何れかが成立つとき，$F(U)$ は X を値域とする Bochner の意味で β に關して可測な函數の不定 Bochner 積分である。

(1°) X は可分共軛 Banach 空間である。

(2°) $\left(\dfrac{F(U)}{\beta(U)};\ U\in\mathfrak{R}_R\right)^{(4)}$ は制限的列的弱コムパクトである。

(3°) X は局所列的弱コムパクトである。

---

(1) 小笠原藤次郎：本紀要 **6** (昭 11) 52 頁.
(2) $\|F(U_n)\|\to 0\ (n\to+\infty)$ の意。
(3) K. Kunisawa：學士院紀事。**16** (昭 15), 68–72.
(4) $\beta(U)=0$ ならば，$\dfrac{F(U)}{\beta(U)}=0$ と定める。

證明。(1°) N. Dunford-B. J. Pettis により證明された定理から。[1]

(2°) β に關して可積分な實函數 $\varphi(t)$ の作る L 空間 $L(R)$ を考へる。$T\varphi=\int_R \varphi(t)F(dU)$ に依つて定義される $L(R)$ から X への變換 T は弱完全連續作用素[2]になるから，T のとる値は可分集合を作る。[3] 從て $\left(F(U); U\in\mathfrak{R}_R\right)$ は可分集合となる故に R. S. Phillips の定理により，$F(U)$ は Bochner 不定積分である。

(3°) $\sigma(U)=\underset{U}{\mathrm{var}}\|F\|$ と置けば，$\left(\dfrac{F(U)}{\sigma(U)}; U\in\mathfrak{R}_R\right)$ は制限的列的弱コムパクトである。故に (2°) により，$F(U)$ は σ に關する Bochner 不定積分 $F(U)=\int_U x_1(t)\sigma(dU)$ となる。實集合函數に關する Radon-Nikodym の定理により $\sigma(U)=\int_U \varphi(t)\beta(dU)$ なる實可積分函數 $\varphi(t)$ が存在する。$x(t)=\varphi(t)x_1(t)$ と置けば，$F(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$ となる。

(3°) の場合の別證明。β に關して可積分な實函數の作る L 空間を $L(R)$ で表すと，Radon-Nikodym の定理を使つて，$f\in\bar{X}$ に對し，$fF\left((U)\right)=\int_U \varphi(t)\beta(dU)$ なる $\varphi\in L(R)$ が定まる。X は局所列的弱コムパクトなる故 $\bar{X}$ も局所列的弱コムパクトである。[4] また $\|f\|\leqq 1$ のとき，$\left|f\left(F(U)\right)\right|\leqq \underset{U}{\mathrm{var}}\|F\|$ となるから，變換 $Tf=\varphi$ は $\bar{X}$ の單位球を $L(R)$ の (o)-有界集合に移す。故に後に證明する定理によつて[5] $\bar{X}$ の單位球の T による像は制限的コムパクトになる。從て $(\varphi; Tf=\varphi, f\in\bar{X})$ は可分集合となるから，β に關して可分な $\mathfrak{R}_R$ の部分 Borel 族 $\mathfrak{R}'$ が存在し，上述の $\varphi(t)$ は $\mathfrak{R}'$ に關して可測としてよい。$\left(F(U); U\in\mathfrak{R}'\right)$ の張る可分部分 Banach 空間を X_0 とすれば，X_0 は局所列的弱コムパクトなる故 X_0 は正則 Banach 空間である。Dunford-Pettis[6] の證明法に從へば，$U\in\mathfrak{R}'$ に對して $F(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$ (Bochner 積分) と書ける。任意の $U\in\mathfrak{R}_R$ に對し $F(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$ なることを示せばよい。$U\in\mathfrak{R}'$ に對し $\int_U f\left(x(t)\right)\beta(dU)=f\left(F(U)\right)=\int_U \varphi(t)\beta(dU)$ から，$\big(t;$

(1) N. Dunford-B. J. Pettis: Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 323-392. 定理 2.1.0.
(2) $(Tx; \|x\|\leqq 1, x\in L(R)$ が制限的列的弱コムパクトになる意。
(3) 第五編第二章 §2 定理 7.
(4) V. Gantmacher and V. Smulian: C. R. U. R. S. S. **17** (1937), 91-94 定理 3.
(5) 第五編第一章 §1 定理 4.
(6) N. Dunford and B. J. Pettis: 前掲定理 2.1.0.

$f\bigl(x(t)\bigr) \neq \varphi(t)\bigr)$ は零測度集合を作る。故に任意の $U \in \mathfrak{R}_R$ に對して $f\bigl(F(U)\bigr) = \int_U \varphi(t)\beta(dU) = \int_U f\bigl(x(t)\beta(dU)\bigr) = f\Bigl(\int_U x(t)\beta(dU)\Bigr)$ から，$F(U) = \int_U x(t)\beta(dU)$ が得られる。　　　　以上。

Banach 空間が Dunford-Morse の意味の基底をもつ，即ち，$\sum_1^\infty \lambda_n x_n$ はその部分和が有界のときに限り强收斂する如き基底 $\{x_n\}$ をもつ場合は本定理 (1°) の特例である。(1)

§2. ベクトル束に於ける Radon-Nikodym 型定理。

X を完全ベクトル束とし，$F(U)$ を X を値域とする $\mathfrak{R}_R$ 上の加法的集合函數とする。$\bigl(F(U); U \in \mathfrak{R}_R\bigr)$ が (o)-有界のとき，$F(U)$ は **(o)-有界**であると云ふ。また $\beta(U_n) \to 0$ のとき，$F(U_n) \to 0$ (o) となるとき，$F(U)$ は**絕對 o-連續**であると云ふ。$F_1(U)$, $F_2(U)$ に對して，半順序 $F_1 \geqq F_2$ を，すべての $U \in \mathfrak{R}_R$ に對して $F_1(U) \geqq F_2(U)$ のときと定める。

補助定理 1. X が K_6^- 型 "正則" ベクトル束ならば，(o)-有界，絕對 (o)-連續加法的集合函數の全體は，完全ベクトル束を作る。更に X が單位 e をもつならば，任意の絕對 (o)-連續正加法的集合函數 $F(U)$ に對し，$F = \bigvee_n (F \frown n\beta e)$ となる。

證明。$F(U)$ を (o)-有界，絕對 (o)-連續加法的集合函數とすれば，X の "正則" 性から正要素 $a \in X$ が存在し，正數 ε に對し正數 δ が定まり，$\beta(U) \leqq \delta$ のとき，$|F(U)| \leqq \varepsilon a$ となる。F の正部分を F_+ とすれば，明かに $\beta(U) \leqq \delta$ のとき $|F_+(U)| \leqq \varepsilon a$ となり F_+ は絕對 (o)-連續である。從て絕對 (o)-連續加法的集合函數の全體はベクトル束を作る。これが完全ベクトル束であることは容易に判る。次に $F \geqq 0$ とし，X は單位 e をもつとする。e を恒等的に 1 にするやう X をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し，$x \in X$ の表現函數を $x_{(\mathfrak{p})}$ で表すと，$a_{(\mathfrak{p})} < +\infty$ なる點 $\mathfrak{p}$ に於ては $F(U)_{(\mathfrak{p})}$ は非負實完全加法的集合函數且 β に關して絕對連續である。第一種集合 (U に依存する) 上を除いて $(F \frown n\beta e)(U)_{(\mathfrak{p})}$ は，$F(U)_{(\mathfrak{p})}$ と $n\beta(U)$ との加法的集合函數としての下端になる。從て實集合函數に對する定理を使へば，第一種集合 (U に依存する) 上を除いて $F(U)_{(\mathfrak{p})} = \lim_n (F \frown n\beta e)(U)_{(\mathfrak{p})}$. 故に $F = \bigvee_n (F \frown n\beta e)$.　　　　以上。

(1) L. Alaoglu: Annals of Math. **41** (1940) 252-267, 定理 2: 2.

補助定理 2. X が非本義的公理[1]を滿足する“正則”ベクトル束ならば，絶對 (o)-連續，加法的集合函數 $F(U)$ は (o)-有界である。

證明。$F(U)$ は (o)-有界でないとすれば，X が非本義的公理を滿足するベクトル束なる故，$\beta(U_n)\to 0$ 且 $\big(F(U_n); n=1,2,3,\ldots\big)$ が (o)-有界でない $U_n\in\mathfrak{K}_R$, $n=1,2,3,\ldots$ が存在する。然るに $F(U)$ は絶對 (o)-連續なる故，$F(U_n)\to 0$ (o) となり，$\big(F(U_n); n=1,2,3,\ldots\big)$ は (o)-有界となる。從て矛盾が起る。 以上。

補助定理 3. X が條件 (μ)[2] を滿足するベクトル束ならば，(o)-有界，絶對 (o)-連續，加法的集合函數の全體は，完全ベクトル束を作る。更に X が單位 e をもつならば，任意の絶對 (o)-連續正加法的集合函數 $F(U)$ に對し，$F=\bigvee_n (F\frown n\beta e)$ となる。

證明。$F(U)$ を (o)-有界，絶對 (o)-連續加法的集合函數とすれば，$|F(U)|\leqq c$ なる $c\in X$ が存在する。c に關して有界な X の要素の全體を X_c とすれば，X_c を正規部分空間とする抽象 L 空間の存在が判る。之を Y とすれば，Y は K_6 型“正則”ベクトル束なる故，補助定理 1 を使つて F の正部分 F_+ も絶對 (o)-連續な X を値域とする集合函數なることが判る。本補助定理の殘りの部分も補助定理 1 と同樣にして證明される。 以上。

集合函數 $F(U)$ はすべての $U\in\mathfrak{K}$ に對し $|F(U)|\leqq\beta(U)a$ なる正要素 $a\in X$ が存在するとき，**Lipschitz 條件**を滿足するといひ，かゝる a の下端を **Lipschitz 常數** (abstract constant) と呼ぶ。

定理 1. X が條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束ならば，Lipschitz 條件を滿足する任意の加法的集合函數 $F(U)$ は不定 (o)-積分である。

證明。a を $F(U)$ の Lipschitz 常數とし，a に關して有界な X の要素の全體を X_a とする。X_a を正規部分空間として埋藏する抽象 L 空間が存在する。之を Y とすれば，$F(U)$ は，Y を値域とする集合函數と考へると，$\left(\dfrac{F(U)}{\beta(U)};\ U\in\mathfrak{K}_R\right)$ は制限的列的弱コムパクトとなる故，前節定理 1 により $F(U)$ は Bochner 不定積分 $\int_U x(t)\beta(dU)$ となる。$x(t)$ は $|x(t)|\leqq a$ としてよいから，$x(t)$ は X に於て (o)-可測となり，$\int_U x(t)\beta(dU)$ はその不定 (o)-積分と一致する。 以上。

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math., **44** (1937), 121–165. §5.

(2) 第三編第二章 §4 參照。

今 X を條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束とし，$F(U)$ を (o)-有界，絶對 (o)-連續，加法的集合函數とする。$F(U)$ は (o)-有界であるから，すべての $U\in\mathfrak{K}_R$ に對し，$|F(U)|\leqq a$ なる正要素 a が存在する。F の正部分 F_+ を考へ，$F_n=F_+\frown n\beta a$ と置くと，定理 1 により，$F_n(U)=\int_U x_n(t)\beta(dU)$, $o\leqq x_n(t)\leqq a$ なる (o)-可測集合 $x_n(t)$ が存在する。$x_n(t)\leqq x_{n+1}(t)$, $n=1,2,3,\dots$ としてよい。

(1)　殆どすべての點で　　$x_+(t)=(o)\text{-}\lim\limits_n x_n(t)$

なる $x_+(t)$ の存在が保證される場合には，$F_+(U)=(o)\text{-}\lim\limits_n F_n(U)=\int_U x_+(t)\beta(dU)$ となり，$F_+(U)$ は (o')-不定積分になる。故に (1) が保證される場合を調べることにより，次の諸定理を得る。

定理 2.　X が抽象 S 空間或は Bochner 束の場合には，$F(U)$ が不定 (o)-積分なるための條件は，$F(U)$ が (o)-有界，絶對 (o)-連續，加法的集合函數となることである。

證明。必要條件であることは前章所論から自明。$F(U)$ を (o)-有界，絶對 (o)-連續，加法的集合函數とすれば，$|F(U)|\leqq a$ なる正要素 a が存在する。a に關して有界な要素の全體を正規部分空間として含む抽象 L 空間 Y を X の部分空間と考へることが出來る。$F(U)$ を Y を値域とする集合函數と考へる。$\sigma(U)=\operatorname*{var}\limits_n\|F_+\|$ と置くと，$\sigma(U)=\|F_+(U)\|$. $\sigma(U)=\int_U\varphi(t)\beta(dU)$ なる實可積分函數 $\varphi(t)$ が存在する。上述の記法を踏襲して (1) が成立することを示す。$0\leqq F_n(U)\leqq F_+(U)$ から，$\|F_n(U)\|=\int_U\|x_n(t)\|\beta(dU)\leqq\|F_+(U)\|=\int_U\varphi(t)\beta(dU)$ となる故，殆どすべての點で $\|x_n(t)\|\leqq\varphi(t)$ となる。故に K-空間の性質[1] からかゝる點 t では，$\{x_n(t)\}$ は (o)-收斂する。これから，$F_+(U)$ は不定 (o')-積分，從て不定 (o)-積分となる。$F_-(U)$ についても同樣であるから，$F(U)$ は不定 (o)-積分である。　　　　以上。

定理 3.　X が抽象 L 空間ならば，次の命題は互に同義である。

(1°)　$F(U)$ は不定 Bochner 積分である。

(2°)　$F(U)$ は不定 (o)-積分である。

(3°)　$F(U)$ は絶對 (o)-連續，加法的集合函數である。

(1)　第三編第二章 §2 條件 (K).

證明。前定理證明參照。 以上。

定理 4. X が K-空間ならば，$F(U)$ が不定 Bochner 積分なるための條件は，$F(U)$ が有界强變動，絶對 (o)-連續，加法的集合函數となることである。

證明。定理 3 の證明參照。 以上。

本定理からも，Banach 空間として正則な Banach 束に於ては，有界强變動，絶對强連續，加法的集合は常に絶對 (o)-連續なることが知られる。

定理 5. X が K-空間ならば，$F(U)$ が不定 (o)-積分なるための條件は，$F(U)$ が絶對 (o)-連續な加法的集合函數にして，且任意の正數 ε に對し高々測度 ε の集合を除いた R の部分集合上で $F(U)$ が有界强變動となることである。

證明。$F(U)$ を不定 (o)-積分 $\int_U x(t)\beta(dU)$ とすれば，正數 ε に對し，$\beta\big((t;\|x(t)\|>\lambda)\big)<\varepsilon$ なる λ をとり，$R'=\big(t;\|x(t)\|\leqq\lambda\big)$ と置くと，$\operatorname*{var}_{R'}\|F\|\leqq\lambda\beta(R')$ となる。これから必要條件であることの證明が容易に得られる。充分であることの證明は，定理 2 の證明法に準じて行へばよい。 以上。

例 1. R として閉區間 $[0,1]$ をとり，$\mathfrak{R}$ を Lebesgue 可測集合，β を Lebesgue 測度函數とする。X を列空間 (l^2) とし，$\{x_{ij}\}$，$i,j=1,2,3,\dots$ を X の正要素からなる完全正規直交系とし，單函數 $s_n(t)$ を，$\frac{i-1}{2^n}\leqq t<\frac{i}{2^n}$ $(i=1,2,\dots 2^n)$ のとき $s_n(t)=x_ni$，及び $s_n(1)=0$ と定める。$F(U)=\sum_1^\infty\int_U s_n(t)dt$ と置くと，$F(U)$ は絶對 (o)-連續，正加法的集合函數になるが，不定 (o)-積分でないことは容易に知られる。

次に X を可分 K^--空間 Z の共軛 Banach 束とし，$F(U)$ を X を値域とする有界强變動な加法的集合函數とする。すべての $z\in Z$ に對し，$F(U)(z)$ が絶對連續のとき，$F(U)$ は**汎函數として絶對弱連續**であると云ふ。

定理 6. X を，可分 K^--空間の共軛 Banach 束とし，$F(U)$ を，X を値域とする有界强變動な加法的集合函數とする。次の命題は互に同義である。

(1°) $F(U)$ は汎函數として絶對弱連續である。

(2°) $F(U)$ は絶對强連續である。

(3°) $F(U)$ は絶對 (o)-連續である。

(4°) 汎函數として弱可測函數 $x(t)$ が存在し，$z\in Z$ に對し，$F(U)(z)=$

$$\int_U x(t)(z)\beta(dU),\quad \operatorname*{var}_U \|F\| = \int_U \|x(t)\|\beta(dU)$$ となる。

(5°) $F(U)$ は不定 (o')-積分である。

證明。(1°), (2°), (4°) の同義は，本質的には，Dunford-Pettis が證明した。[1]

(4°)→(5°) 前章 §4 定理 9 により $x(t)$ は (o')-可測である。$\|z\|\leqq 1$ のとき，$||x(t)|(z)|\leqq\|x(t)\|$ なる故，$|x(t)|$ は汎函數として弱可積分，從て前章 §4 定理 8 により，$F(U)$ は不定 (o')-積分である。

(5°)→(3°)→(1°) は自明。 以上。

§3. 不定 (o)-積分と (o)-微分。

前章例 1 に於ける樣に R を閉區間 $[0,1]$, β を Lebesgue 測度函數とする。今 X を條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束とし，$F(U)$ を (o)-有界，絶對 (o)-連續，加法的集合函數とし，X の擴大抽象 S 空間を Y とする。$|F(U)|\leqq a$ なる正要素 $a\in X$ が存在する。$F(U)$ は (o)-有界，絶對 (o)-連續なる故，Y に於ける主イデヤル $\mathfrak{A}(a)$ を考へると，$e\in\mathfrak{A}(a)$ なる正要素 e が存在し，正數 ε に對し，正數 δ が定まり，$\beta(U)\leqq\delta$ のとき，$|F(U)|\leqq\varepsilon e$ となる。尙 e を $a\leqq e$ なる樣に選ぶ。故に $\mathfrak{A}(e)=\mathfrak{A}(a)$ となる。e を恒等的 1 とする樣，$\mathfrak{A}(e)$ を表現ブール空間 Ω の連續函數のベクトル束で同型表現し，$y\in\mathfrak{A}(e)$ の表現函數を $y_{(\mathfrak{p})}$ で表し，條件 (μ) により，Ω に導入される測度函數を $m(E)$ とすれば，E が零測度集合であることと第一種集合であることとは同義である。

今 $g(t)=F([0,t])$ と置き，$g(t)$ の t に關する微分に就いて考へやう。$t<0$ のとき $g(t)=0$, $t>1$ のと $g(t)=g(1)$ と定義する。$g(t)_{(\mathfrak{p})}$ は $(t,\mathfrak{p})$ の連續函數になる。$t\in[0,1]$ に對し，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\overline{\lim_{h\to 0}}\dfrac{g(t+h)_{(\mathfrak{p})}-g(t)_{(\mathfrak{p})}}{h}$, $\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\underline{\lim_{h\to o}}\dfrac{g(t+h)_{(\mathfrak{p})}-g(t)_{(\mathfrak{p})}}{h}$ と置くと，$\mathfrak{p}$ を固定すれば，$g(t)_{(\mathfrak{p})}$ は絶對連續函數であるから，殆どすべての點 t で $g(t)_{(\mathfrak{p})}$ は可微分，從て $\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$. $[0,1]$ と Ω の積空間を考へると，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})\neq\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$ なる $(t,\mathfrak{p})$ は $\beta\times m$ 測度 0 の集合を作る。故に殆どすべての t に對し，第一種集合 (t の値に依存する) 上を除いて，$\overline{\varphi}(t,\mathfrak{p})=\underline{\varphi}(t,\mathfrak{p})$, 即ち殆どすべての t に對し，$\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}$ は，$h\to 0$ のとき Y の一要素に (o)-收斂する。然るに $F(U)$ は Y に於て不定 (o)-積

(1) N. Dunford and B. J. Pettis: 前揭，定理 2.1.0. 尙前章 §4 定理 9 參照.

分 $\int_U y(t)dt$ なる故，$\Psi(t, \mathfrak{p})$ を $y(t)$ の $\beta\times m$ 可測な表現函數とすれば，Ω の第一種集合上を除いて，$g(t)=\int_0^t \Psi(t, \mathfrak{p})\,dt$ なる故，これから $\beta\times m$ 測度 0 の集合を除いて $\overline{\varphi}(t, \mathfrak{p})=\underline{\varphi}(t, \mathfrak{p})=\Psi(t, \mathfrak{p})$ となることが判る。故に殆どすべての點で $(o)\text{-}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}=y(t)$ なることが判る。此處に注意すべきことは，$(o)\text{-}\lim\limits_{h\to 0}$ は Y に於ける (o)-極限を意味するもので，X に於てではない。

$y(t)$ の性質を尚少しく調べる。$[0,1]$ の任意の分割 $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ に對し，$\sum\limits_1^n|g(t_i)-g(t_{i-1})|\leqq \operatorname*{var}\limits_0^1 F$ なる故，$g(t)$ は有界 (o)-變動である。また内點を共有しない區間 $[t_{i_1}, t'_{i_1}], \dots [t_{i_k}, t'_{i_k}]$ の長さの和 $\sum\limits_{j=1}^k|t_{i_j}-t'_{i_j}|$ が 0 に收斂するとき，$\sum\limits_{j=1}^k|g(t_{i_j})-g(t'_{i_j})|\to 0\ (o)$ となる。一般にかゝる性質をもつ $g(t)$ は**絶對 (o)-連續**であると云ふ。$g(t)$ を任意の有界 (o)-變動，絶對 (o)-連續な函數とすれば，第五編で説明する様に，$F([0, t])\equiv g(t)-g(o)$ なる (o)-有界，絶對 (o)-連續，加法的集合函數 $F(U)$ が一意に定まる。(1)

定理 1. Xを條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束とする。$[0,1]$ 上の (o)-可測函數 $x(t)$ が (o)-可積分のとき，$g(t)=\int_0^t x(t)dt$ とすれば，殆どすべての點に於て，$g(t)$ は，X の擴大抽象 S 空間に於て，$x(t)$ に (o)-可微分である。

證明。上述の所論から。但し (o)-可微分とは，$(o)\text{-}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}$ が存在することを云ふ。

例 1. $X=(l^2)$ とし，正要素よりなる完全正規直交系 $\{x_{ij}\}$, $(i, j=1, 2, 3, \dots)$ を考へる。單函數 $s_n(t)$ を，$\dfrac{i-1}{2^n}\leqq t<\dfrac{i}{2^n}+\dfrac{1}{2^{2n}}$ のとき，$s_n(t)=2^n x_{ni}$, $(i=1, 2, \dots 2^n)$，その他の t に對して $s_n(t)=0$ と定める。$\sum\limits_1^\infty s_n(t)$ は殆どすべての點で收斂する。之を $x(t)$ とすれば，$\sum\limits_1^n s_i(t)$ が (o)-積分定義列となり，$x(t)$ は (o)-可積分である。このとき $g(t)=\int_0^t x(t)dt$ はすべての點 t で强可微分でないことが示される。

第三章 ベクトル値集合函數の積分

§1. $\bigvee^p(X)$, $1<p<+\infty$

Γ を基本集合，$\mathfrak{M}$ を Γ の或部分集合からなる空集合を含む乘法的集合族

(1) 第五編第二章 §1 定理 4 の證明中に，これに就いての證明の概略が記されてゐる。

とする。此處に**乗法的**とは，任意の $U_1, U_2 \in \mathfrak{M}$ と共に $U_1U_2 \in \mathfrak{M}$ となる意である。互に素な $\mathfrak{M}$ の要素からなる $\mathfrak{M}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ は，$\sum_{U\in\mathfrak{D}} U=\Gamma$ のとき，Γ の**分割**と云ひ，$U\in\mathfrak{D}$ なる $U\in\mathfrak{M}$ を **分割** $\mathfrak{D}$ **の要素**と云ふ。分割 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ に對し，分割 $(UU'; U\in\mathfrak{D}, U'\in\mathfrak{D}')$ を $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ で表し，また任意の $U\in\mathfrak{M}$ に對し，$(UU'; U'\in\mathfrak{D}')$ を $\mathfrak{D}'U$ で表す。$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ のとき，$\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D}'$ の**細分割**と云ひ，之を $\mathfrak{D}\geqq\mathfrak{D}'$ で表す。Γ には次の條件を滿足する**分割系** $\{\mathfrak{D}\}$ が存在すると假定する。

(i) 互に素な $U_i\in\mathfrak{M}, i=1,2,\dots n$ に對し，$U_i\in\mathfrak{D}$，$i=1,2,\dots n$ なる $\mathfrak{D}\in\{\mathfrak{D}\}$ が存在する。

(ii) $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\in\{\mathfrak{D}\}$ ならば，$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\in\{\mathfrak{D}\}$

(iii) 任意の $U\in\mathfrak{M}$，及び $\mathfrak{D}\in\{\mathfrak{D}\}$ に對し，$\mathfrak{D}U$ は有限個の $\mathfrak{M}$ の要素からなる。

以下分割と云へば $\{\mathfrak{D}\}$ に屬するものと考へる。

乗法的集合族 $\mathfrak{M}$ 及び分割系 $\{\mathfrak{D}\}$ の例として

例 1. $\mathfrak{M}$ を Borel 族，$\{\mathfrak{D}\}$ を Γ を有限個の互に素な $\mathfrak{M}$ の要素に分ける分割の全體とする。

例 2. $\Gamma=\sum_{\alpha}\Gamma_\alpha$ (Γ_α は互に素) とし，$\mathfrak{D}=\{\Gamma_\alpha\}$ なる $\mathfrak{D}\in\{\mathfrak{D}\}$ が存在し，Γ_α に含まれる $\mathfrak{M}$ の要素は Borel 族を作る。

例 3. Γ を有限或は無限區間，$\mathfrak{M}$ を半閉區間(一定の向きが閉ぢた)の集合とし，Γ を有限個の $\mathfrak{M}$ の要素に分けるあらゆる分割の全體を $\{\mathfrak{D}\}$ とする。

有限個の互に素な $\mathfrak{M}$ の要素の集合を一般に Δ で表し，$U'\in\mathfrak{M}$ に對し，$(UU'; U\in\Delta)$ を $\Delta U'$ で表す。Δ, Δ' に對し，$(UU'; U\in\Delta, U'\in\Delta')$ を $\Delta\Delta'$ で表し，$\Delta\geqq\Delta\Delta'$ のとき，$\Delta\geqq\Delta'$ と書く。

$\mathfrak{M}$ を定義域とし，ベクトル束を値域とする集合函數 $\xi(U)$ は $\xi(U)=\sum_{U'\in\mathfrak{D}U}\xi(U')$ を滿足するとき，**加法的**であると云ひ，$U=\sum_1^\infty U_n$，$U_nU_m=0\ (n\neq m)$ のとき，$\xi(U)=\sum_1^\infty\xi(U_n)$ $\big((o)$-收斂で$\big)$ のとき，**完全加法的**であると云ふ。以下 $\beta(U)$ を完全加法的非負實集合函數とする。

X を完全ベクトル束とし，p を 1 より大な任意の正數，p' をその**共軛數**，即ち，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ によつて定まる正數とする。今 $x_i\in X$，$i=1,2,\dots n$ とし，

實數 c_i を $\sum_1^n|c_i|^{p'}=1$ を滿足する限りに於て任意に選ぶとき，$\sum_1^n c_ix_i$ の上端を $(\sum_1^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ と定義する。X を値域とする加法的集合函數 $\xi(U)$ に對し.

定義 1. あらゆる $\varDelta$ に對し，$\left\{\sum_{U\in\varDelta}\frac{|\xi(U)|^p}{\beta(U)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$ が (o)-有界のとき，その上端を $\left\{\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)|^p}{\beta(dU)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$ 又は $N(\xi)$ (abstract norm と云ふ) と記し，$\xi(U)$ は **(p) 可積分**であると云ひ，$\xi\in\bigvee^p(X)$ と書く。

但し $\beta(U)=0$ のとき，$\xi(U)=0$ を滿足するとし，$\frac{0}{0}$ の形のものは 0 と定める。

X に單位が存在し，これを積單位とする樣 $|\xi(U)|^p$ がすべての $U\in\mathfrak{M}$ に對し定義され，

定義 2. あらゆる $\varDelta$ に對し，$\sum_{U\in\varDelta}\frac{|\xi(U)|^p}{\beta(U)^{p-1}}$ が (o)-有界のとき，その上端を $\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)|^p}{\beta(dU)^{p-1}}$ で表し，$\xi\in\overset{*}{\bigvee}{}^p(X)$ と書く。

定理 1. $\xi\in\bigvee^p(X)$ に對し，$\xi(U)\geqq 0$, $U\in\mathfrak{M}$ のとき，$\xi\geqq 0$ と定めると，$\bigvee^p(X)$ は完全ベクトル束を作る。

證明。$\xi_1,\xi_2\in\bigvee^p(X)$ とする。$\xi_1+\xi_2$ は $(\xi_1+\xi_2)(U)=\xi_1(U)+\xi_2(U)$ で定められてゐるが，

$$\left\{\sum_{U\in\varDelta}\frac{|\xi_1(U)+\xi_2(U)|^p}{\beta(U)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\left\{\sum_{U\in\varDelta}\frac{|\xi_1(U)|^p}{\beta(U)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{U\in\varDelta}\frac{|\xi_2(U)^p|}{\beta(U)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq N(\xi_1)+N(\xi_2)$$

から，$\xi_1+\xi_2\in\bigvee^p(X)$ 且 $N(\xi_1+\xi_2)\leqq N(\xi_1)+N(_2)$. また λ を任意の實數とすれば，$\lambda\xi_1\in\bigvee^p(X)$, $N(\lambda\xi_1)=|\lambda|N(\xi_1)$ なることも容易に示される。$\xi\in\bigvee^p(X)$ の正部分 ξ_+ に對し，

$$\left\{\frac{|\sum_{U'\in\varDelta U}\xi(U')|^p}{\beta(U)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\left\{\sum_{U'\in\varDelta U}\frac{|\xi(U')|^p}{\beta(U')^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

なる關係を使へば，$N(\xi_+)\leqq N(\xi)$ となり，$\xi_+\in\bigvee^p(X)$. 尙 $N(\xi)=N(|\xi|)$ も成立つ。但し $|\xi|$ は $\xi_++\xi_-$ を表す。$\bigvee^p(X)$ が完全ベクトル束であることも容易に判る。 以上。

定理 2. $V^p(X)$ に於て次の (1)−(5) が成立つ。

(1) $N(\xi)\geqq 0$, $\xi=0$ のときに限り $N(\xi)=0$

(2) $N(\xi_1+\xi_2)\leqq N(\xi_1)+N(\xi_2)$, $N(\lambda\xi)=|\lambda|N(\xi)$, 但し λ は實數。

(3) $|\xi_1|<|\xi_2|$ ならば, $N(\xi_1)<N(\xi_2)$, $N(\xi)=N(|\xi|)$.

(4) $\xi_n\downarrow 0$ ならば, $N(\xi_n)\downarrow 0$.

(5) $0\leqq\xi_1\leqq\xi_2\leqq\cdots$, $N(\xi_n)$ が (o)-有界のとき, $V\xi_n$ が存在する。

證明。(1) は定義 1 から明か。(2) 及び (3) の後半は定理 1 の證明中で述べた。(3) の前半に就いては, $0\leqq\xi_1<\xi_2$ の場合を證明すればよい。X の表現ブール空間を Ω とし, X を Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し, $x\in X$ の表現函數を $x_{(\mathfrak{p})}$ で表す。Ω の第一種集合 P を除いて,

$$N(\xi_i)_{(\mathfrak{p})}=\left\{\int_\Gamma\frac{|\xi_i(dU)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(dU)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}\qquad \mathfrak{p}\in\Omega-P,\quad i=1,2.$$

斯様な $\mathfrak{p}$ に於て, $F_i(U)=\xi_i(U)_{(\mathfrak{p})}$ と置くと, $F_i(U)$ は不定積分 $\int_U f_i(t)\beta(dU)$ の形に書かれ, $N(\xi_i)_{(\mathfrak{p})}=\left\{\int_\Gamma f_i(t)^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ となる。此處に $f_i(t)$ は $\mathfrak{M}$ を含む Borel 族に關して可測な函數で, β はこの Borel 族上の完全加法的集合函數 ($+\infty$ 値をもとる) に擴大して實函數の積分を定義するものとする。$\xi_1<\xi_2$ のため, 或 $U\in\mathfrak{M}$ に對し, $\xi_1(U)<\xi_2(U)$ となる故, Ω の或開集合 O で $\xi_1(U)_{(\mathfrak{p})}<\xi_2(U)_{(\mathfrak{p})}$ となる。故に $\mathfrak{p}\in O-P$ のとき, $\int_\Gamma f_1(t)^p\beta(dU)<\int_\Gamma f_2(t)^p\beta(dU)$. これから $N(\xi_1)<N(\xi_2)$ が判る。(4) に就いては, (3) と同様の記法を使ふと, Ω の第一種集合上を除いて, $\xi_n(U)_{(\mathfrak{p})}\downarrow 0$ が云へる。從て第一種集合上を除いて, 殆どすべての t に對し ($\mathfrak{p}$ に依存する) $f_n(t)\to 0$ となるから, $N(\xi_n)\downarrow 0$ が云へる。(5) に就いては, $\xi(U)=\bigvee_n\xi_n(U)$ と置けば, 定義 1 から $\xi\in\bigvee^p(X)$ が容易に判る。 以上。

定理。 $\bigvee^p(X)$ に於て, $\xi_1\frown\xi_2=0$ ならば, $N(\xi_1+\xi_2)=\{N(\xi_1)^p+N(\xi_2)^p\}^{\frac{1}{p}}$ が成立つ。

證明。前定理 (3) の記法を使ふ。Ω の第一種集合 P 上を除いて, $\xi_i(U)_{(\mathfrak{p})}$ は完全加法的集合函數である。$\xi_1\frown\xi_2=0$ から, P を, $\mathfrak{p}\in\Omega-P$ に對し, 集合函數として $\xi_1(U)_{(\mathfrak{p})}$ と $\xi_2(U)_{(\mathfrak{p})}$ の下端が 0 となる様にとることが出來る。從て殆ど到る所 $f_1(t)f_2(t)=0$ となり, $N(\xi_1+\xi_2)_{(\mathfrak{p})}=\left\{\int_\Gamma\left(f_1(t)+f_2(t)\right)^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$=\left\{\int_\Gamma f_1(t)^p\beta(dU)+\int_\Gamma f_2(t)^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}=\{N(\xi_1)^p_{(\mathfrak{p})}+N(\xi_2)^p_{(\mathfrak{p})}\}^{\frac{1}{p}}$$ となる。故に $N(\xi_1+\xi_2)=\{N(\xi_1)^p+N(\xi_2)^p\}^{\frac{1}{p}}$ を得る。 以上。

定理 4. X が $K_6^-(K_6)$ 型 “正則” ならば, $\vee^p(X)$ も $K_6^-(K_6)$ 型 “正則” である。

證明。 定理 2 を使へば, 本定理は更に一般な次の定理から從ふ。

以上。

定理 5. X をベクトル束, Z を $K_6^-(K_6)$ 型 “正則” ベクトル束とし, X の各要素 x に Z の値をとる $\|x\|$ が定義され

(1°) $\|x\| \geqq 0$. $x=0$ のときに限り $\|x\|=0$

(2°) $\|x_1+x_2\| \leqq \|x_1\|+\|x_2\|$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ λ は實數

(3°) $|x_1|<|x_2|$ ならば, $\|x_1\|<\|x_2\|$

(4°) $x_n \downarrow 0$ ならば, $\|x_n\| \downarrow 0$

(5°) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, 且 $\|x_n\|$ が (o)-有界ならば $\bigvee_n x_n$ が存在する。

を滿足するならば, X は $K_6^-(K_6)$ 型 “正則” ベクトル束である。

證明。 (2°), (3°) から容易に $\|x\|=\||x|\|$ が云へる。今各 n に對し, $x_{n,m} \downarrow 0$ $(m \to +\infty)$ なる $x_{n,m} \in X$ を考へると, Z の K_6^- 型 “正則” 性を使つて, 各 n に對し $\|x_{n,m}\|$ は $m \to +\infty$ のとき, 同一の要素 $z_0 \in Z$ に關して一樣 (o)-收斂する。今 m_n を $\|x_{n,m_n}\|<\frac{1}{2^n}z_0$ なる樣にとれば, (4°), (5°) を使つて $n \to +\infty$ のとき, $x_{n,m_n} \to 0$ (o) となることが判る。尚 (5°) から, X は σ-完全ベクトル束なることも容易に判るから, X は K_6^- 型 “正則” である。[1] Z を K_6 型 “正則” とすれば, (3°) を使へば, すべての第一級, 第二級の順序數 α に對して定義された $o \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_\alpha < x_{\alpha+1} < \cdots$ なる增加超限列が存在しないことが容易に判る。また, $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$ とし, 任意の $\lambda_n \downarrow 0$ なる正數列に對し, $\lambda_n x_n \to 0$ (o) とすれば, $\lambda_n\|x_n\| \to 0$ (o) となる故, Z の K_6 型 “正則” 性から $\{\|x_n\|\}$ は (o)-有界從て $\bigvee_n x_n$ が存在し, $\{x_n\}$ は (o)-有界になる。從て X は K_6 型 “正則” である。[2] 以上。

本定理に於て Z が非本義的公理を滿足する “正則” ベクトル束ならば, X も同じく非本義的公理[3]を滿足する “正則” ベクトル束であることが容易に證明される。

$\xi \in \vee^p(X)$ に對し, $N_U(\xi)=\bigvee_{\Delta}\left\{\sum_{U' \in \Delta U}\frac{|\xi(U')|^p}{\beta(U')^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$ と定めると,

(1) 小笠原藤次郎: 數物會誌, **16** (昭 17) 391-406. §8 參照。
(2) 同上。
(3) L. Kantorovitch: Recueil Math., **44** (1937), 121-155. §5 參照。

定理 6. $\vee^p(X)$ に於て，$U=\sum_1^\infty U_n,\ U_n U_m=0\ (n\neq m)$ ならば，$N_U(\xi)=\{\sum_1^\infty N_{U_n}(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$，また $N(\xi)$ は，あらゆる $\varDelta$ に對し $\{\sum_{U\in\varDelta} N_U(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$ の上端である。特に X が K_6^- 型“正則”ならば，$N_U(\xi)>0$ なる $\mathfrak{D}$ の要素は常に可附番にして，$N(\xi)=\{\sum_{U\in D} N_U(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$ となる。

證明。 定理 2 の證明中の記法を踏襲すれば，第一種集合 P を除くと，すべての $U\in\mathfrak{M}$ に對し，$N(\xi)_{(\mathfrak{p})}=\left\{\int_\Gamma \frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(dU)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$，$N_U(\xi)_{(\mathfrak{p})}=\left\{\int_U \frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(dU)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$ が成立つ。これから，$U=\sum_1^\infty U_n,\quad U_nU_m=0\quad(n\neq m)$ ならば，$N_U(\xi)=\{\sum_1^\infty N_{U_n}(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$ となることが判る。また $N(\xi)=\bigvee_{\varDelta}\{\sum_{U\in\varDelta}N_U(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$ も直ぐ判る。特に X を K_6^- 型“正則”とすれば，(o)-有界な，第一級，第二級の順序數に對して定義せられた增加超限列は存在しないから，本定理の最後の部分も容易に證明される。 以上。

$\sum_{U\in\varDelta_n}\beta(U)\to 0$ なる $\{\varDelta_n\}$ に對し，常に $\sum_{U\in\varDelta_n}|\xi(U)|\to 0\ (o)$ となるとき，$\xi(U)$ は β に關して**絕對 (o)-連續**であると云ふ。

定理 7. $\xi\in\vee^p(X)$ なる $\xi(U)$ は完全加法的且 β に關して絕對 (o)-連續である。

證明。 任意の $\varDelta$ に對し，$\sum_{U\in\varDelta}|\xi(U)|\leqq N(\xi)\{\sum_{U\in\varDelta}\beta(U)\}^{\frac{1}{p'}}$ となるから。

以上。

定理 8. $\xi\in\overset{*}{\vee}{}^p(X)$ ならば，$\int_U \frac{|\xi(dU)|^p}{\beta(dU)^{p-1}}$ は完全加法的且 β に關して絕對 (o)-連續である。

證明。 $\xi\in\overset{*}{\vee}{}^p(X)$ なる故に，X には單位 e の存在を假定してゐる。e を恒等的 1 とする樣に，K をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數で表現し，$x\in X$ の表現函數を $x_{(\mathfrak{p})}$ で表す。Ω の第一種集合を除外して Ω の各點 $\mathfrak{p}$ で，すべての $U\in\mathfrak{M}$ に對し $\int_U \frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(dU)^{p-1}}=\int_U \frac{|\xi(dU)|^p}{\beta(dU)^{p-1}}{}_{(\mathfrak{p})}$ が成立つことが云へる。然るに實集合函數として $\int_U \frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(dU)^{p-1}}$ は絕對連續なる故，これから本定理の成立が判る。 以上。

$\mathfrak{M}$ を含む最小の Borel 族を $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ とする。β は無限大値を許容すれば，$\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ 上の完全加法的非負實集合函數に擴大される。$\mathfrak{K}'=\big(B;\beta(B)<+\infty,$

$B\in\mathfrak{K}(\mathfrak{M})\big)$ と置くと，$\mathfrak{K}'$ は廣義のブール代數である。任意の $\xi\in\vee^p(X)$ は，$\mathfrak{K}'$ 上の完全加法的絶對 (o)-連續集合函數に擴大されることを示さう。$N(\xi)$ の生成する主イデヤルを $N(\xi)$ が恒等的に 1 となる様，表現ブール空間 Ω 上の連續函數で表現すれば，$\sum_{U\in\varDelta}|\xi(U)_{(\mathfrak{p})}|\leqq\{\sum_{U\in\varDelta}\beta(U)\}^{\frac{1}{p'}}$ を得る。$\mathfrak{p}$ を固定して考へ，$\varphi(U)=\xi(U)_{(\mathfrak{p})}$ と置くと，實函數 $\varphi(U)$ は，$\mathfrak{K}'$ 上の完全加法的絶對連續集合函數に一意的に擴大される[1]。之を同じ記號で φ で表す。$\bar{\varDelta}$ で，互に共通點のない $\mathfrak{K}'$ の有限個の集合からなる任意の集合族とすると，$\sum_{B\in\bar{\varDelta}}\frac{|\varphi(B)|^p}{\beta(B)^{p-1}}\leqq 1$ を得る。$\mathfrak{M}$ を含む最小の廣義のブール代數を $\mathfrak{K}''$ とすれば，$\mathfrak{K}''$ の任意の要素 A は，$A=(U_1-U_2)+(U_3-U_4)+\cdots+(U_{n-1}-U_n)$, $U_1\geqq U_2\geqq\cdots\geqq U_n=0$, $U_i\in\mathfrak{M}$, $i=1,2,\dots n$ なる形をもつ。$\xi(A)=\big(\xi(U_1)-\xi(U_2)\big)+\cdots+\big(\xi(U_{n-1})=\xi(Un)\big)$ と置けば，$\xi(A)_{(\mathfrak{p})}=\varphi(A)$ となり $\xi(A)$ は一意的の定まる。B を $\mathfrak{K}'$ の任意の要素とすれば，$\beta(A_n-B)+\beta(B-A_n)\to 0$ なる $A_n\in\mathfrak{K}'$ が存在する。$|\xi(A)|\leqq N(\xi)\beta(A)^{\frac{1}{p'}}$ から，$\xi(A_n)_{(\mathfrak{p})}$ は $n\to+\infty$ のとき，$\mathfrak{p}$ に關する連續函數に一樣收斂する。$\xi(B)=(o)\text{-}\lim_n\xi(A_n)$ と置くと，$\xi(B)_{(\mathfrak{p})}=\varphi(B)$ なるを知る。故に $\xi(B)$ は $\mathfrak{K}'$ 上の完全加法的絶對 (o)-連續集合函數となり，$\sum_{B\in\varDelta}\frac{|\xi(B)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(B)^{p-1}}\leqq 1$ を得る。これから $\bigvee_{\varDelta}\left\{\sum_{B\in\bar{\varDelta}}\frac{|\xi(B)|^p}{\beta(B)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}=N(\xi)$ となることが容易に判る。之を纏めて次の定理を得る。

定理 9. 任意の $\xi\in\vee^p(X)$ は，上述の $\mathfrak{K}'$ 上の完全加法的絶對 (o)-連續集合函數に一意的に擴大される。之を同じ記號で表す。$\mathfrak{K}'$ を乘法的集合族とする (p) 可積分函數空間を $\vee^p_{\mathfrak{K}'}(X)$ で表すとき，$\xi\to\xi$ なる對應により，$\vee^p(X)$ と $\vee^p_{\mathfrak{K}'}(X)$ とは，線形-束-同型にして且抽象ノルムは不變に保たれる。

§2. Radon-Nikodym 型定理。

X を完全ベクトル束とし，$\mathfrak{M}$ 上の加法的集合函數 $\xi(U)$ は，$\beta(U)=0$ のとき $\xi(U)=0$ を滿足するとし，任意の $\varDelta$ に對し，

$$\xi_\varDelta(U)=\sum_{U'\in\varDelta}\frac{\xi(U')}{\beta(U')}\beta(UU')$$

と置く。但し $\beta(U')=0$ のとき，$\frac{\xi(U')}{\beta(U')}=0$ と定める。$\xi_\varDelta$ を ξ の $\varDelta$ **上への射影**と云ふ。

(1) これの證明には，小笠原藤次郎： 本紀要，**7** (1937), 215-247. §2 參照。

補助定理 1. 與へられた正數 ε に對し，p と ε に依存する正數 $k(p,\varepsilon)$ が定まり，任意の $\xi\in\vee^{p}(X)$ に對し次の不等式が成立つ。

$$N(\xi-\xi_{\varDelta})\leqq\Big\{k(p,\varepsilon)\big(N(\xi)^{p}-N(\xi_{\varDelta})^{p}\big)+\varepsilon N(\xi)^{p}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

證明。 $\Omega^{(1)}$ の第一種集合上を除いた Ω の各點 $\mathfrak{p}$ で次の不等式を證明すればよい。

$$\int_{\Gamma}\frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}-\xi_{\varDelta}(dU)_{(\mathfrak{p})}|^{p}}{\beta(dU)^{p-1}}\leqq k(p,\varepsilon)\left(\int_{\Gamma}\frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^{p}}{\beta(dU)^{p-1}}-\int_{\Gamma}\frac{|\xi_{\varDelta}(dU)_{(\mathfrak{p})}|^{p}}{\beta(dU)^{p-1}}\right)+$$

$\varepsilon\int_{\Gamma}\frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^{p}}{\beta(dU)^{p-1}}$ S. Bochner の證明法によつて[2] $k(p,\varepsilon)$ の存在及びこの不等式の成立が證明される。

補助定理 2. $\xi\in\vee^{p}(X)$ とする。$n\to+\infty$ のとき，$N(\xi_{\varDelta_n})\to N(\xi)$ (o) なる $\varDelta_n$, $n=1,2,3,\dots$ が存在すれば，$N(\xi-\xi_{\varDelta_n})\to 0$ (o) が成立つ。特に X が K_6^- 型“正則”ならば，斯様な $\varDelta_n$, $n=1,2,3,\dots$ は存在する(勿論 $\varDelta_n$ は ξ に依存する。)

證明。 定理の前半は，前補助定理の不等式を使へば容易に得られる。後半は，X の K_6^- 型“正則”性と $N(\xi)$ の定義から明かである。 以上。

點函數の積分を論ずるに，簡單のため $\Gamma\in\mathfrak{M}$ とし，$\mathfrak{M}$ を含む最小の Borel 族 $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ を考へ，β を $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ 上の完全加法的非負實集合函數に擴大して考へる。X を値域とする點函數 $x(t)$ が (o)-可測にして，その (o)-可測定義列である單函數 $s_n(t)$ を，$n,m\to+\infty$ のとき $\left\{\int_{\Gamma}|s_n(t)-s_m(t)|^{p}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}\to 0$ (o) なる樣とり得るとき，$x(t)$ は (p) (o)-可積分であると云ひ，$s_n(t)$ を $x(t)$ の (p) (o)-積分定義列，$(o)\text{-}\lim\limits_{n}\left\{\int_{\Gamma}|s_n(t)|^{p}\beta\,dU\right\}^{\frac{1}{p}}$ を $x(t)$ の (p) (o)-積分と云ひ，$\left\{\int_{\Gamma}|x(t)|^{p}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ で表す。

補助定理 3. $x(t)$ を (p) (o)-可積分，$s_n(t)$ をその (p) (o)-積分定義列とすれば，$x(t)$ は (o)-可積分にして，$s_n(t)$ はその (o)-積分定義列になる。

證明。 $\int_{\Gamma}|s_n(t)-s_m(t)|\beta(dU)\leqq\beta(\Gamma)^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_{\Gamma}|s_n(t)-s_m(t)|^{p}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$

---

(1) Ω は X の表現ブール空間である。前節定理 2 證明參照。

(2) S. Bochner: Annals of Math. **40** (1939), 779.

から $x(t)$ は (o)-可積分，$s_n(t)$ はその (o)-積分定義列になる。　　以上。

補助定理 4. Xを條件 (μ) を滿足し，單位 e をもつ完全ベクトル束とし，e を積の單位として，(o)-可測函數 $x(t)$ に對し $|x(t)|^p$ が (o)-可積分ならば，$x(t)$ は (p) (o)-可積分にして，$x(t)$ の (p) (o)-積分は $|x(t)|^p$ の (o)-積分の p 乘根である。

證明。第一章 §2 の所論及び其處の記法を踏襲する。$|x(t)|^p$ が (o)-可積分なる故，$x(t)$ も (o)-可積分である。$x(t)$ の (o)-積分定義列 $s_n(t)$ を，$|s_n(t)|^p$ が $|x(t)|^p$ の (o)-積分定義列となる樣にとる。$\left\{\int_\Gamma |s_n(t)-s_m(t)|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\int_\Gamma |s_n(t)|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_\Gamma |s_n(t)|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ のため $\left\{\int_\Gamma |s_n(t)-s_m(t)|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ は (o)-有界である。$s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ は Ω の第一種集合を除いた各點 $\mathfrak{p}$ で殆どすべての t に對し $n\to+\infty$ のとき有限値に收斂する。また第一種集合上を除いた各點 $\mathfrak{p}$ で，$\int_U |s_n(t)_{(\mathfrak{p})}|^p \beta(dU)$，$n=1,2,\dots$ は同程度絕對連續となるから，第一種集合上を除いた Ω の各點 $\mathfrak{p}$ で

$$\lim_{n,m}\left\{\int_\Gamma |s_n(t)_{(p)}-s_n(t)_{(\mathfrak{p})}|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}=0$$

從て $s_n(t)$ は $x(t)$ の (p) (o)-積分定義列となる。定理の最後の部分は自明である。

$L^{p'}(\Gamma)$ で p' 乘が可積分な實可測函數の空間とすれば，

補助定理 5. $x(t)$ を (p) (o)-可積分，$\varphi\in L^{p'}(\Gamma)$ とすれば，$\varphi(t)x(t)$ は (o)-可積分である。

證明。$s_n(t)$ を $x(t)$ の (p) (o)-積分定義列，$\alpha_n(t)$ を $\varphi(t)$ の (p') 積分定義列とする。明かに $\alpha_n(t)s_n(t)$ は $\varphi(t)x(t)$ の (o)-可測定義列である。

$$\int_\Gamma |\alpha_n(t)s_n(t)-\alpha_m(t)s_m(t)|\beta(dU) \leqq \left\{\int_\Gamma |\alpha_n(t)|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_\Gamma |s_n(t)-s_m(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_\Gamma |\alpha_n(t)-\alpha_m(t)|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_\Gamma |s_m(t)^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

から $\alpha_n(t)s_n(t)$ が $\varphi(t)x(t)$ の (o)-積分定義列なることが判る。

定理 1. X を條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束とし，(p) (o)-可積分函數 $x(t)$ に對し，$\xi(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$，$U\in\mathfrak{M}$ と置けば，$\xi\in\bigvee^p(X)$ 且 $N(\xi)=$

$\left\{\int_\Gamma |x(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ となる。

證明。補助定理 3 により $x(t)$ は (o)-可積分である。$a=\int_\Gamma |x(t)|\beta(dU)$ と置き，a の生成する主イデヤル $\mathfrak{A}(a)$ を考へれば，$\mathfrak{A}(a)$ を正規部分空間とする a を單位とする抽象 S 空間 Y が存在する。故に前章 §2 定理 2 により $x(t)$ は $\mathfrak{A}(a)$ を値域とする函數と考へてよい。Y は K_6 型“正則”なる故に，$x(t)$ の (p) (o)-積分定義列 $s_n(t)$ を $\mathfrak{A}(a)$ を値域とする様にとれば $n, m\to+\infty$ のとき，$\left\{\int_\Gamma |s_n(t)-s_m(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ は正要素 $e\in Y$ に關して一様收斂する様な e が存在する。$a<e$ なる様にとる。Y の表現ブール空間 Ω を考へ，e が恒等的 1 となる様 Y を連續函數のベクトル束で同型表現し，$x\in X$ の表現函數を $x_{(\mathfrak{p})}$ と置く。$\varphi(t,\mathfrak{p})=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(t)_{(\mathfrak{p})}$ と置くと，すべての $\mathfrak{p}\in\Omega$ に對し，$\xi(U)_{(\mathfrak{p})}=\int_U\varphi(t,\mathfrak{p})\beta(dU)$ となる。また，

$$\left\{\int_\Gamma |x(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{p})=\lim_n\left\{\int_\Gamma |s_n(t)_{(\mathfrak{p})}|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\int_\Gamma |\varphi(t,\mathfrak{p})|^p\beta(dU)\right\}$$

然るに $\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^p}{\beta(dU)^{p-1}}=\int_\Gamma |\varphi(t,\mathfrak{p})|^p\beta(dU)$ となる故に，$\xi\in\vee^p(X)$ 及び $N(\xi)=\left\{\int_\Gamma |x(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ が得られる。　　　　　　　　以上。

定理 2. X を抽象 S 空間，Bochner 束，抽象 L 空間の何れかとする。任意の $\xi\in\vee^p(X)$ に對し，$\xi(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$ なる (p) (o)-可積分函數 $x(t)$ が存在し，$N(\xi)=\left\{\int_\Gamma |x(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ が成立つ。

證明。$|\xi|(\Gamma)$ に關して有界なすべての要素の作る完全ベクトル束を正規部分空間とする抽象 L 空間 Y を X の正規部分空間となる様に選ぶ。補助定理 2 により，$N(\xi_{\Delta_n}-\xi)\to 0$ (o) なる Δ_n, $n=1,2,3,\dots$ が存在する。$s_n(t)$ を $t\in U\in\Delta_n$ のとき，$\frac{\xi(U)}{\beta(U)}$ に等しく他の點では 0 となる様な單函數とすれば，$n, m\to+\infty$ のとき，$\left\{\int_\Gamma |s_n(t)-s_m(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}\to 0$ (o) となる。從て $\int_\Gamma |s_n(t)-s_m(t)|\beta(dU)\to 0$ となる。Y が抽象 L 空間なることから，$\{s_n(t)\}$ の部分列を適當にとれば，殆どすべての點で (o)-收斂する。從て最初から

$\{s_n(t)\}$ が殆どすべての點で, (o)-收斂するとしてよい。殆どすべての點で, $x(t)=(o)\text{-}\lim s_n(t)$ とすれば, $x(t)$ は (p) (o)-可積分にして $\xi(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$ が成立つ。[1] 前定理を使へば, $N(\xi)=\left\{\int_\Gamma |x(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ が得られる。

以上。

本節では簡單のため, $\Gamma\in\mathfrak{M}$ としたが, これが成立しない場合にも本節の所論は擴張され, 定理 1, 2 が成立つ。

§3. 直交函數系による展開。

X を完全ベクトル束とする。特に X を實數空間とする場合, $\vee^p(X)$ を簡單に $\vee^p$ と記す。今 $\xi\in\vee^p(X)$, $\varphi\in\vee^{p'}$ なる集合函數 $\xi(U)$, $\varphi(U)$ を考へる。明かに

$$(1)\qquad \left|\sum_{U\in\varDelta}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}\right|\leqq N(\varphi_\varDelta)N(\xi_\varDelta)\leqq N(\varphi)N(\xi).$$

ε を與へられた正數とし, $\varDelta$ を $N(\varphi-\varphi_\varDelta)<\varepsilon$ なる樣にとれば, $\varDelta', \varDelta''\geqq\varDelta$ のとき $N(\varphi_{\varDelta'}-\varphi_{\varDelta''})<2\varepsilon$ となる。$U\in\varDelta$ に對し,

$$\left|\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}-\sum_{U'\in\varDelta'U}\frac{\varphi(U')\xi(U')}{\beta(U')}\right|\leqq\sum_{U'\in\varDelta'U}\left|\frac{\varphi(U)}{\beta(U)}\beta(U')-\varphi(U')\right|\frac{|\xi(U')|}{\beta(U')}$$
$$\leqq N_U(\varphi_\varDelta-\psi_{\varDelta'})N_U(\xi_{\varDelta'})\leqq N_U(\varphi_\varDelta-\varphi_{\varDelta'})N_U(\xi)$$

故に

$$(2)\qquad \left|\sum_{U\in\varDelta}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}-\sum_{U\in\varDelta'}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}\right|\leqq N(\varphi_\varDelta-\varphi_{\varDelta'})N(\xi)$$

$$(3)\qquad \left|\sum_{U\in\varDelta'}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}-\sum_{U\in\varDelta''}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}\right|\leqq\{N(\varphi_\varDelta-\varphi_{\varDelta'})+N(\varphi_\varDelta-\varphi_{\varDelta''})\}N(\xi)$$
$$\leqq 2\varepsilon N(\xi)$$

が得られる。(3) より, $\{\varDelta\}$ を有向集合と考へれば,

$$(o)\text{-}\lim_{\varDelta}\sum_{U\in\varDelta}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta U}$$

の存在が判る。これを $\int_\Gamma\frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)}$ と記すれば, (1) から

$$(4)\qquad \left|\int_\Gamma\frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)}\right|\leqq\left\{\int_\Gamma\frac{|\varphi(dU)|^{p'}}{\beta(dU)^{p'-1}}\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)|^p}{\beta(dU)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

が得られる。

---

(1) $|\xi(U)-\xi_\varDelta(U)|\leqq\beta(U)^{\frac{1}{p'}}N(\xi-\xi_\varDelta)$ を使って。

今 $\eta \in \bigvee^{p'}(X)$ とし，X に單位の存在を假定し，これを積の單位として，$N(\xi)N(\eta)$ が定義されるとすれば，$|\xi(U)| \leqq \beta(U)^{\frac{1}{p'}}N(\xi)$, $|\eta(U)| \leqq \beta(U)^{\frac{1}{p}}N(\eta)$ から，すべての $U \in \mathfrak{M}$ に對して $\xi(U)\eta(U)$ が定義されることになり，上述と同様にして

$$(5)\quad \varDelta' \geqq \varDelta \text{ ならば，} \left|\sum_{U \in \varDelta} \frac{\xi(U)\eta(U)}{\beta(U)} - \sum_{U \in \varDelta'} \frac{\xi(U)\eta(U)}{\beta(U)}\right| \leqq N(\xi_\varDelta - \xi_{\varDelta'})N(\eta)$$

$$\left(\text{或は，} N(\xi)N(\eta_\varDelta - \eta_{\varDelta'})\right)$$

が得られる。更に X が K_6^- 型 "正則" ベクトル束ならば，$N(\xi - \xi_{\varDelta_n}) \to 0$ (o) なる $\varDelta_n$ が存在するから，

$$(o)\text{-}\lim_{\varDelta} \sum_{U \in \varDelta} \frac{\xi(U)\eta(U)}{\beta(U)}$$

の存在が判る。この (o)-收斂極限を $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\xi(dU)\eta(dU)}{\beta(dU)}$ と書くことにする。

定理 1. X を抽象 S 空間，Bochner 束，抽象 L 空間の何れかとする。X が單位 e をもつとする。$\xi \in \bigvee^p(X)$, $\eta \in \bigvee^{p'}(X)$ に對し，e が積の單位となる様 $N(\xi)N(\eta)$ が定義される場合には，前節定理 2 により，ξ, η に對應する (p) (o)-可積分函數 $x(t)$, (p') (o)-可積分函數 $y(t)$ に對し，$x(t)y(t)$ は (o)-可積分にして

$$\int_\Gamma \frac{\xi(dU)\eta(dU)}{\beta(dU)} = \int_\Gamma x(t)y(t)\beta(dU)$$

となる。

證明。 簡單のため $\Gamma \in \mathfrak{M}$ の場合に證明する。$\varDelta_1 \leqq \varDelta_2 \leqq \cdots$ を $N(\xi_{\varDelta_n}) \to N(\xi)$ (o), $N(\eta_{\varDelta_n}) \to N(\eta)$ (o) が同時に成立つ様にとる。$s_n^{(1)}(t)$, $s_n^{(2)}(t)$ を夫々 $U \in \varDelta_n$ に屬する t の値に對して，$\dfrac{\xi(U)}{\beta(U)}$, $\dfrac{\eta(U)}{\beta(U)}$ に等しく，他の點では 0 となる様にとる。前節定理 2 の證明と同様にして，$s_n^{(1)}(t)$, $s_n^{(2)}(t)$ は夫々 ξ, η に對應する (o)-可測函數 $x(t)$, $y(t)$ の (p) (o)-可積分及び (p') (o)-可積分定義列としてよい。

$$\int_\Gamma |s_n^{(1)}(t)s_n^{(2)}(t) - s_m^{(1)}(t)s_m^{(2)}(t)|\,\beta(dU) \leqq \left\{\int_\Gamma |s_n^{(1)}(t)|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\{\int_\Gamma |s_n^{(2)}(t) - s_m^{(2)}(t)|^{p'} \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$+\left\{\int_\Gamma |s_n^{(1)}(t) - s_m^{(1)}(t)|^p \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_\Gamma |s_m^{(2)}(t)|^{p'} \beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqq N(\xi)N(\eta_{\Delta_n}-\eta_{\Delta_m})+N(\xi_{\Delta_n}-\xi_{\Delta_m})N(\eta)$$

から $s_n^{(1)}(t)s_n^{(2)}(t)$ は $x(t)y(t)$ の (o)-積分定義列であり，

$\sum_{U\in\Delta_n}\frac{\xi(U)\eta(U)}{\beta(U)}=\int_\Gamma s_n^{(1)}(t)s_n^{(2)}(t)\beta(dU)$ のため，$\int_\Gamma\frac{\xi(dU)\eta(dU)}{(\beta dU)}=\int_\Gamma x(t)y(t)\beta(dU)$ が得られる。

$p=2$ 從て $p'=2$ の場合に直交函數系による展開に關聯した事項に就いて述べやう。X を完全ベクトル束とし $\xi\in\bigvee^2(X)$, $\varphi\in\bigvee^2$ に對し，

$$(\varphi,\xi)=\int_\Gamma\frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)} \tag{6}$$

と置く。

定理 2. $\{\varphi_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$ を $\bigvee^2$ の正規直交系とする。任意の $\xi\in\bigvee^2(X)$ に對し Bessel の不等式

$$N(\xi)\geqq\{\sum_1^\infty(\varphi_n,\xi)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

が成立つ。もし $\{\varphi_n\}$ が完全正規直交系を表す場合は Parseval の等式

$$N(\xi)=\{\sum_1^\infty(\varphi_n,\xi)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

及び

$$(\varphi,\xi)=\sum_1^\infty(\varphi_n,\varphi)(\varphi_n,\xi) \tag{9}$$

$$\xi(U)=\sum_1^\infty\varphi_n(U)(\varphi_n,\xi) \tag{10}$$

$$\{N(\xi)^2-\sum_1^n(\varphi_i,\xi)^2\}^{\frac{1}{2}}\to 0\ (o)\ (n\to+\infty) \tag{11}$$

が成立つ。(1)

證明。$a=N(\xi)$ とし主イデヤル $\mathfrak{A}(a)$ を a が恒等的 1 となる様に，表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現し，$x\in\mathfrak{A}(a)$ の表現函數を $x_{(\mathfrak{p})}$ で表す。(2) 式から $\left|\int_\Gamma\frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)}-\sum_{U\in\Delta}\frac{\varphi(dU)\xi(U)}{\beta(U)}\right|\leqq N(\varphi-\varphi_\Delta)N(\xi)$

なる故に，$(\varphi,\xi)_{(\mathfrak{p})}=\int_\Gamma\frac{\varphi(dU)\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}}{\rho(dU)}\left(=(\varphi,\xi_{(\mathfrak{p})})\text{ と置く}\right)$ を得る。一方第一種集合 P 上を除いて，$\mathfrak{p}\in\Omega-P$ に對し，$N(\xi)_{(\mathfrak{p})}=\left\{\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^2}{\beta(dU)}\right\}^{\frac{1}{2}}$ を得る。

實集合函數に對して知られた定理から本定理の成立が判る。　　以上。

---

(1) 級數は (o)-收斂を意味し，もし $\{\varphi_n\}$ が有限個の場合には級數は有限個の項の和を表すものとする。

定理 3. $\{\varphi_n\}$ を $\vee^2$ の正規直交系とし，$x_n\in X$ を $\{\sum_1^\infty x_n^2\}^{\frac{1}{2}}\in X$ なる様にとれば，$\sum_1^\infty\varphi_n(U)x_n$ は (o)-收斂し，この極限函數を $\xi(U)$ と置くと，$\xi\in\vee^2(X)$ にして $(\varphi_n,\xi)=x_n$ となる。

證明。 $|\sum_n^m\varphi_k(U)x_k|\leqq\{\sum_n^m\varphi_k(U)^2\}^{\frac{1}{2}}\{\sum_n^m x_k^2\}^{\frac{1}{2}}$ 然るに，$\beta(U)\geqq\sum_1^\infty\varphi_k(U)^2$ が成立つから，$\sum\varphi_n(U)x_n$ は (o)-收斂する。$a=\{\sum_1^\infty x_n^2\}^{\frac{1}{2}}$ と置き，主イデヤル $\mathfrak{A}(a)$ を a が恒等的 1 となる様，表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現すれば，$\xi(U)_{(\mathfrak{p})}=\sum_1^\infty x_{n(\mathfrak{p})}\varphi_n(U)$ が得られるから，

$$\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}|^2}{\beta(dU)}=\sum_1^\infty\left(x_{n(\mathfrak{p})}\right)^2$$

となる故に，$\xi\in\vee^2(X)$ 且 $N(\xi)=\{\sum_1^\infty x_n^2\}^{\frac{1}{2}}$ となる。また $\int_\Gamma\frac{\varphi_n(dU)\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}}{\beta(dU)}=x_{n(\mathfrak{p})}$ となる故，$(\varphi_n,\xi)=x_n$ を得る。 以上。

定理 4. $\{\varphi_\alpha\}$ を $\vee^2$ の完全正規直交系とする。X が K_5^- 型 "正則" ベクトル束とすれば，$\xi\in\vee^2(X)$ に對し，$(\varphi_\alpha,\xi)\neq0$ なる φ_α は高々可附番個しか存在しない。かゝる φ_α を $\{\varphi_\alpha\}$ とすれば，定理 2 の (8), (9), (10), (11) が成立つ。

證明。 任意の可附番個の φ_α に對して Bessel の不等式が成立つから，X の K_6^- 型 "正則" 性により，$(\varphi_\alpha,\varphi)\neq0$ なる φ_α は高々可附番個である。本定理の後半は定理 2 と同様に證明することが出來る。

定理 5. X を單位 e をもつ K_6^- 型 "正則" ベクトル束とする。$\xi,\eta\in\vee^2(X)$ に對し，$N(\xi)N(\eta)$ が e を積單位とする様定義されるとする。$\{\varphi_\alpha\}$ を $\vee^2$ の完全正規直交系とすれば，$(\varphi_\alpha,\xi)\neq0$ 又は $(\varphi_\alpha,\eta)=0$ となる φ_α は高々可附番個にして，かゝる φ_α に對し，

$$\int_\Gamma\frac{\xi(dU)\eta(dU)}{\beta(dU)}=\sum_\alpha(\varphi_\alpha,\xi)(\varphi_\alpha,\eta)$$

となる。

證明。 $|(\varphi_\alpha,\xi)|\leqq N(\xi)$, $|(\varphi_\alpha,\eta)|\leqq N(\eta)$ なる故 (φ_α,ξ) (φ_α,ξ) は定義される。定理 3 により，$(\varphi_\alpha,\xi)\neq0$ 又は $(\varphi_\alpha,\eta)\neq0$ なる φ_α は高々可附番である。X を e が恒等的 1 となる様，表現ブール空間 Ω 上の連續函數のベクトル束で同型表現する。Ω の第一種集合 P 上を除いて，$\mathfrak{p}\in\Omega-P$ に對し，

$$\int_\Gamma \frac{\xi(dU)\eta(dU)}{\beta(dU)}{}_{(\mathfrak{p})}=\int_\Gamma \frac{\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}\eta(dU)_{(\mathfrak{p})}}{\beta(dU)}$$

$$(\varphi_a, \xi)_{(\mathfrak{p})}=\int_\Gamma \frac{\varphi_a(dU)\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}}{\beta(dU)}$$

$$(\varphi_a, \eta)_{(\mathfrak{p})}=\int_\Gamma \frac{\varphi_a(dU)\eta(dU)_{(\mathfrak{p})}}{\beta(dU)}$$

が得られるから，實集合函數の場合に於ける定理から，

$$\int_\Gamma \frac{\xi(dU)_{(\mathfrak{p})}\eta(dU)_{(\mathfrak{p})}}{\beta(dU)}=\sum_a(\varphi_a, \xi)_{(\mathfrak{p})}(\varphi_a, \eta)_{(\mathfrak{p})}$$

これから容易に

$$\int_\Gamma \frac{\xi(dU)\eta(dU)}{\beta(dU)}=\sum_a(\varphi_a, \xi)\,(\varphi_a, \eta)$$

を得る。 以上。

第五編 作用素表現論

第一章 C_R に於ける作用素

§1. R がビコムパクト Hausdorff 空間の場合。

R をビコムパクト Hausdorff 空間とする。R 上の有界連續函數の全體の作る Banach 束を C_R で表す。特に R が區間 $[0, 1]$ の場合には C_R を單に C と記す。

Y を任意の K_6^- 型 “正則” ベクトル束とし，C_R から Y への (o)-有界線形作用素 Tx, $x\in C_R$ の解析的形を決定しやう。此處に Tx が **(o)-有界**とは[1]

(1) $(|Tx|;\ |x|\leqq 1,\ x\in C_R)$ 但し 1 は R 上で恒等的 1 となる函數である。

が (o)-有界となることを云ふ。(1) はまた

(2) $(|Tx|;\ \|x\|\leqq 1,\ x\in C_R)$

と書いてもよいから，(1) が (o)-有界であることは，(2) が (o)-有界即ち Tx が $(\overset{o}{o})$-有界となることと同義である。(2) の上端を T の**抽象ノルム**[2]と云ひ，

---

(1) 正線形作用素の差として表される作用素を (o)-有界線形作用素と定義する。

(2) L. Kantorovitch: Recueil Math. **49** (1940), 223. Remark 1. に抽象ノルムの定義が與へられてゐる。

$|T|$ で表す。明かに $|T|=||T||$ が成立つ。但し $|T|$ は T の絶對値を表す。

假に，T を正作用素とする。R の任意の閉集合 F 及び Borel 集合 U に對し，$D(F)$ で $0\leqq x\leqq 1$ 且 F 上で 1 なる値をとる $x\in C_R$ の全體を表すとし

(3) $m(F)=\wedge\big(Tx\,;x\in D(F)\big)$.

(4) $m(U)=\vee\big(m(F)\,;F\leqq U\big)$.

と定める。$m(U)$ は (o)-位相で完全加法的且 $m(U)\geqq 0$ なることが證明される。[1] $m(U)$ を使つて

(5) $Tx=\int_R x(t)m(dU)$ (Lebesgue 或は Riemann 式積分)

と書かれる。[2]

T を正作用素と限らないならば，Jordan 分解 $T=T_+-T_-$ により。正作用素 T_+, T_- を考へ，(3), (4) により T_+, T_- に對應する完全加法的集合函數を $m_+(U), m_-(U)$ とし，$m(U)=m_+(U)-m_-(U)$ と置けば，$m(U)$ は (o)-有界，完全加法的[3]である。此處に $m(U)$ が **(o)-有界**とは，U があらゆる Borel 集合をとるとき，$\{m(U)\}$ が (o)-有界となることである。また $m(U)$ を T から直接に定義するには，$D(F)$ が有向集合になること，即ち $x_1, x_2\in D(F)$ のとき，$x_1\frown x_2\in D(F)$ なることを注意すれば，Y が K_6^- 型 "正則" ベクトル束なることから，正要素 $y_0\in Y$ が存在し，與へられた正數 ε に對し，$x_0\in D(F)$ が定まり，$x\leqq x_0$ なる任意の $x\in D(F)$ に對して

$$|m_+(F)-T_+x|<\varepsilon y_0,\qquad |m_-(F)-T_-x|<\varepsilon y_0$$

即ち
$$|m(F)-Tx|<2\varepsilon y_0$$

となる。この Moore-Smith 式極限を

(6) $$m(F)=(o)\text{-}\lim_{x\in D(F)} Tx$$

と書く。

同様に，Moore-Smith 式極限により

(7) $$m(U)=(o)\text{-}\lim_{F\leqq U} m(F)$$

---

(1) A. Markoff; Recueil Math, **46** (1938), 168-190. A. D. Alexandroff: 同, **51** (1941), 563-628. 577. 定理 1, 587. 定理 2 は多少の修正によつて K_6^- 型 "正則" ベクトル束を値域とする場合にも成立つ。

(2) A. D. Alexandroff, 同上, 577 定理 1.

(3) 本節及び次節に於ては，單に完全加法的と云へば，(o)-位相によるものとする。

と書くことが出來る。一般に (7) を満足する $m(U)$ は，**正則**であると云ふ。逆に任意の (o)-有界，完全加法的，正則集合函數 $m(U)$ に對し，(5) によつて線形作用素 Tx を定義すれば，Tx は (o)-有界にして，$m(U)$ はこの T を使つて (6)), (7) から與へられる $m(U)$ と一致する[1]。T の抽象ノルムは，$T_+(1)+T_-(1)$ で與へられる故，$|m|(R)=m_+(R)+m_-(R)$ 即ち $\bigvee_U\big(m(U)-m(R-U)\big)$ に等しい。之を $\operatorname*{var}_R m$ で表す。(o)-有界線形汎函數の全體は完全ベクトル束を作るから[2]，(o)-有界完全加法的正則集合函數も完全ベクトル束を作り，(5), (6), (7) により兩者は，線形-束-同型になる。之を纏めて次の定理を得る。

定理 1. C_R から K_6^- 型 “正則” ベクトル束 Y への (o)-有界線形作用素 T と，Y を値域とする (o)-有界完全加法的正則集合函數 $m(U)$ とは，(5), (6), (7) により一對一對應し，T の抽象ノルムは $\operatorname*{var}_R m$ で與へられる。

R 上の Borel 可測有界函數 $x(t)$ のノルム $\|x\|$ を

$$\|x\|=\operatorname*{l.u.b.}_{t\in R}|x(t)|$$

によつて定義するとき，R 上の Borel 可測有界函數 $x(t)$ の全體の作る Banach 束を M_R で表す。特に $R=[0,1]$ の場合には，R_R を單に M と記す。定理 1 から次の定理を得る。

定理 2. C_R から K_6^- 型 “正則” ベクトル束 Y への有界線形作用素 T は，抽象ノルムを不變に保つて M_R から Y への (o)-連續線形作用素[3]に擴大される。

證明。 (5), (6), (7) により $Tx=\int_R x(t)m(dU)$, $x\in C_R$ と書かれる。$m(U)$ は完全加法的なることから，$x\in M_R$ に對し $Tx=\int_R x(t)m(dU)$, と置けば，T は M_R 上の作用素として (o)-連續である。何者，$x_n\to 0$ (o), $x\in M_R$ とし，$U_n=\big(t;\,x_n(t)\geqq\epsilon\big)$ とすれば，$|m|(U_n)\to 0$. 一方 $|Tx_n|\leqq\epsilon|m|(R)+\|x_1\|\,|m|(U_n)$ なる故，$Tx_n\to 0$ (o) が得られる。M_R 上の作用素として T の抽象ノルムが $|m|(R)$ なることは殆ど明かである。 以上。

本定理の證明に於て述べた C_R 上の (o)-有界線形作用素 T の M_R 上の線

---

(1) A. D. Alexandroff: 同上, 582–583, 補題 10, 11.

(2) L. Kantorovitch: Recueil Math. **49** (1940), 220, 定理 6.

(3) (o)-收斂列を (o)-收斂列に變へる意。詳しくは $\binom{o}{o}$-連續と云ふ。

形作用素への擴大を T^0 で表せば，明かに

$$(\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2)^0=\lambda_1 T_1^0+\lambda_2 T_2^0$$
$$(T_1\cup T_2)^0=T_1^0\cup T_2^0$$

が成立つ。

以上の應用として一例を述べる。X を Banach 空間とし，R を X の共軛 Banach 空間 $\bar{X}$ の單位球を X による弱位相によつて位相化されたビコムパクト Hausdorff 空間とする。[1] $x\in X$, $f\in R$ に對し，$f(x)$ は x を固定し，f を R 上の變數と考へると，X は C_R の部分 Banach 空間になる。Tx を X から Y への $\binom{s}{o}$-有界線形作用素，即ち $(Tx;\ \|x\|\leqq 1,\ x\in X)$ が (o)-有界な線形作用素とすれば，T の抽象ノルム $|T|=\vee(|Tx|;\|x\|\leqq 1, x\in X)$ を使へば，任意の $x\in X$ に對し，

$$(8)\qquad |Tx|\leqq\|x\||T|$$

となる。第二編第一章 §1 定理 1 により，(8) なる關係を保存して，T を C_R 上の (o)-有界線形作用素に擴大し，(6), (7) により之に對應する (o)-有界完全加法的正則集合函數を $m(U)$ とすれば，

$$(9)\qquad Tx=\int_R f(x)m(dU),\quad x\in X,\quad f\in R$$

となる。故に次の定理を得る。

定理 3. Banach 空間 X から K_6^- 型 "正則" ベクトル束 Y への $\binom{s}{o}$-有界線形作用素 Tx は，Y を値域とする (o)-有界完全加法的正則集合函數 $m(U)$ により (9) なる積分表示が可能である。從て T は X の弱基本列を Y の (o)-收斂列に變へる。

證明。本定理の最後の部分は前定理から。　以上。

Banach 空間 X が

(i) $\bar{X}$ は可分である。

(ii) X は局所列的弱コムパクトである。

(iii) X は正則 Banach 空間である。

等の何れかを滿足するならば，X のノルムで有界な要素列から弱基本列を取り出すことが出來る。從て次の定理を得る。

定理 4. X を上の條件 (i), (ii), (iii) の何れかを滿足する Banach 空間と

(1) L. Alaoglu; Annals of Math. **41** (1940), 252-267, 定理 1-3.

する。X から K^--空間への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素は完全連續作素用である。

定理 5. Banach 空間 X から K^--空間への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素は, X の弱基本列を强收斂列に變換する弱完全連續作用素である。

證明。 定理の後半は, K^--空間に於ては, 任意の區間は列的弱コムパクトであることから。 以上。

Y が K-空間ならば, Banach 空間 X から Y への $\binom{o}{b}$-有界作用素と $\binom{o}{b}$-連續作用素とは同義である。故に定理 4, 5 から $\binom{o}{b}$-連續作用素に關する定理が直ちに得られる。

R を閉區間 $[0,1]$ として Kantorovitch の所論[1]との關聯を考へやう。Tx を C から K_6^- 型 "正則" ベクトル束 Y への (o)有界線形作用素とし, (5), (6), (7) によつて T と結びついた (o)-有界完全加法的正則集合函數 $m(U)$ を考へ, 點函數 $g(t)$ を

$$g(t)=m([0,t]) \quad 0<t\leqq 1, \quad g(o)=0 \tag{9}$$

によつて定義すれば, $g(t)$ は $t=0$ 以外の點で右から (o)-連續且有界 (o)-變動である。(5) 式は $g(t)$ を integrator とする Stieltjes 積分を使つて

$$Tx=\int_0^1 x(t)\,dg(t) \tag{10}$$

と書かれる。この式から明かに $|Tx|\leqq\|x\|\operatorname*{var}\limits_0^1 g$. 從て抽象ノルムの定義から $\operatorname*{var}\limits_R m\leqq\operatorname*{var}\limits_0^1 g$. 一方 (9) による $g(t)$ の定義から $\operatorname*{var}\limits_R m\geqq\operatorname*{var}\limits_0^1 g$. 從て $\operatorname*{var}\limits_R m=\operatorname*{var}\limits_0^1 g$ を得る。

逆に $g(t)$ を任意の, $[0,1]$ 上で定義せられた有界 (o)-變動函數とすれば, Y が K_6^- 型 "正則" ベクトル束なることから $g(t)$ は高々可附番個の點を除いて (o)-連續である。(10) によつて定義せられる (o)-有界線形作用素 Tx を考へ, (5), (6) により T に對應する (o)-有界完全加法的正則集合函數を $m(U)$ とすれば, $0\leqq t<1$ に對し, $m([0,t])=(o)\text{-}\lim\limits_{t'\to t+0} g(t')-g(o)$, $m([0,1])=g(1)-g(0)$ となる。[2] 以上によつて有界 (o)-變動函數と (o)-有界完全加法的正則集合函數との關係が明かになると共に, $[0,1]$ 上の Borel 集合族上の (o)-有界完全加法的集合函數は常に正則集合函數なることが判る。何者, $m(U)$

(1) L. Kantorovitch; 前揭, § 6. 定理 16.

(2) L. Kantorovitch: 前場, 241. T の抽象ノルムは彼の意味での essential variation $\operatorname*{var^*}\limits_0^1 g$ で與へられるから, $|m|([0,1])=\operatorname*{var^*}\limits_0^1 g$ となる。

を (o)-有界完全加法的集合函數とし, (5) によつて定義せられる (o)-有界線形作用素 Tx に (6), (7) によつて對應する (o)-有界完全加法的正則集合函數を $m_1(U)$ とすれば, 任意の閉集合 F に對し $[0,1]$ の各點で F の特性函數に收斂する一様に有界な連續函數列 $\{x_n(t)\}$ が存在するから $m(F)=(o)\text{-}\lim Tx_n = m_1(F)$ となる。從て任意の開集合 G に對しても, $m(G)=m_1(G)$. 完全加法的の性質を使へば, すべての Borel 集合 U に對して $m(U)=m_1(U)$ が成立つ。

次に收斂列の作る列空間 (c) を考へると, (c) は C_R の特例である。$x=(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に對し, $\lambda_0=\lim\limits_n \lambda_n$ と置く。(c) から K_6^- 型 "正則" ベクトル束 Y への (o)-有界線形作用素 Tx に對しては, 本節初めの所論から

(11) $$Tx=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n y_n$$

なる $y_n \in Y$, $n=0,1,2,\dots$ が定まり, T の抽象ノルムは $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|y_n|$ となる。

§2. R が局所ビコムパクト Hausdorff 空間の場合。

R を局所ビコムパクト Hausdorff 空間とし, R 上の連續函數 $x(t)$ のうち, 任意の正數 ε に對し, $(t; |x(t)| \geqq \varepsilon)$ がビコムパクトとなる様な $x(t)$ の全體の作るベクトル束を C_R とする。$x\in C_R$ のノルムを前節同様 $\|x\|=\underset{t\in R}{\text{l.u.b.}}|x(t)|$ と定義する。R に一點を附加することによりビコムパクト Hausdorff 空間とすることが出來る[(1)]. このビコムパクト Hausdorff 空間を R_+ で表せば, $x\in C_R$ は一意的に R_+ 上の連續函數に擴大され, R_+-R で 0 なる値をとる。Tx を C_R から K_6^- 型 "正則" ベクトル束 Y への (o)-有界線形作用素とすれば, 第二編第一章 §1 定理 1 により, T は抽象ノルムを不變にして C_{R+} から Y への (o)-有界線形作用素に擴大される。今 F をビコムパクトな, R の閉部分集合, U を R の Borel 部分集合とし, $D(F)$ で前節同様 F 上で 1 となり他の點で $0\leqq x(t)\leqq 1$ となる $x\in C_R$ の全體を表すとし,

(1) $$m(F)=(o)\text{-}\lim_{x\in D(F)} Tx$$

(2) $$m(U)=(o)\text{-}\lim_{F\leqq U} m(F)$$

とすれば, $m(U)$ は (o)-有界, 完全加法的集合函數にして, T の抽象ノルムは $|m|(R)$ で與へられ,

(3) $$Tx=\int_R x(t)m(dU) \qquad \text{(Lebesgue 或は Riemann 式積分)}$$

(1) P. Alexandroff u. H. Hopf, *Topologie*, (1930) 93, 定理 14.

が成立つことは，前節の所論から明かである。

0 に收斂する數列の列空間 (c_0) は C_R の特例である。$x=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\in(c_0)$ に對し

$$(4)\qquad Tx=\sum_1^\infty \lambda_n y_n, \qquad \sum_1^\infty |y_n| \text{ は } (o)\text{-收斂}$$

なる $y_n\in Y$, $n=1,2,\ldots$ が定まる。この場合 T の抽象ノルムは $\sum_1^\infty |y_n|$ で與へられる。

§3. C_R から Banach 空間への有界線形作用素。

本節では斷りなき限り Y を Banach 空間とする。先づ R をビコムパクト Hausdorff 空間とし，Tx を C_R から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素とする。Rの任意の閉部分集合 F 及び Borel 部分集合 U に對し，$\bar{Y}$ を値域とする集合函數 $m(U)$ を Moore-Smith 式極限を使つて，$y\in Y$ に對し

$$(1)\qquad m(F)(y)=\lim_{x\in D(F)}(Tx)(y)$$

$$(2)\qquad m(U)(y)=\lim_{F\leqq U}(F)(y)$$

によつて定義する。§**1.** の特例として $m(U)(y)$ は y を固定すれば完全加法的實集合函數である。之を $m(U)$ は**汎函數として弱完全加法的**或は **(Y)-完全加法的**と呼ぶ。一般に (2) を滿足する $m(U)$ を **(Y)-正則**と云ふ。從て此處に定義した $m(U)$ は，(Y)-完全加法的，(Y)-正則集合函數である。この $m(U)$ を使つて

$$(3)\qquad Tx=\int_R x(t)m(dU) \qquad (\text{Lebesgue 或は Riemann 式積分})$$

が得られる。且

$$(4)\qquad \|T\|=\underset{U}{\text{l. u. b.}}\|m(U)-m(R-U)\|$$

が成立つ。§1 定理 1 と同様にして

定理 1. R をビコムパクト Hausdorff 空間とする。C_R から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素 T と $\bar{Y}$ を値域とする (Y)-完全加法的，(Y)-正則集合函數 $m(U)$ との間には (1), (2), (3) により一對一對應が存在し，T のノルムは (4) で與へられる。

定理 2. C_R から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素は $M_R^{(1)}$ から

(1) M_R の定義は前節にある。

$\bar{Y}$ への有界線形作用素にノルムを不變に保つて擴大される。

證明。§1 定理 2 の證明と同樣。 以上。

C_R から $\bar{Y}$ への有界線形作用素 T に對し，本定理による M_R から $\bar{Y}$ への有界線形作用素への擴大を T^0 とすれば，$(\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2)_0=\lambda_1 T_1^0+\lambda_2 T_2^0$ が成立つことが判る。

今 R を閉區間 $[0,1]$ としたとき，C から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素 Tx の解析的形を考へやう。T に對し，(1), (2) で定まる $m(U)$ を考へ，$g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ を

$$(5)\qquad g(0)=0,\quad g(t)=m([0,t]),\quad 0<t\leqq 1$$

によつて定義すると

$$(6)\qquad \lim_{t'\to t+0} g(t')(y)=g(t)(y),\qquad 0<t<1$$

が得られる。また (3) は $g(t)$ を integrator とする Stieltjes 積分を使つて

$$(7)\qquad Tx=\int_0^1 x(t)dg(t)$$

と書かれ，T のノルム $\|T\|$ は，あらゆる $[0,1]$ の分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 及び $\varepsilon_i=\pm 1$, $i=1,2,\ldots n$ に對し

$$(8)\qquad \left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Big(g(t_i)-g(t_{i-1})\Big)\right\|$$

の上端で與へられることが判る。一般に (9) の上端が有限な $g(t)$ は有界變動であると云ふ。$g(t)$ が有界變動とは，すべての $y\in Y$ に對し，$g(t)(y)$ が t の函數として有界變動函數であることに外ならない。

逆に $g(t)$ を $[0,1]$ 上で定義せられた $\bar{Y}$ を値域とする有界變動函數とし，(7) 式によつて定義される C から $\bar{Y}$ への有界線形作用素 Tx を考へる。(1), (2) により T に對應する (Y)-完全加法的，(Y)-正則集合函數を $m(U)$ とすれば，

$$m([0,t])(y)=\lim_{t'\to t+0} g(t')(y)-g(0)(y),$$

$$m([0,1])=g(1)-g(0)$$

が成立つことが判る。また $[0,1]$ 上の Borel 集合族上で定義せられた (Y)-完全加法的集合函數は常に (Y)-正則集合函數である。

特に $\bar{Y}$ が可分の場合には Dunford の定理[(1)]により (Y)-完全加法的集合

(1) N. Dunford: Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 305-856. 定理 32.

函數はノルム位相で完全加法的である。ノルム位相で完全加法的な集合函數は單に完全加法的であると云ふ。

また $\bar{Y}$ が可分の場合には，$[0, 1]$ 上の有界變動函數 $g(t)$ は高々可附番個の點を除いてノルム位相で連續である。

(c) 空間から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素 Tx の形は，$x=(\lambda_1, \lambda_2, \dots)\in(c)$ に對し $\lambda_0=\lim_n \lambda_n$ と置くとき，

$$(Tx)_{(y)}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \bar{y}_n(y)$$

と書かれる $\bar{y}_n\in\bar{Y}$, $n=0, 1, 2, \dots$ が定まり，T のノルムは，$\varepsilon_i=\pm 1$ を任意にとるとき，そのあらゆるとり方に對し $\|\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i\bar{y}_i\|$, $n=1, 2, \dots$ の上端である。$\bar{Y}$ が可分のとき，$\sum_0^{\infty}\bar{y}_n$ は無條件的收斂[(1)] (unconditionally convergent) となるから，

$$Tx=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\bar{y}_n$$

と書かれ，Tx は完全連續作用素となることが容易に證明される。

U があらゆる Borel 集合をとるとき $\{m(U)\}$ がノルム位相で制限的コムパクトのとき，$m(U)$ を**コムパクト値**集合函數と云ふ。

定理 3. C_R から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素 Tx が完全連續なるための條件は，(1), (2) により T に對應する $m(U)$ がコムパクト値集合函數となることである。

證明。T を完全連續作用素とする。$(Tx; \|x\|\leqq 1, x\in C_R)$ は制限的コムパクトである。閉集合 F に對し，$x\in D(F)$ を任意にとるとき $A(x)=\bigl(Tx'; x'\leqq x, x'\in D(F)\bigr)$ の閉苞と定めると，$A(x)$ はコムパクトである。すべての $A(x)$, $x\in D(F)$ に共通な一要素を $\bar{y}$ とすれば，$m(F)=\bar{y}$ なることが容易に判る。從て $m(F)$ は $(Tx; \|x\|\leqq 1, x\in C_R)$ の閉苞に屬してゐる。(2) 式を使つて $m(U)$ も $(Tx; \|x\|\leqq 1, x\in C_R)$ の閉苞に屬することが證明される。故に $m(U)$ はコムパクト値である。逆に T を $m(U)$ がコムパクト値集合函數とすれば，$(Tx; \|x\|\leqq 1, x\in C_R)$ は，$\{m(U)$ の凸閉苞に含まれるから，制限的コムパクトになる。故に Tx は完全連續作用素である。 以上。

定理 4. $\bar{Y}$ を可分共軛 Banach 空間とする。$m(U)$ を $\bar{Y}$ を値域とする完全加法的，有界强變動集合函數とすれば，

(1) 同上。

$$Tx=\int_R x(t)m(dU), \qquad x\in C_R$$

は C_R から $\bar{Y}$ への完全連續作用素である。

證明。 Y から $\vee$ 空間への變換 $y\to m(U)(y)$ が完全連續なることを云へばよい。[1] §1 定理 4 からこのことは成立つ。 以上

次に Tx を C_R から Banach 空間 Y への有界線形作用素とする。Y を $\bar{\bar{Y}}$ の部分空間と考へることにより，T は C_R から $\bar{\bar{Y}}$ への有界線形作用素と看做される。故に本節所論により，

$$(9) \qquad m(F)(\bar{y})=\lim_{x\in D(F)}\bar{y}(Tx) \qquad \bar{y}\in\bar{Y}$$

$$(10) \qquad m(U)(\bar{y})=\lim_{F\leq U} m(F)(\bar{y}) \qquad \bar{y}\in\bar{Y}$$

により定義せられる集合函數 $m(U)$ は $\bar{\bar{Y}}$ を値域とする $(\bar{Y})$-完全加法的，$(\bar{Y})$-正則集合函數にして

$$(11) \qquad Tx=\int_R x(t)m(dU)$$

が成立つ。

今 Y を弱完備 Banach 空間とし，$\mathfrak{R}$ を R の**全閉部分集合**[2]を含む最小の Borel 族とする。R が距離空間の場合には，$\mathfrak{R}$ は R の Borel 集合族と一致する。

補助定理 1. R の部分集合の族 $\mathfrak{M}$ が

(i) $U_n\in\mathfrak{M}$, $U=\operatorname*{Lim}_n U_n$ ならば $U\in\mathfrak{M}$

(ii) $F_1\geqq F_2\geqq\cdots\geqq F_n=0$ なる全閉集合 F_i, $i=1,2,\ldots n$ に對し $(F_1-F_2)+(F_3-F_4)+\cdots\in\mathfrak{M}$

を滿足するならば，$\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$ が成立つ。

證明。 全閉集合の全體は乘法的集合族を作る。條件 (ii) を使へば，全閉集合を含む最小のブール代數は $\mathfrak{M}$ の部分族なることが判る。條件 (i) を使へば，容易に $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$ が云へる。 以上。

(10) にて與へられる $m(U)$ に對し，$m(U)$ が Y の値をとる U の全體を $\mathfrak{M}$ とする。$U_n\in\mathfrak{M}$, $U=\operatorname*{Lim}_n U_n$ とすれば，任意の $\bar{y}\in\bar{Y}$ に對し，$\lim_n \bar{y}\big(m(U_n)\big)$ が存在するから，Y の弱完備性から $m(U)\in Y$ となる。F_i, $i=1,2,\ldots n$ を

(1) R. S. Phillips: Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516-540. 3.1. 定理.

(2) ある $x\in C_R$ により $(t; x(t)=1)$ と書き表される閉集合の意。

$F_1 \geqq F_2 \geqq \cdots \geqq F_n = 0$ なる全閉集合とすれば，$F_i = \big(t\,;\,x_i(t)=1\big)$ なる $x_i \in C_R$ が存在する。$x_i(t)$ は，$0 \leqq x_i(t) \leqq 1$, $x_1(t) \geqq x_2(t) \geqq \cdots$ なる様にとることが出來る。$x_{(m)}(t) = \{x_1(t)\}^{\frac{1}{m}} - \{x_2(t)\}^{\frac{1}{m}} + \cdots$ と置けば，$x_{(m)}(t)$, $m=1,2,\ldots$ は一様有界にして $m \to +\infty$ のとき $(F_1-F_2)+(F_3-F_4)+\cdots$ の特性函數に收斂する。$\lim_m \bar{y}(Tx_{(m)}) = m\big((F_1-F_2)+(F_3-F_4)+\cdots\big)(\bar{y})$ となるから Y の弱完備性から $(F_1-F_2)+(F_3-F_4)+\cdots \in \mathfrak{M}$. 故に補助定理 1 により $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{M}$ が成立つ。故に

定理 5. Y が弱完備 Banach 空間ならば，C_R から Y への有界線作用素 Tx, $x \in C_R$ と，Y を値域とする $\mathfrak{K}$ 上の完全加法的集合函數 $m(U)$ との間には

$$Tx = \int_R x(t)m(dU), \qquad \text{(Lebesque 或は Riemann 位積分)}$$

により一對一對應が存在し，T のノルムは

$$\underset{U \in \mathfrak{K}}{\mathrm{l.\,u.\,b.}} \|m(U) - m(R-U)\|$$

で與へられる。

が得られる。本定理に於ては Y を弱完備としたが，そうする代りに T を弱完全連續作用素とすれば，$(Tx\,;\,\|x\| \leqq 1)$ の列的弱閉苞は列的弱コムパクトなる故(1)，上述と同様にして，$m(U) \in Y$, $U \in \mathfrak{K}$ 且 $\{m(U)\}$ は制限的列的弱コムパクトである。一般に $\{m(U)\}$ が制限的弱コムパクトのとき，集合函數 $m(U)$ は**弱コムパクト値**であると云ふ。

定理 6. C_R から Banach 空間 Y への弱完全連續作用素 Tx, $x \in C_R$, と，Y を値域とする $\mathfrak{K}$ 上の完全加法的弱コムパクト値集合函數 $m(U)$ との間には，$Tx = \int_R x(t)m(dU)$ により一對一對應が存在し，T のノルムは $\underset{U \in \mathfrak{K}}{\mathrm{l.\,u.\,b.}} \|m(U) - m(R-U)\|$ で與へられる。

證明。T を弱完全連續作用素とすれば，(11) によつて T に結びつく，Y を値域とする $\mathfrak{K}$ 上の完全加法的弱コムパクト値集合函數 $m(U)$ の存在は上に述べた。逆に $m(U)$ をかゝる集合函數とし (11) によつて Tx を定義すれば，列的弱位相による $\{m(U)\}$ の凸弱閉苞は列的弱コムパクトなる故(2) Tx は弱完全連續作用素になる。 以上。

(1) M. Krein and V. Šmulian: Annals of Math. **41** (1940), 556-583. 定理 23.

(2) M. Krein and V. Šmulian: 前掲, 定理 24 系.

定理 7. C_R から Banach 空間 Y への完全連續作用素 Tx, $x \in C_R$, と Y を値域とする R の Borel 集合族上の完全加法的，コムパクト値正則集合函數 $m(U)$ との間には，$Tx=\int_R x(t)m(dU)$ により一對一對應が存在し，T のノルムは $\underset{U}{\mathrm{l.u.b.}}\|m(U)-m(R-U)\|$ で與へられる。

證明。定理 3 の證明に準じてやればよい。　　　　　　　　以上。

定理 8. Y を列的弱コムパクト Banach 空間とする。$m(U)$ を，Y を値域とする R の Borel 集合上の完全加法的，有界强變動集合函數とすれば，$Tx=\int_R x(t)m(dU)$ で定義せられる C_R から Y への有界線形作用素 Tx は完全連續である。

證明。$\{m(U)\}$ が制限的コムパコトなることを云へばよい。これには $\bar{y}\to\bar{y}\big(m(U)\big)$ なる $\bar{Y}$ から $\vee$ 空間への變換が完全連續なることを云へばよい。(1) これは §1 定理 4 により明かである。　　　　　　　　以上。

特に R を閉區間 $[0,1]$ とし，$g(t)$ を Y を値域とする $[0,1]$ 上の點函數にして $0<t<1$ に於て右から弱連續とする。$g(t)$ を有界變動函數とすれば，$Tx=\int_0^1 x(t)dg(t)$ によつて定義される Tx は C から Y への有界線形作用素を表す。Y を弱完備を假定すれば，定理 5 に依つて定まる $[0,1]$ の Borel 集合族上の完全加法的集合函數 $m(U)$ が存在し，$0<t\leqq 1$ のとき $m([0,t])=g(t)-g(0)$ が成立つ。かゝる $m(U)$ は一意に定まり，$\underset{U}{\mathrm{l.u.b.}}\|m(U)-m(R-U)\|$ は，$[0,1]$ のあらゆる分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 及びあらゆる $\varepsilon_i=\pm 1$, $i=1,2,\ldots n$ に對する $\left\|\sum_1^n \varepsilon_i\big(g(t_i)-g(t_{i-1})\big)\right\|$ の上端になることが容易に云へる。故に次の定理を得る。

定理 9. Y を弱完備 Banach 空間とする。$g(t)$ を，Y を値域とし，$0<t<1$ に於て右から弱連續な $[0,1]$ 上の有界變動函數とすれば，$m([0,t])=g(t)-g(0)$, $0<t\leqq 1$ なる Y を値域とする $[0,1]$ の Borel 集合族上の完全加法的集合函數 $m(U)$ が一意的に定まり，$\underset{U}{\mathrm{l.u.b.}}\|m(U)-m([0,1]-U)\|$ は，$[0,1]$ のあらゆる分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 及びあらゆる $\varepsilon_i=\pm 1$, $i=1,2,\ldots n$ に對する $\left\|\sum_1^n \varepsilon_i\big(g(t_i)-g(t_{i-1})\big)\right\|$ の上端に等しい。

本定理に於て Y を弱完備とする代りに，$\sum_1^n \varepsilon_i 0\big(g(t_i)-g(t_{i-1})\big)$ の全體が制

---

(1) R. S. Phillips: Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–540. 3.1. 定理.

限的列的弱コムパクト，即ち $Tx=\int_0^1 x(t)dg(t)$ が弱完全連續作用素と假定しても，本定理は成立つ。このとき $m(U)$ は弱コムパクト値となる。また $\sum_1^n \varepsilon_i\big(g(t_i)-g(t_{i-1})\big)$ の全體が制限的コムパクト，即ち $Tx=\int_0^1 x(t)dg(t)$ が完全連續作用素と假定しても本定理は成立し，$m(U)$ はコムパクト値となることが云へる。

以上は R をビコムパクト Hausdorff 空間として論じたが，R が局所ビコムパクト Hausdorff 空間の場合も同様に論ずることが出來る。即ち C_R から共軛 Banach 空間 $\bar{Y}$ への有界線形作用素 Tx に對しては，R のコムパクト閉部分集合 F 及び R の Borel 部分集合に對し (1), (2) によつて $m(U)$ を定義すれば (3) が成立ち T のノルムは (4) で與へられる。また Tx を C_R から Y への有界線形作用素とし，$(t; |x(t)|\geqq 1)$ の形に表される閉集合を含む最小の完全加法的集合族(廣義の σ-ブール代數を作る集合族の意)を $\mathfrak{K}$ とすれば，(9), (10) により T に對應する m は，Y が弱完備或は Tx が弱完全連續作用素等の場合に，$m(U)\in Y$, $U\in\mathfrak{K}$ となり定理 5, 6, 7 等が成立つことが云へる。

第二章　$L_p(R)$, $1\leqq p\leqq+\infty$, に於ける作用素

§1.　M_R^* に於ける作用素。

R を基本集合とし，R を一員とする R の部分集合の Borel 族を $\mathfrak{K}_R$ とし，$\mathfrak{K}_R$ 上に完全加法的測度函數 $\beta(U)$ が定義されてゐるとする。$\beta(U)=0$ ならば，任意の集合 $U'\leqq U$ は $U'\in\mathfrak{K}_R$ と假定する。R 上の有界 β-可測函數 $x(t)$ のノルム $\|x\|$ を $\underset{t}{\mathrm{ess.\,l.\,u.\,b.}}|x(t)|$ で定めるとき，R 上のすべての有界 β-可測函數の作る Banach 束を M_R^* 或は $L_\infty(R)$ 等で表し，特に $R=[0, 1]$, β が Lebesgue 測度函數の場合には簡單に M^* 或は L_∞ で表すことにする。

定理 1. Y を完全ベクトル束とする。M_R^* から Y への (o)-有界線形作用素 Tx, $x\in M_R^*$ は

(1)　$$Tx=\int_R x(t)\,\Phi(dU) \qquad \text{(Lebesque 式積分)}$$

の形の作用素と一致する。但し $\Phi(U)$ は Y を値域とする $\mathfrak{K}_R$ 上の (o)-有界，加法的集合函數にして，$\beta(U)=0$ ならば $\Phi(U)=0$ を滿足するものとす。特に Tx が (o)-連續，$\binom{o}{t}$-連續なるための條件は，$\Phi(U)$ が夫々次の條件 (1°), (2°) を滿足することである。

(1°)　$\beta(U_n)\to 0$ ならば，$|\Phi|(U_n)\to 0\ (t)$ (Φ は絶對 (t)-連續と云ふ)

(2°)　$\beta(U_n)\to 0$ ならば，$|\Phi|(U_n)\to 0\ (o)$[1] (Φ は絶對 (o)-連續と云ふ)

また T の抽象ノルムは $|\Phi|(R)$ 即ち $\operatorname*{var}_R \Phi$[2]で與へられる。

證明。 Kantorovitch の所論から。[3]　　以上。

定理 2. Y が抽象 S 空間，Bochner 束，抽象 L 空間の何れかとする。M_R^* から Y への $\binom{o}{t}$-連續作用素 $Tx, x\in M_R^*$, と

$$(2)\qquad Tx=\int_R x(t)y(t)\beta(dU)\qquad \Big((o)\text{-積分},\ y(t)\ \text{は}\ (o)\text{-可積分}\Big)$$

の形の作用素とは一致する。

證明。 (o)-有界，加法的，絶對 (o)-連續集合函數と不定 (o)-積分が一致するから，前定理を使つて本定理が得られる。　　以上。

R 上殆ど到る所有限値をとる β-可測函數のうち對等な函數を恒等視して得られるベクトル束を S_R で表し，また p 乘，$0\leqq p<+\infty$ が β に關して可積分な β-可測函數の作るベクトル束を $L_p(R)$ で表す。[4] R' $\mathfrak{R}_{R'}$, β' を R, $\mathfrak{R}_R$, β と同じ性質をもつものとすれば

定理 3. M_R^* から $S_{R'}$ (或は $L_p(R'), 1\leqq p<+\infty$) への $\binom{o}{t}$-連續作用素 Tx の一般の形は $\int_R x(t)\varphi(t,t')\beta(dU)$ で與へられる。但し $\varphi(t,t')$ は $\int_R|\varphi(t,t')|\beta(dU)\in S$ $\big($或は $L^p(R')\big)$ なる (t,t') の $\beta\times\beta'$-可測函數にして，Tx の抽象ノルムは $\int_R|\varphi(t,t')|\beta(dU)$ で與へられる。

證明。 前定理及び第四編第一章 §4 の終りの所論から。　　以上。

本定理は Kantrovitch の所論を精密にしたものである。[5]

次に M^* に於ける作用素の Hellinger 式積分による表現を考へて見やう。$\varphi(t)$ を $[0,1]$ 上の實數値函數，$g(t)$ を Y を値域とする函數とする。此處に Y は完全ベクトル束とする。$[0,1]$ の分割 $\mathfrak{D}_k$; $0=t_0^{(k)}<t_1^{(k)}<\cdots<t_{n_k}^{(k)}=1$ に對し

---

(1) Y が $K_{\bar{6}}$ 型 "正則" ベクトル束のときは，(2)° は $\beta(U_n)\to 0$ ならば，$\Phi(U_n)\to 0\ (o)$ としてよい。

(2) $\operatorname*{var}_R \Phi=\bigvee_U\big(\Phi(U)-\Phi(R-U)\big)$ の意である。

(3) L. Kantorovitch: 前揭，定理 18.

(4) 對等な函數は恒等視する。$1\leqq p<+\infty$ のときは $L_p(R)$ は Banach 束である。また $L_p(R)$, $0<p<+\infty$ は，非本義的公理を滿足する "正則" ベクトル束である。

(5) L. Kantorovitch: 前揭，定理 20.

$$(3) \qquad \sum_{\mathfrak{D}_k} \frac{\varDelta\varphi\varDelta g}{\varDelta t}=\sum_{1}^{n_k}\frac{\left(\varphi(t_i^{(k)})-\varphi(t_{i-1}^{(k)})\right)\left(g(t_i^{(k)})-g(t_{i-1}^{(k)})\right)}{t_i^{(k)}-t_{i-1}^{(k)}}$$

と置く。$k\to+\infty$ のとき, $\max_i|t_i^{(k)}-t_{i-1}^{(k)}|\to 0$ とする。かゝる任意の分割列 $\mathfrak{D}_k$ に對し (3) が一定の (o)-收斂極限をもつならば, 之を

$$\int_0^1 \frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$$

と記す。

$g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, が (o)-位相或は (t)-位相(1)で夫々

$$(4) \qquad \sum|t_i-t_i'|\to 0 \text{ ならば, } \sum|g(t_i)-g(t_i')|\to 0$$

を滿足するとき, $g(t)$ は夫々**絕對** (o)-**連續**及び**絕對** (t)-**連續**であると云ふ。但し $\sum|t_i-t_i'|$ は互に內點を共有しない有限個の區間 $[t_i, t_i']$ の長さの和を表す。

定理 4.(2) Y を K_6^- 型 “正則” ベクトル束とする。M^* から Y への (o)-有界(3) (o)-連續線形作用素 Tx, $x\in M^*$, は

$$Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}, \quad \varphi(t)=\int_0^t x(t)dt, \quad g(t) \text{ は有界 } (o)\text{-變動, 絕對 } (t)\text{-連續函數}$$

の形の作用素と一致する。このとき T の抽象ノルムは $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{var}}}\, g$ で與へられる。

證明。 $g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, を任意の有界 (o)-變動, 絕對 (t)-連續函數とする。第一章 §1 の所論から, $\varPhi([0,t])=g(t)-g(0)$ なる (o)-有界完全加法的集合函數 $\varPhi(U)$ が一意に定まり, $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{var}}}\,\varPhi=\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{var}}}\,g$ となる。但し U は Borel 集合である。$\beta(U_n)\to 0$ $(n\to+\infty)$ とする。先づ各 U_n が有限個の區間の和となるときは, Y の K_6^- 型 “正則” 性を使へば, $g(t)$ が絕對 (t)-連續なることから, $|\varPhi|(U_n)\to 0$ (t) が得られる。次に各 U_n が高々可附番個の區間の和として表せる場合には $|\varPhi|(U)$ の完全加法性を使へば, $|\varPhi|(U_n)\to 0$ (t) が判る。これから容易に一般の場合に $|\varPhi|(U_n)\to 0$ (t) が判る。U を任意の Lebesgue 可測集合とし, U' を之と對等な Borel 集合とするとき, $\varPhi(U)=$ $=\varPhi(U')$ と定義することにより, $\varPhi(U)$ を Lebesgue 可測集合族上の (o)-有界, 完全加法的, 絕對 (t)-連續集合函數とすることが出來る。$[0,1]$ の分割列 $\{\mathfrak{D}_k\}$ を $\max_i|t_i^{(k)}-t_{i-1}^{(k)}|\to 0$ なる樣にとる。$x\in M^*$ に對し $\varphi(t)=\int_0^t x(t)dt$ と

(1) $(*)$-相と同義。
(2) L. Kantorovitch: 前掲, 定理 19 B.
(3) Y が K_6 型 “正則” ならばこの條件は不要である。

置き，$x_k(t)$ を $t_{i-1}^{(k)} \leqq t < t_i^{(k)}$ のとき $\dfrac{\varphi(t_i^{(k)}) - \varphi(t_{i-1}^{k})}{t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}}$ なる値をとる函數と定める。但し $x_k(1) = \dfrac{\varphi(t_{n_k}^{(k)}) - \varphi(t_{n_k-1}^{(k)})}{t_{n_k}^{(k)} - t_{n_k-1}^{(k)}}$ とする。このとき (3) は，

$$\sum_{\mathfrak{D}_k} \frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t} = \int_0^1 x_k(t)\Phi(dU) \tag{5}$$

となる。$|x_k(t)| \leqq \|x\|$ 且殆ど到る所 $x_k(t) \to x(t)$ $(k \to +\infty)$ となる故，正數 ε に對し U_k を

$$U_k = (t;\ n \geqq k \text{ なる或 } n \text{ に對し，} |x_n(t) - x(t)| \geqq \varepsilon)$$

と置くと，$U_k \geqq U_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$ $\beta(U_k) \to 0$ となる。從て $|\Phi|(U_k) \to 0$ (o) を得る。

$$\left| \sum_{\mathfrak{D}_k} \frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t} - \int_0^1 x(t)\Phi(dU) \right| \leqq \int_0^1 |x_k(t) - x(t)|\,|\Phi(dU)|$$
$$\leqq \varepsilon|\Phi|([0, 1]) + 2\|x\|\,|\Phi|(U_k)$$

故に $k \to +\infty$ のとき $\sum_{\mathfrak{D}_k} \dfrac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t}$ は $\int_0^1 x(t)\Phi(dU)$ に (o)-收斂する。

即ち

$$\int_0^1 \frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt} = \int_0^1 x(t)\Phi(dU)$$

を得る。故に $Tx = \int_0^1 \dfrac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$ と置けば T は (o)-有界，(o)-連續作用素にして，T の抽象ノルムは $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{var}}}\, g$ で與へられる。

逆に Tx を M^* から $Y^{(1)}$ への (o)-有界 (o)-連續作用素とすれば，定理 1 により

$$Tx = \int_0^1 x(t)\Phi(dU)$$

なる (o)-有界，絕對 (t)-連續集合函數 $\Phi(U)$ が一意に定まり，T の抽象ノルムは $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{var}}}\,\Phi$ で與へられる。$g(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, を $g(t) = \Phi([0, t])$ で定めると，明かに，$g(t)$ は有界 (o)-變動，絕對 (t)-連續である。從て上述から

$$\int_0^1 \frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt} = \int_0^1 x(t)\Phi(dU), \quad \text{但し } \varphi(t) = \int_0^t x(t)dt$$

---

(1) この場合 Y を完全ベクトル束としても本定理の以下の證明は成立つ。

となる故に $Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$ が得られる。容易に T の抽象ノルムは $\operatorname*{var}_0^1 g$ なることが判る。 以上。

Y が非本義的公理を滿足する "正則" ベクトル束ならば, $g(t)$ が絶對 (t)-連續ならば, 常に有界 (o)-變動になることを注意する。

定理 5.[1] Y を K_6^- 型 "正則" ベクトル束とする。M^* から Y への (o)-有界[2] $\binom{o}{t}$-連續作用素 $Tx,\ x\in M^*$ は

$$Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt},\quad \text{但し}\ \varphi(t)=\int_0^t x(t)dt,\quad g(t)\ \text{は有界}\ (o)\text{-變動}^{(3)}\text{絶對}\ (o)\text{-連續。}$$

の形の作用素と一致する。このとき T の抽象ノルムは $\operatorname*{var}_0^1 g$ で與へられる。

證明。 $g(t)$ を任意の有界 (o)- 變動, 絶對 (o)-連續函數とすれば, 前定理の證明と同樣にして, $\varPhi([0,t])=g(t)-g(0)$ なる (o)-有界, 絶對 (o)-連續集合函數 $\varPhi(U)$ を一意に定めることが出來る。このとき $\operatorname*{var}_0^1\varPhi=\operatorname*{var}_0^1 g$ となる。從て定理 1 を使へば, 前定理と同樣にして證明を進めることか出來る。

以上。

次に Y を Banach 空間とする。Tx を M_R^* から Y への $\binom{b}{o}$-連續線形作用素, 即ち (o)-收斂列を强收斂列に變換する線形作用素とする。$U\in\mathfrak{K}_R$ の特性函數の T による像を $\varPhi(U)$ と置く。T の $\binom{b}{o}$-連續性から $\varPhi(U)$ は完全加法的, 絶對强連續である。從て容易に判る樣に

$$Tx=\int_0^1 x(t)\varPhi(dU)\qquad (\text{Lebesgue 式積分}) \tag{6}$$

が成立つ。且 T のノルムは $\operatorname*{l.u.b.}_U\|\varPhi(U)-\varPhi(R-U)\|$ で與へられる。逆に $\varPhi(U)$ を任意の完全加法的, 絶對强連續集合函數とすれば, (6)によつて定義される Tx は $\binom{b}{o}$-連續である。故に次の定理を得る。

定理 6. Y を Banach 空間とする。M_R^* から Y への $\binom{b}{o}$-連續線形作用素 $Tx,\ x\in M_R^*$, と

$$Tx=\int_R x(t)\varPhi(dU),\ \text{但し}\ \varPhi(U)\ \text{は完全加法的絶對强連續集合函數を表す。}$$

---

(1) L. Kantorovitch: 前揭: 定理 19 A.
(2) Y が K_6 型 "正則" ベクトル束ならば, この條件は不要である。
(3) 同上。

の形の作用素とは一致する。このとき T のノルムは $\underset{U}{\text{l.u.b.}}\|\Phi(U)-\Phi(R-U)\|$ で與へられる。

Y を Banach 空間とし，Y を値域とする函數 $g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, に對し，(3) 式 $\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t}$ が $k\to+\infty$ のとき，Y の一定要素に强收斂するならば，この極限を $\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$ と書くことにする。また $g(t)$ が，ノルム位相で (4) を滿足するとき，$g(t)$ は絕對强連續である。

補助定理 1. Y を Banach 空間とする。Y を値域とする絕對强連續函數 $g(t)$ に對し，$\Phi([0,t])=g(t)-g(0)$ を滿足する完全加法的絕對强連續集合函數 $\Phi(U)$ が一意に定まり，$\underset{U}{\text{l.u.b.}}\|\Phi(U)-\Phi([0,1]-U)\|$ は，あらゆる $[0,1]$ の分割 $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ 及び $\varepsilon_i=\pm1$, $i=1,2,\dots n$ に對する $\left\|\sum_1^n\varepsilon_i\Big(g(t_i)-g(t_{i-1})\Big)\right\|$ の上端に等しい。

證明。 前章 §3 の所論から，$\overline{\overline{Y}}$ を値域とする $[0,1]$ Borel の集合族上の $(\overline{Y})$-完全加法的集合函數 $\Phi(U)$ が一意に定まり，$\Phi([0,t])=g(t)-g(0)$, 且つ $\Phi(U)$ に對し本補助定理の最後の部分が成立つ。$\bar{y}$ を $\overline{Y}$ の單位球の任意の要素とすれば，$\bar{y}\big(g(t)\big)$ は $\bar{y}$ に關して同程度絕對連續なることから $\Phi(U)(\bar{y})$ も同樣である。故に正數 ε に對し，正數 δ が定まり，$\beta(U)<\delta$ ならば，$\|\Phi(U)\|<\varepsilon$ となる。この性質を使へば容易に $\Phi(U)$ は Y を値域とすることが判る。次に U を Lebesgue 可測集合とするとき，U と對等な Borel 集合 U' をとり，$\Phi(U)=\Phi(U')$ と定義する。この $\Phi(U)$ が本補助定理に述べられた $\Phi(U)$ であることが直ちに判る。　　以上

定理 7.[1] Y を Banach 空間とする。M^* から Y への $\binom{b}{o}$-連續作用素 Tx, $x\in M^*$, と

$$Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt},\ \text{但し}\ \varphi(t)=\int_0^t x(t)dt,\quad g(t)\ \text{は絕對强連續}$$

の形の作用素とは一致する。このとき T のノルムは，$[0,1]$ のあらゆる分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 及び $\varepsilon_i=\pm1$, $i=1,2,\dots n$ に對する $\left\|\sum_1^n\varepsilon_i\Big(g(t_i)-g(t_{i-1})\Big)\right\|$ の上端である。

證明。 $g(t)$ を絕對强連續函數とする。補助定理 1 により，$g(t)$ に對應す

(1) L. Kantorovitch: 前揭, 定理 22.

る完全加法的絕對連續集合函數を $\Phi(U)$ とする。定理 4 の證明中と同様に $x_k(t)$ を定義すると,

$$\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t}=\int_0^1 x_k(t)\Phi(dU),$$

今 $U_k=(t;|x(t)-x_k(t)|\geqq\varepsilon)$ とすれば, $\beta(U_k)\to 0$ $(k\to+\infty)$.

$$\left\|\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\Delta\varphi g\Delta}{\Delta t}-\int_0^1 x(t)\Phi(dU)\right\|=\left\|\int_0^1\Big(x_k(t)-x(t)\Big)\Phi(dU)\right\|$$

$$\leqq\varepsilon\,\underset{U}{\mathrm{l.u.b.}}\|\Phi(U)-\Phi([0,1]-U)\|+2\|x\|\underset{U\leqq U_k}{\mathrm{l.u.b.}}\|\Phi(U)-\Phi(U_k-U)\|$$

故に $k\to+\infty$ のとき, $\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t}$ は $\int_0^1 x(t)\Phi(dU)$ に强收斂する。即ち

$$\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}=\int_0^1 x(t)\,\Phi(dU)$$

故に $Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$ と置けば, 定理 5 により, Tx は $\binom{b}{o}$-連續である。

逆に Tx を M^* から Y への $\binom{b}{o}$-連續線形作用素とすれば, 定理 5 により, $Tx=\int_0^1 x(t)\Phi(dU)$ なる完全加法的絕對連續集合函數 $\Phi(U)$ が存在する。$g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, を $g(t)=\Phi([0,t])$ と定義すれば, 明かに, $g(t)$ は絕對强連續である。故に上述から

$$Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt},\qquad \varphi(t)=\int_0^t x(t)dt$$

が得られる。定理の最後の部分は, 補助定理 1 により明かである。

以上。

§2. $L(R)$ に於ける作用素。

$L(R)$ を R 上で β に關する可積分實函數の作る Banach 束とする。特に R が閉區間 $[0,1]$ 且 β が Lebesgue 測度函數となるとき, $L(R)$ を單に L と書く。先づ Y を完全ベクトル束とし, Y を値域とする $\mathfrak{R}_R$ 上の加法的集合函數 $\Phi(U)$ に對し, 常に $|\Phi(U)|\leqq\beta(U)y_0$ を滿足する Y の正要素 y_0 が存在するとき, $\Phi(U)$ は**束的 Lipschitz 條件**を滿足すると云ひ, かゝる y_0 の下端を**束的 Lipschitz 常數**と云ふ。

定理 1. $L(R)$ から完全ベクトル Y への $\binom{o}{o}$-有界線形作用素 Tx(1), $x\in L(R)$, は

(1) $(Tx;\|x\|\leqq 1)$ が (o)-有界となる線形作用素の意。

(1)　$Tx=\int_R x(t)\Phi(dU)$,　$\Phi(U)$ は束的 Lipschitz 條件を滿足する加法的集合函數を表す。

なる形の作用素と一致する。このとき T の抽象ノルムは $\Phi(U)$ の束的 Lipschitz 常數である。

證明。Tx を $L(R)$ から Y への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素としその抽象ノルムを y_0 とする。$U\in\mathfrak{K}_R$ の特性函數の T による像を $\Phi(U)$ とすれば，$|\Phi(U)|\leqq\beta(U)y_0$ となる。明かに $\Phi(U)$ は加法的である。この $\Phi(U)$ を使へば，Tx が (1) の形に書かれることが容易に判る。これから明かに $\Phi(U)$ の束的 Lipschitz 常數が y_0 であることが判る。逆に (1) の形で與へられる Tx は $\binom{o}{b}$-有界線形作用素であることも明かである。　　以上。

$g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, を Y を値域とする函數とするとき，任意の $0\leqq t_1, t_2\leqq 1$ に對し $|g(t_1)-g(t_2)|\leqq|t_1-t_2|y_0$ を滿足する正要素 $y_0\in Y$ が存在するならば，$g(t)$ は束的 Lipschitz 條件を滿足すると云ひ，かゝる y_0 の下端を束的 Lipschitz 常數と云ふ。

定理 2.[1]　L から完全ベクトル束 Y への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素 $Tx, x\in L$, は

(2)　$Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$,　$\varphi(t)=\int_0^t x(t)dt$,　$g(t)$ は束的 Lipschitz 條件を滿足する。

なる形の作用素と一致する。このとき T の抽象ノルムは $g(t)$ の束的 Lipschitz 常數である。

證明。$g(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, を束的 Lipschitz 條件を滿足する函數とし，その束的 Lipschitz 常數を y_0 とする。$g(t)$ に對し，y_0 を束的 Lipschitz 常數とする束的 Lipschitz 條件を滿足する加法的集合函數 $\Phi(U)$ を，$\Phi([0,t])=g(t)-g(0)$ となる樣一意的に定めることが出來る。$[0,1]$ の分割 $\mathfrak{D}_k$ に對し，前節 (3) 式に於けると同樣 $\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t}$ を定義する。但し $\varphi(t)=\int_0^t x(t)dt$, $x\in L$ である。前節定理 4 の證明と同樣に $x_k(t)$ を定義すると，

$$\left\|\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\Delta\varphi\Delta g}{\Delta t}-\int_0^1 x(t)\Phi(dU)\right\|=\left|\int_0^1\big(x_k(t)-x(t)\big)\Phi(dU)\right|\leqq\left(\int_0^1|(x_k(t)-x(t)|\,dt\right)y_0$$

を得る。故に $\mathfrak{D}_k$ $k=1,2,3,\dots$ を $\max_i|t_i^{(k)}-t_{i-1}^{(k)}|\to 0$ なる樣にとれば，

(1) L. Kantorovitch: 前揭，定理 23.

$\sum_{\mathfrak{D}_k}\frac{\varDelta\varphi\varDelta g}{\varDelta t}$ は $\int_0^1 x(t)\varPhi(dU)$ に (o)-収斂する。[1] 故に $\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}=\int_0^1 x(t)\varPhi(dU)$.
従て $Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$ と置けば，Tx は 前定理により $\binom{o}{b}$-有界線形作用素にして，T の抽象ノルムが y_0 となる。

逆に $L(R)$ から Y への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素 Tx を任意にとると，前定理 1 により，$Tx=\int_0^1 x(t)\varPhi(dU)$ と書かれる。今 $g(t)=\varPhi([0,t])$ と定義すれば，$\varPhi(U)$ が束的 Lipschitz 條件を満足することから，$g(t)$ も束的 Lipschitz 條件を満足することが判る。故に上述から $Tx=\int_0^1\frac{d\varphi(t)dg(t)}{dt}$，$\varphi(t)=\int_0^t x(t)dt$, が得られる。 以上。

Y を條件 (μ)[2]を満足するベクトル束とすれば，束的 Lipschitz 條件 $|\varPhi(U)|\leqq\beta(U)y_0$ を満足する加法的集合函數 $\varPhi(U)$ は，第四編第二章 §2 定理 1 により，不定 (o)-積分である。即ち $\varPhi(U)=\int_U y(t)\beta(dU)$ なる (o)-可積分函數 $y(t)$, $|y(t)|\leqq y_0$ が存在する。$x(t)$ を R 上の實可積分函數とすれば $x(t)y_0$ は (o)-可積分なる故，$x(t)y(t)$ も (o)-可積分である。[3] この性質を使へば，定理 1 から次の定理を得る。

定理 3. Y を條件 (μ) を満足する完全ベクトル束とする。$L(R)$ から Y への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素 Tx, $x\in L(R)$, は

$$Tx=\int_R x(t)y(t)\beta(dU), \qquad \big((o)\text{-積分}\big)$$

此處に $y(t)$ は (o)-有界 (o)-可積分函數を表す。
なる形の作用素と一致する。このとき T の抽象ノルムは, ess. l. u. b. $|y(t)|$[4] で與へられる。

本定理の特例として次の定理 4, 5 を擧げやう。

定理 4. $L(R)$ から $L_p(R')$, $1\leqq p<+\infty$ への $\binom{o}{b}$-連續線形作用用素[5]

---

(1) $\int_0^1|x_k(t)-x(t)|dt\to o\ (0)$ となるから。

(2) 第三編第二章 §4 參照。K-空間, K^{-}-空間, Bochner 束, 及び 0 でない各正要素には之に正値を與へる正線形汎函數の存在する K_6^{-} 型 "正則" ベクトル束等何れも條件 (μ) を満足するベクトル束である。

(3) 第四編第一章 §2 定理 5.

(4) $(t;|y(t)|\leqq y_0)$ が零測度集合を除いて R と一致する様な y_0 の下端の意。

(5) この場合 $\binom{o}{b}$-有界形作用素と一致する。

Tx の一般の形は

$$Tx=\int_R x(t)\varphi(t,t')\beta(dU)$$

である。但し $\varphi(t,t')$ は $\beta\times\beta'$-可測且 $\int_R[\mathrm{ess.\,l.u.b.}_t\,|\varphi(t,t')|]^p\beta'(dU')<+\infty$ にして T の抽象ノルムは $\mathrm{ess.\,l.u.b.}_t\,|\varphi(t,t')|$ で與へられる。

證明。定理 3 及び第四編第一章 §4 の所論から。(1)　　以上。

定理 5. $L(R)$ から $M^*_{R'}$ への $\binom{s}{o}$-連續線形作用素(2) $Tx, x\in L(R)$, の一般の形は,

$$Tx=\int_R x(t)\varphi(t,t')\beta(dU)$$

である。但し $\varphi(t,t')$ は $\beta\times\beta'$-可測且 $\mathrm{ess.\,l.u.b.}_{t,t'}\,|\varphi(t,t')|<+\infty$ にして T の抽象ノルムは, $\mathrm{ess.\,l.u.b.}_t\,|\varphi(t,t')|$ で與へられる。

證明。定理 3 及び第四編第一章 §4 の所論から。(3)　　以上。

次に Y を Banach 空間とする。Y を値域とする加法的集合函數 $\Phi(U)$ に對し, $\|\Phi(U)\|\leqq\alpha\beta(U)$ を滿足する正數 α が存在するとき, $\Phi(U)$ は **Lipschitz 條件**を滿足すると云ひ, かゝる α の下端を $\Phi(U)$ の **Lipschitz 常數**と呼ぶ。

定理 6. $L(R)$ から Banach 空間 Y への有界線形作用素 $Tx, x\in L(R)$, は

$Tx=\int_R x(t)\Phi(dU)$, $\Phi(U)$ は Lipschitz 條件を滿足する加法的集合函數を表す。

の形の作用素と一致する。このとき T のノルムは $\Phi(U)$ の Lipschitz 常數である。

定理 7. Y を Banach 空間とする。Y を値域とする加法的集合函數 $\Phi(U)$ は Lipschits 條件を滿足するとし, $Tx=\int_R x(t)\Phi(dU)$, $x\in L(R)$ と置く。次の條件

(1°) $\Phi(U)$ はコムパクト値である。

(2°) T は弱收斂列を强收斂列に變換する。

は互に同義である。また次の條件 (3°)–(6°)

(3°) T は可分値弱完全連續である。

---

(1) 108 頁參照。
(2) 强收斂列を (o)-收斂列に變換する線形作用素の意。
(3) 108 頁參照。

(4°) T は弱完全連續である。

(5°) $\left\{\dfrac{\Phi(U)}{\beta(U)}\right\}$(1) は制限的列的弱コムパクトである。

も互に同義にして，これから (1°), (2°) が從ふ。

證明。(1°)→(2°) $\{x_n(t)\}$ を 0 に弱收斂する $L(R)$ の要素列とする。與へられた正數 ε に對し，正數 N を充分大きくとり，$U_n=(t;|x_n(t)|\geqq N)$ と置くとき，$\int_{U_n}|x_n(t)|\beta(dU)<\varepsilon$ なる様にすることが出來る。M_R^* から Y への有界線形作用素 $Sx, x\in M_R^*$, を $Sx=\int_R x(t)\Phi(dU)$ で定義すれば，$\Phi(U)$ はコムパクト値なる故 S は完全連續作用素である。$x_n'(t)$ を $t\in R-U_n$ のとき，$x_n'(t)=x_n(t)$, その他の點で $x_n'(t)=0$ と定義すれば，$\|Sx_n'\|\to 0$ (o) が云へる。$\|Tx_n\|\leqq\|Sx_n'\|+\varepsilon\|T\|$ から $\|Tx_n\|\to 0$ $(n\to+\infty)$ が判る。

(2°)→(1°) $U\in\mathfrak{R}_R$ の特性函數を $x(t)$ とすれば，$\Phi(U)=Tx$ となる。然るに $L(R)$ に於て任意の區間は列的弱コムパクトなる故，條件 (2°) から (1°) が從ふことが判る。

(3°)→(4°) 自明。

(4°)→(5°) $U\in\mathfrak{R}_R^{(2)}$ の特性函數を $x(t)$ とすれば，$x\in L(R)$ 且 $\left\|\dfrac{1}{\beta(U)}x\right\|=1$ となる。$T\left(\dfrac{1}{\beta(U)}x\right)=\dfrac{\Phi(U)}{\beta(U)}$ なる故，$\left(\dfrac{\Phi(U)}{(\beta U)};\ U\in\mathfrak{R}_R\right)$ は制限的弱コムパクトである。

(5°)→(4°) $\left(\dfrac{\Phi(U)}{\beta(U)};\ U\in\mathfrak{R}_R\right)$ の列的弱位相による凸閉苞を A とすれば，A は列的弱コムパクトである。(3) 然るに $\|x\|\leqq 1$, $x\in L(R)$, に對し $Tx\in A$ なる故，T は弱完全連續である。

(4°)→(1°) T^* を T の共軛作用素とすれば，T^* は $\overline{Y}$ から M_R^* への弱完全連續作用素である。M_R^* の要素をその不定積分で表すとき $T^*\bar{y}$ は $\bar{y}\big(\Phi(U)\big)$ で與へられる。然るに M_R^* の列的弱コムパクト集合は $L(R)$ のコムパクト集合になる。(5) 故に T^* を $\overline{Y}$ から $L(R)$ への作用素と考へれば完全連續で

(1) $\beta(U)=0$ のとき，$\dfrac{\Phi(U)}{\beta(U)}=0$ と定める。

(2) $\beta(U)\neq 0$ とする。

(3) M. Krein and V. Šmulian: Annals of Math., **41** (1940), 556-

(4) V. Gantmacher: Recueil Math., **49** (1940), 301-308. 定理 1 參照。

(5) 第一章 §1 定理 3 による。

ある。從て $\Phi(U)$ はコムパクト値である。

$(4^\circ)\to(3^\circ)\cdot(4^\circ)\to(1^\circ)$ により $\Phi(U)$ はコムパクト値，從て可分値なる故 T も可分値となる。　　　　以上。

定理 8. Y を Banach 空間とする。Y を値域とする集合函數 $\Phi(U)$ が β に關する不定 Bochner 積分ならば，$\Phi(U)$ はコムパクト値である。

證明。$\Phi(U)=\int_U y(t)\beta(dU)$ とする。單函數 $y_n(t)$ を，$\|y_n(t)-y(t)\|\leqq\|y(t)\|$ 且殆ど到る所 $y_n(t)\to y(t)$ $(n\to+\infty)$ なる樣にとる。$\Phi_n(U)=\int_U y_n(t)\beta(dU)$ とすれば，$\Phi_n(U)$ はコムパクト値である。正數 ε に對し，$\int_R\|y_n(t)-y(t)\|\beta(dU)<\varepsilon$ なる n をとれば，$\|\Phi_n(U)-\Phi(U)\|<\varepsilon$ となる。これから $\Phi(U)$ がコムパクト値なることが判る。　　　　以上。

定理 7 から次の諸定理を得る。

定理 9.[1] 抽象 L 空間から Banach 空間への弱完全連續作用素は弱收斂列を强收列に變換する。

定理 10.[2] T, T' を抽象 L 空間內の弱完全連續作用素とすれば，TT' は完全連續作用素である。

定理 11.[3] $L(R)$ から Banach 空間 Y への弱完全連續作用素 Tx, $x\in L(R)$, は

$Tx=\int_R x(t)y(t)\beta(dU)$, (Bochner 積分) $y(t)$ は Y を値域とする殆どコムパクト値 Bochner 可積分函數にして，$\operatorname*{ess.\,l.u.b.}_t\|y(t)\|<+\infty$.

の形の作用素と一致する。このとき T のノルムは $\operatorname*{ess.\,l.u.b.}_t\|y(t)\|$ で與へられる。

證明。定理 7 及び前編第二章 §1 定理 1 から。　　　　以上。

定理 12.[4] $L(R)$ から $L_p(R')$, $1<p<+\infty$, への有界線形作用素 Tx の一般の形は

$$Tx=\int_R x(t)\varphi(t,t')\beta(dU)$$

である。但し $\varphi(t,t')$ は $\beta\times\beta'$-可測且 $\operatorname*{ess.\,l.u.b.}_t\int_{R'}|\varphi(t,t')|^p\beta'(dU')<+\infty$ に

(1) R. S. Phillips: Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–540. 5.5 定理.
(2) R. S. Phillips: 同, 5.6 系。
(3) R. S. Phillips: 同, 5.4 定理。
(4) N. Dunford: Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 474–494.

して T のノルムは, $\text{ess. l.u.b.}_{t}\left\{\int_{R'}|\varphi(t,t')|^{p}\beta'(dU')\right\}^{\frac{1}{p}}$ で與へられる。

證明。定理 11 を使つて。 以上。

§3. $L_p(R)$ $1 \leqq p < +\infty$ に於ける作用素。

X を Banach 空間とし, X から $L_r(R')$, $1 \leqq r \leqq +\infty$, への $\binom{o}{o}$-連續線形作用素 T_x, $x \in X$, の形を決定しやう。Tx は $L_r(R')$ の要素であるから, その不定積分を考へ, $U' \in \mathfrak{K}_{R'}$ 上の値を $f_{U'}(x)$ で表すと, $f_{U'} \in \bar{X}$ である。T の抽象ノルムの不定積分を $g(U')$ と置くと, $\|x\| \leqq 1$ に對し, $|f_{U'}(x)| \leqq g(U')$, 從て $\|f_{U'}\| \leqq g(U')$. これから $\text{var}_{U'}\|f_{U''}\| = g(U')$ なることが判る。X が局所列的弱コムパクト或は $\bar{X}$ が可分等の條件を滿足する場合には, $f_{U'}$ は不定 Bochner 積分 $\int_{U'}\bar{x}(t')\beta'(dU')$ となり, $f_{U'}(x) = \int_{U'}\bar{x}(t')(x)\beta'(dU')$ を得る故, Tx は x を $\bar{x}(t')(x)$ に變換する作用素となる。このとき T の抽象ノルムは, $\|\bar{x}(t')\|$ なる $L(R')$ の要素である。故に

定理 1. X が局所弱コムパクト或は $\bar{X}$ が可分ならば, Banach 空間 X から $L_r(R')$, $1 \leqq r \leqq +\infty$, への $\binom{o}{o}$-連續作用素 Tx, $x \in X$, の一般の形は, $\bar{X}$ を値域とする β' に關して Bochner 可積分函數 $\bar{x}(t')$ により, $x \to \bar{x}(t')(x)$ なる形に表され, T の抽象ノルムは $\|\bar{x}(t')\|$ なる $L_r(R')$ の要素で與へられる。

が得られる。特に X として $L_p(R)$, $1 < p < +\infty$ をとると

定理 2.(1) $L_p(R)$ $1 < p < +\infty$, から $L_r(R')$ への $\binom{o}{o}$-連續作用素 Tx, $x \in L_p(R)$, の一般の形は, $Tx = \int_R x(t)\varphi(t,t')\beta(dU)$ である。但し $\varphi(t,t')$ は $\beta \times \beta'$-可測函數にして $\left\{\int_R |\varphi(t,t')|^{p'}\beta(pU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ は $L_r(R')$ に屬する。このとき T の抽象ノルムは, $\left\{\int_R |\varphi(t,t')|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$ で與へられる。

§3. $\vee^p$, $1 < p < +\infty$ に於ける作用素。

Γ, $\mathfrak{M}$, $\beta(U)$ 等を第四編第三章に於けると同じ意味をもつものとし, 其處の記法を踏襲する。無限大値を許容すれば, $\beta(U)$ は $\mathfrak{M}$ を含む最小の Borel 族 $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ 上の完全加法的非負實集合函數に擴大されるから, Γ 上で點函數の積分を論ずることが出來る。この場合點函數が可測であるとは $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ に關し

(1) L. Kantorovitch: 前揭, 定理 36. L. Kantorovitch and B. Vulich: Compositio Math., **5** (1937), 119–165.

てであるとする。$\|\varphi\|=\left\{\int_\Gamma \frac{|\varphi(dU)|^p}{\beta(dU)}\right\}^{\frac{1}{p}}$, $1<p<+\infty$, をノルムとする加法的集合函數 $\varphi(U)$ の Banach 束 $\vee^p$ は, $\varphi(U)=\int_U \gamma(t)\beta(dU)$, $\|\varphi\|=\left\{\int_\Gamma |\gamma(t)|^p\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p}}$ なる實可積分函數 $\gamma(t)$ が存在するから, 本質的には $L_p(\Gamma)$ に外ならない。

先づ X を完全ベクトル束とし, $T\varphi$, $\varphi\in\vee^p$, $1<p<+\infty$, を $\vee^p$ から X への $\binom{o}{o}$-有界線形作用素とする。$\beta_U\in\vee^p$ を, $\beta_U(\bar{U})=\beta(U\bar{U})$, $U, \bar{U}\in\mathfrak{M}$ で定義し, $\xi(U)=T\beta_U$ と置くと, 明かに $\xi(U)$ は加法的集合函數にして $\beta(U)=0$ ならば, $\xi(U)=0$ となる。Δ を任意にとり, $\sum_{U\in\Delta}|c_U|^p\leqq 1$ なる實數 c_U に對し,

$$\sum_{U\in\Delta} c_U \frac{\beta_U}{\beta(U)^{\frac{1}{p}}} \tag{1}$$

を考へる。[1] (1) の全體は $\vee^p$ の單位球で稠密な集合を作る。T による (1) の像は

$$\sum_{U\in\Delta} c_U \frac{\xi(U)}{\beta(U)^{\frac{1}{p}}} \tag{2}$$

と書ける。(2) の全體の上端は T の抽象ノルムに等しくなる。先づ Δ を固定して c_U を變化させたとき, (2) の上端は $\left\{\sum_{U\in\Delta}\frac{|\xi(U)|^{p'}}{\beta(U)^{p'-1}}\right\}^{\frac{1}{p'}}$[2] になる。次に Δ を變化させ $\left\{\sum_{U\in\Delta}\frac{|\xi(U)|^{p'}}{\beta(U)^{p'-1}}\right\}^{\frac{1}{p'}}$ の上端を求めると $\left\{\int_\Gamma\frac{|\xi(dU)|^{p'}}{\beta(dU)^{p'-1}}\right\}^{\frac{1}{p'}}$ となる故, $\xi\in\vee^{p'}(X)$, 且 T の抽象ノルムは $N(\xi)$ で與へられる。任意の $\varphi\in\vee^p$ をとり, φ_Δ を考へると, $T\varphi_\Delta=\sum_{U\in\Delta}\frac{\varphi(U)\xi(U)}{\beta(U)}$ となる故, 容易に

$$T\varphi=\int_\Gamma\frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)}, \qquad \xi\in\vee^{p'}(X) \tag{3}$$

が得られる。

逆に (3) で定義される $T\varphi$ を考へると, $|T\varphi|\leqq N(\varphi)N(\xi)$ となることか

(1) $\beta(U)=0$ ならば, $\frac{\beta_U}{\beta(U)^{\frac{1}{p}}}=0$ と定める。以下同様。

(2) $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

ら，$T\varphi$ は $\vee^p$ から X への $\binom{o}{b}$-有界線形作用素であることが判る。故に

定理 1. X を完全ベクトル束とすれば，$\vee^p$, $1<p<+\infty$ から X への線形作用素 $T\varphi$, $\varphi\in\vee^p$, が $\binom{o}{b}$-有界となるための條件は，$\xi\in\vee^{p'}(X)$ が存在して (3) 式が成立つことである。このとき T の抽象ノルムは $N(\xi)$ で與へられる。

特に X が抽象 S 空間，Bochner 束，抽象 L 空間等であれば，$\xi\in\vee^{p'}(X)$ に對し，(p') (o)-可積分函數 $x(t)$ が存在し，$\xi(U)=\int_U x(t)\beta(dU)$, $N(\xi)=\left\{\int_\Gamma |x(t)|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$ となる。任意の $\varphi\in\vee^p$, $1<p<+\infty$, に對し，$\varphi(U)=\int_U \gamma(t)\beta(dU)$ なる $\gamma\in L_p(\Gamma)$ を考へれば容易に

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)}=\int_\Gamma \gamma(t)x(t)\beta(dU) \qquad (o)\text{-積分} \tag{4}$$

となることが判るから，

定理 2. X を抽象 S 空間，Bochner 束，抽象 L 空間の何れかとする。$L_p(\Gamma)$, $1<p<+\infty$ から X への線形作用素，$T\gamma$, $\gamma\in L_p(\Gamma)$, が $\binom{o}{b}$-有界なるための條件は，X を値域とする (p') (o)-可積分函數 $x(t)$ が存在して，$T\gamma=\int_\Gamma \gamma(t)x(t)\beta(dU)$, と書かれることである。このとき T の抽象ノルムは，$\left\{\int |x(t)|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$ で與へられる。

X が條件 (μ) を滿足する完全ベクトル束の場合には，その擴大抽象 S 空間を考へて本定理を適用すればよい。其の一例として次の定理が成立つ。

定理 3.(1) $L_p(\Gamma)$, $1<p<+\infty$, から $L_r(\Gamma')$, $1\leqq r\leqq+\infty$ への線形作用素 $T\gamma$, $\gamma\in L_p(\Gamma)$, が $\binom{o}{b}$-連續なるなめの條件は $\left\{\int_\Gamma |\varphi(t,t')|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}\in L_r(\Gamma')$ なる $\beta\times\beta'$-可測函數 $\varphi(t,t')$ が存在し，$T\gamma=\int_\Gamma \gamma(t)\varphi(t,t')\beta(dU)$ と書かれることである。このとき T の抽象ノルムは，$\left\{\int_\Gamma |\varphi(t,t')|^{p'}\beta(dU)\right\}^{\frac{1}{p'}}$ で與へられる。

次に $p=2$ として $\vee^2$ に於ける $\binom{o}{b}$-連續作用素と有限ノルムの (finite norm) 作用素との關係を述べる。$T\varphi$ を $\vee^2$ から抽象 L_2 空間への有界線形作用素とする。$\{\varphi_a\}$ を $\vee^2$ の正規完全直交系とする。高々可附番個の $T\varphi_a$ が

(1) L. Kantorovitch: 前揭，定理 35，前節定理 2 を一般にしたものである。

$T\varphi_\alpha \neq 0$ を滿足し, $\sum_\alpha \|T\varphi_\alpha\|^2 < +\infty$ のとき, $T\varphi$ は**有限ノルム**の作用素であると云ひ, $|||T|||^2 = \sum_\alpha \|T\varphi_\alpha\|^2$ と定義する。

定理 4. $\vee^2$ から抽象 L_2 空間 X への有界線形作用素 $T\varphi$ に對し, 次の條件 (1°), (2°) は互に同義である。

(1°) T は $\binom{o}{o}$-連續である。

(2°) T は有限ノルムである。

證明。 (1°)→(2°) 定理 1 により, $T\varphi = \int_\Gamma \frac{\varphi(dU)\xi(dU)}{\beta(dU)}$ なる $\xi \in \vee^2(X)$ が存在する。$T\varphi = (\varphi, \xi)$ と書くと, 前編第三章 §3 定理 4 を使つて, $(\varphi_\alpha, \xi) \neq 0$ なる φ_α は高々可附番個にして, $N(\xi) = \{\sum_\alpha (\varphi_\alpha, \xi)^2\}^{\frac{1}{2}}$ となる。抽象 L_2 空間の性質から[(1)]

$$\|N(\xi)\|^2 = \sum_\alpha \|(\varphi_\alpha, \xi)\|^2 = \sum_\alpha \|T\varphi_\alpha\|^2$$

となる故に T は有限ノルムである。

(2°)→(1°) $T\varphi_\alpha = x_\alpha$ と置く。T が有限ノルムであることから, $x_\alpha \neq 0$ なる x_α は, 高々可附番個にして, $|||T|||^2 = \sum_\alpha \|x_\alpha\|^2$ なる故 $\{\sum_\alpha x_\alpha^2\}^{\frac{1}{2}} \in X$ となる。$\xi(U) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(U) x_\alpha$ と置くと, 前編第三章 §3 定理 3 により, $\xi \in V^2(X)$ である。然るに $\beta_U(\bar{U}) = \beta(U\bar{U})$ とすれば, ノルム位相で $\beta_U = \sum_\alpha \varphi_\alpha(U)\varphi_\alpha$ なる故に, $\xi(U) = T\beta_U$ となり, 定理 1 の證明と同樣にして $N(\xi)$ が T の抽象ノルムであることが云へる。　　以上。

定理 5.[(2)] $L_2(R)$ から $L_2(R')$ への線形作用素 T に就て次の命題は互に同義である。

(1°) T は $\binom{o}{o}$-連續である。

(2°) T は有限ノルムである。

(3°) T は $\iint_{R\times R'} |\varphi(t, t')|^2 d(\beta\times\beta') < +\infty$ なる $\beta\times\beta'$ 可測核 $\varphi(t, t')$ による積分作用素である。

---

(1) x_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ を抽象 L_2 空間 X の要素とするとき $\{\sum_1^\infty x_n^2\}^{\frac{1}{2}} \in X$ の條件は, $\sum_1^\infty \|x_n\|^2 < +\infty$ にして, 且このとき $\|\{\sum_1^\infty x_n^2\}^{\frac{1}{2}}\|^2 = \sum_1^\infty \|x_n\|^2$ が成立つ。

(2) B. Vulich: Annals of Math., **38** (1937), 156–174.

證明。 $(1°) \rightleftarrows (2°)$ は前定理から，$(1°) \leftrightarrows (3)$ は定理 3 から。 以上。

本研究に於て御懇切な御指導を賜つた前田教授に深く感謝する。尙本研究は文部省科學研究費の補助によつてなされた。

廣島文理科大學數學敎室