可約幾何學の次元束

前　田　文　友

(昭和 18 年 5 月 4 日受附)

小平 [1][1] の可約な作用素環の次元についての研究は，そのまゝ可約幾何學 (連續補模束) の場合にも適用し得る。しかるに氏の方法は中心を Stone-Wallman の方法によつて集合族に表現し，この上に於ける可測函數を用ひて居る。而してかゝる可測函數は一つのベクトル束に類似の束を作つて居るのである。しかるにかゝるベクトル束に類似な束は可測函數により表現せざる前に現れて來る筈である。今幾何學 L の要素 a に同次元な要素の全體を $[a]$ とすれば，L は $[a]$ の如き類に分割される。かゝる $[a]$ の全體を $[L]$ にてあらはす。次元の大小によつて，$[L]$ に半順序をつければ，$[L]$ は束であつて，$a\frown b=0$ なるとき $[a]+[b]=[a\smile b]$ とすれば，$[L]$ には $+$ なる演算が定義せられ，從つてこれから λ が有理數の場合に $\lambda[a]$ なる演算が定義せられる。しかるときは $[L]$ はベクトル束と類似なものである。これを L の次元束と名付ける。從つてこの次元束 $[L]$ の構造を明らかにすれば，L の次元の性質がわかつて來る。

L が既約である場合は，例へば $[b]=\lambda[a]$ の形の關係がある。これは b の次元が a の次元の λ 倍であることを示してゐる。しかし L が可約である場合は λ は L の中心の部分に應じて變つて來る。即ち $[b]=\lambda[a]$ の式は積分の形であらはれて來る。こゝにベクトル束に於ける Radon-Nikodym 型の定理と全く同樣な定理が，次元束にもあらはれて來ることがわかる。

本稿に於ては，同次元性を配景性によりて定義すれば有限の場合しか現れて來ないから，Halperin [1] の $\equiv$ を用ひて同次元性を定義した。本稿を草するにあたつては，v. Neumann [2], 小平 [1] に負ふ所が多い。

1. 定義 1.1. 完全束 L に於て，Ω を任意の超限順序數とするとき，$\alpha<\beta<\Omega$ に對し

$$a_\alpha < a_\beta \quad \text{ならば} \quad b\frown\vee(a_\alpha;\alpha<\Omega)=\vee(b\frown a_\alpha;\alpha<\Omega),$$

$$a_\alpha > a_\beta \quad \text{ならば} \quad b\smile\wedge(a_\alpha;\alpha<\Omega)=\wedge(b\smile a_\alpha;\alpha<\Omega),$$

---

(1) 括弧 [ ] 內の數字は末尾の引用文獻中の番號を示す。

が成立するときは L を**連續束**といふ。(1)

以下 L は連續補模束とする。即ち v. Neumann [1] に於ける公理 I–V を滿足するもので，既約性の公理 VI は滿足するとは限らない。

$a \frown b=0$ なるとき，$a \smile b$ を $a \oplus b$ とかき，$(a_\alpha;\alpha<\Omega)\perp$ なるとき，$\vee(a_\alpha;\alpha<\Omega)$ を $\vee(\oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)$ とかくことにする。後の引用の便のため Halperin [1] より二三の補題を摘記する。

補題 1.1. すべての $0\leqq\alpha<\Omega$ に對して，分割 $a_\alpha=a_{\alpha+1}\oplus a'_\alpha$ が定義せられ，極限數 $\alpha\leqq\Omega$ に對しては $a_\alpha=\wedge(a_\beta;\beta<\alpha)$ なるときは

$$a_0=a_\Omega\oplus\vee(\oplus a'_\alpha;\alpha<\Omega).$$

[證] Halperin [1], Lemma 3.3.

補題 1.2. すべての $0\leqq\alpha<\Omega$ に對して

$$a_\alpha=\{\vee(a_\beta;\beta<\alpha)\frown a_\alpha\}\oplus a'_\alpha$$

とおくときは

$$\vee(a_\alpha;\alpha<\Omega)=\vee(\oplus a'_\alpha;\alpha<\Omega).$$

[證] Halperin [1], Lemma 3.4.

補題 1.3. $b=\vee(a_\alpha;\alpha<\Omega_1)=\vee(c_\beta;\beta<\Omega_2)$ ならば，

(1°) $b=\vee(\oplus a'_\gamma;\gamma<\Omega_3)=\vee(\oplus c'_\gamma;\gamma<\Omega_3)$,

(2°) すべての $\gamma<\Omega_3$ に對して $a'_\gamma\sim c'_\gamma$(2),

(3°) γ に對して適當なる $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$ をとれば $a'_\gamma\leqq a_{\alpha(\gamma)}$, $c'_\gamma\leqq c_{\beta(\gamma)}$,

なるが如き $(a'_\gamma;\gamma<\Omega_3)$, $(c'_\gamma;\gamma<\Omega_3)$ が存在する。

[證] Halperin [1], Theorem 3.1.

定義 1.2. $\mathfrak{G}$ を L に於ける自己束同型變換 T よりなる群とする。即ち T は L を L に寫す一對一の寫像にして，その半順序を變へないものである。從つて T によりて單位元，零元，結び，交りの關係は不變である。

$\mathfrak{G}$ のすべての變換 T に對して $Tz=z$ なるが如き中心の要素 z の全體を Z にてあらはし，これを **$\mathfrak{G}$ に關する L の中心**と云ふ。L の中心は L の部

---

(1) v. Neumann and Halperin [1], 87. 前田 [1] に於て，順序數を用ひずに，次の如く連續束を定義し得ることを注意した。"完全束 L に於て，$S\leqq L$ なるとき，S のすべての有限部分集合 S_0 に對して $b\frown\vee(a;a\in S_0)=\vee(b\frown a;a\in S_0)$ が成立するならば $b\frown\vee(a;a\in S)=\vee(b\frown a;a\in S)$ が成立し，S のすべての有限部分集合 S_0 に對して $b\smile\vee(a;a\in S_0)=\wedge(b\smile a;a\in S_0)$ が成立するならば $b\smile\wedge(a;a\in S)=\wedge(b\smile a;a\in S)$ が成立するとき，L を連續束といふ。" Zorn の補題を用ひるためにはこの形の方がよい。こゝでは v. Neumann [1], [2], Halperin [1] を引用するために，定義 1.1 の如くした。

(2) $a\sim b$ は，a と b とが配景的なること，即ち $a\oplus x=b\oplus x$ なるが如き x が存在することを意味する。

分束として完全ブール代數であるから, Z も亦 L の部分束として完全ブール代數である。

$a \in L$ なるとき, $a \leqq z \in Z$ なるが如き z の中最小なるもの $e(a)$ を, a の $\mathfrak{G}$ **に關する中心包**と云ふ。

Z が 0 と 1 とのみよりなるとき, L は $\mathfrak{G}$ **に關して既約**であると云ふ。しからざるときは L は $\mathfrak{G}$ **に關して可約**である云ふ。

$\mathfrak{G}$ が唯一つの恒等變換のみからなるときは, 上に定義した $Z, e(a)$ は夫々普通の意味の中心, 中心包に外ならない。$Z, e(a)$ を普通の意味の中心, 中心包と區別するために $Z_{\mathfrak{G}}$, $e_{\mathfrak{G}}(a)$ の如く書くべきであるが, 簡單なるために添字 $\mathfrak{G}$ を省略する。

補題 1.4. (i) $S \subseteqq L$ ならば

$$e\Big(\bigvee(a\,;\,a\in S)\Big)=\bigvee\Big(e(a)\,;\,a\in S\Big)\,,\qquad e\Big(\bigwedge(a\,;\,a\in S)\Big)\leqq\bigwedge\Big(e(a)\,;\,a\in S\Big)\,;$$

(ii) $z\in Z$, $a\in L$ ならば $e(z\frown a)=z\frown e(a)$.

[證] v. Neumann [2], Theorem 1.3 (d), (e), (f) と全く同様に證明される。

定義 1.3. $a, b \in L$ に對して,

(1°) $a=\bigvee(\oplus\, a_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)$, $b=\bigvee(\oplus\, b_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)$,

(2°) すべての $\alpha<\Omega$ に對して, 一つの $T_\alpha\in\mathfrak{G}$ が存在し $T_\alpha a_\alpha\sim b_\alpha$,

が成立するときは, $a\equiv b$ にてあらはす。

$\equiv$ につきて, 反射律, 對稱律が成立することは明らかである。移動律は Halperin [1], Theorem 4.1 により成立する。又 $a\equiv 0$ ならば $a=0$ である。

補題 1.5. $(a_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)\perp$, $(b_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)\perp$ にして, すべての $\alpha<\Omega$ に對して $a_\alpha\equiv b_\alpha$ ならば,

$$\bigvee(\oplus\, a_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)\equiv\bigvee(\oplus\, b_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)\,.$$

[證] Halperin [1], Theorem 4.2.

補題 1.6. $z\in Z$ とするときは,

(i) $a\equiv b$ ならば, $z\frown a\equiv z\frown b$,

(ii) $a\equiv b$ ならば, $e(a)=e(b)$.

[證] (i) $a\equiv b$ ならば, $a=\bigvee(\oplus\, a_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)$, $b=\bigvee(\oplus\, b_\alpha\,;\,\alpha<\Omega)$, $T_\alpha a_\alpha\sim b_\alpha$. $z\frown a=\bigvee\Big(\oplus\,(z\frown a_\alpha)\,;\,\alpha<\Omega\Big)$, $z\frown b=\bigvee\Big(\oplus\,(z\frown b_\alpha)\,;\,\alpha<\Omega\Big)$ にして, $T_\alpha(z\frown a_\alpha)=z\frown T_\alpha a_\alpha\sim z\frown b_\alpha$(1).

(1) v. Neumann [2], Theorem 1.4 (a) より。

(ii) $e'(a)$ を $e(a)$ の補元とすれば，(i) より $e'(a)\frown a \equiv e'(a)\frown b$. 然るに $e'(a)\frown a \leqq e'(a)\frown e(a)=0$. 故に $e'(a)\frown a=0$, 從つて $e'(a)\frown b=0$. 即ち $b\leqq e(a)$. 從つて $e(b)\leqq e(a)$. 同様に $e(a)\leqq e(b)$. 故に $e(a)=e(b)$.

補題 1.7. $b\in L$ が與へられたとき，

$$a_1\leqq a,\quad b_1\leqq b,\quad a_1\equiv b_1 \quad \text{ならば}\quad a_1=b_1=0 \qquad (*)$$

を滿足するが如き要素 a の中には最大なるもの a^* が存在し，$a^*\in Z$ にして，$a^*\frown e(b)=0$ である。

[證] (i) $(*)$ を滿足する a の全體を S とし，$a^*=\vee(a;\, a\in S)$ とおけば，Halperin [1], Lemma 4.1 の證明の前半の如くして $a^*\in S$. 從つて a^* が $(*)$ を滿足する最大の要素である。

(ii) $b\notin S$ なれば $a^*\neq 1$. a^* の二つの補元を $a^{*\prime}$, $a^{*\prime\prime}$ とする。

$$a^{*\prime\prime}=(a^{*\prime}\frown a^{*\prime\prime})\oplus d_1,\qquad d_2=(a^{*\prime}\smile a^{*\prime\prime})\frown a^*$$

の如く d_1, d_2 をとれば，

$$d_1\frown a^{*\prime}=d_1\frown a^{*\prime\prime}\frown a^{*\prime}=0,\qquad d_2\frown a^{*\prime}\leqq a^*\frown a^{*\prime}=0.$$

$$\begin{aligned} d_2\smile a^{*\prime}&=\{(a^{*\prime}\smile a^{*\prime\prime})\frown a^*\}\smile a^{*\prime}=(a^{*\prime}\smile a^{*\prime\prime})\frown(a^*\smile a^{*\prime})=a^{*\prime}\smile a^{*\prime\prime}\\ &=a^{*\prime}\smile(a^{*\prime}\frown a^{*\prime\prime})\smile d_1=d_1\smile a^{*\prime}. \end{aligned}$$

故に $d_1\sim d_2$. $d_2\leqq a^*$ なれば d_1 は $(*)$ を滿足する。從つて $d_1\leqq a^*$. しかるに $d_1\leqq a^{*\prime\prime}$ なれば $d_1=0$. 故に $a^{*\prime}=a^{*\prime\prime}$. 即ち a^* は唯一つの補元を有するから a^* は L の中心に屬する。Ta^* も $T^{-1}a^*$ も $(*)$ を滿足するから，$Ta^*\leqq a^*$, $T^{-1}a^*\leqq a^*$. 故にすべての $T\in\mathfrak{G}$ につきて $Ta^*=a^*$. 從つて $a^*\in Z$.

(iii) $a^*\frown b\neq 0$ なるときは，$a_1=b_1=a^*\frown b$ とおけば，$a_1\leqq a^*$, $b_1\leqq b$, $a_1\equiv b_1$. これ $a^*\in S$ に矛盾する。故に $a^*\frown b=0$. 補題 1.4 (ii) より $a^*\frown e(b) =e(a^*\frown b)=0$.

補題 1.8. 次の二命題は同義である。

(α) $\quad a_1\leqq a,\quad b_1\leqq b,\quad a_1\equiv b_1$ ならば $a_1=b_1=0$.

(β) $\quad e(a)\frown e(b)=0$.

[證] $(\alpha)\to(\beta)$. b に對して補題 1.7 から $a^*\in Z$ を求める。しかるときは $e(a)\frown e(a)\leqq a^*\frown e(b)=0$.

$(\beta)\to(\alpha)$. $a_1\leqq a$, $b_1\leqq b$, $a_1\equiv b_1$ ならば補題 1.6 (ii) より $e(a_1)=e(b_1)$. 故に $e(a_1)=e(a_1)\frown e(b_1)\leqq e(a)\frown e(b)=0$. 即ち $a_1=0$.

定理 1.1. $a, b \in L$ に對して次の性質を有する a', a'', b', b'' が存在する。

(1°) $$a = a' \oplus a'', \qquad b = b' \oplus b''.$$

(2°) $$a' \equiv b', \qquad e(a'') \frown e(b'') = 0.$$

尙 $e(a') = e(b') = e(a) \frown e(b)$ である。

[證] (1°), (2°) は補題 1.8 を用ひ, v. Neumann [2], Lemma 2.1, Theorem 2.1 の如くして證明し得る。補題 1.4 (i) より $e(a) = e(a') \smile e(a'')$, $e(b) = e(b') \smile e(b'')$. 故に $e(a) \frown e(b) = e(a') = e(b')$.

補題 1.9. $a \equiv b$, $a = \bigvee(\oplus a_\alpha; \alpha < \Omega)$ ならば, $b = \bigvee(\oplus b_\alpha; \alpha < \Omega)$, $a_\alpha \equiv b_\alpha$ なるが如き $(b_\alpha; \alpha < \Omega)$ が存在する。

[證] $a \equiv b$ なれば, $a = \bigvee(\oplus c_\beta; \beta < \Omega_1)$, $b = \bigvee(\oplus d_\beta; \beta < \Omega_1)$, $P_\beta T_\beta c_\beta = d_\beta$ である。但し $T_\beta \in \mathfrak{G}$ にして, P_β は配景的寫像を意味する。

$$a = \bigvee(\oplus a_\alpha; \alpha < \Omega) = \bigvee(\oplus c_\beta; \beta < \Omega_1)$$

に補題 1.3 を適用すれば

(1°) $a = \bigvee(\oplus a'_\gamma; \gamma < \Omega_2) \equiv \bigvee(\oplus c'_\gamma; \gamma < \Omega_2)$,

(2°) すべての $\gamma < \Omega_2$ に對して $a'_\gamma \sim c'_\gamma$.

(3°) γ に對して適當なる $\alpha(\gamma), \beta(\gamma)$ をとれば, $a'_\gamma \leqq a_{\alpha(\gamma)}$, $c'_\gamma \leqq c_{\beta(\gamma)}$,

なるが如き $(a'_\gamma; \gamma < \Omega_2)$, $(c'_\gamma; \gamma < \Omega_2)$ が存在する。$b_2 = \bigvee\left(\oplus P_{\beta(\gamma)} T_{\beta(\gamma)} c'_\gamma; \alpha(\gamma) = \alpha\right)$ とおけば $b = \bigvee(\oplus b_\alpha; \alpha < \Omega)$ にして, $P_{\beta(\gamma)} T_{\beta(\gamma)} c'_\gamma \equiv a'_\gamma$ なれば, 補題 1.5 より $a_\alpha \equiv b_\alpha$.

補題 1.10. $a \oplus b = c \oplus d$ なるとき, $a = a_1 \oplus a_2$, $b = b_1 \oplus a_2$, $c = c_1 \oplus c_2$, $d = d_1 \oplus d_2$, $a_1 \equiv c_1$, $a_2 \equiv d_1$, $b_1 \equiv c_2$, $b_2 \equiv d_2$ なるが如き分解がある。

[證] 補題 1.3 から $a \oplus b = \bigvee(\oplus g_\alpha; \alpha < \Omega)$, $c \oplus d = \bigvee(\oplus h_\alpha; \alpha < \Omega)$ に分解され, $g_\alpha \sim h_\alpha$ $(\alpha < \Omega)$ にして, $g_\alpha \leqq a$ か $g_\alpha \leqq b$, 又 $h_\alpha \leqq c$ か $h_\alpha \leqq d$ である。

$$a_1 = \bigvee(\oplus g_\alpha;\ g_\alpha \leqq a,\ g_\alpha \sim h_\alpha \leqq c), \qquad a_2 = \bigvee(\oplus g_\alpha;\ g_\alpha \leqq a,\ g_\alpha \sim h_\alpha \leqq d),$$
$$b_1 = \bigvee(\oplus g_\alpha;\ g_\alpha \leqq b,\ g_\alpha \sim h_\alpha \leqq c), \qquad b_2 = \bigvee(\oplus g_\alpha;\ g_\alpha \leqq b,\ g_\alpha \sim h_\alpha \leqq d),$$

等とおけばよい。

定義 1.4. $a \in L$ に於て, $a_1 \equiv a$ なるが如き $a_1 < a$ が存在せざるときは, a は**有限**であるといふ。$a_1 \equiv a$ なるが如き $a_1 < a$ が存在するときは, a は**無限**であるといふ。$0 < z \leqq e(a)$ なるすべての $z \in Z$ に對して $z \frown a$ が無限

であるとき，a は**純粋に無限**(1) であるといふ。

補題 1.11. a が有限にして，$b<a$ ならば，b も有限である。

[證] $a=b\oplus c$ とする。もし b が無限ならば，$b=b_1\oplus b_2$, $b_1\equiv b$, $b_2\neq 0$ なる b_1, b_2 が存在する。しかるときは $b_1\oplus c\equiv b\oplus c=a$ なれば，a は無限となりて假定に反する。

補題 1.12. $\big(e(a_\alpha);\ \alpha<\Omega\big)\perp$ にして a_α が有限なるときは，$\vee(\oplus a_\alpha;\ \alpha<\Omega)$ は有限である。

[證] $a=\vee(\oplus a_\alpha;\ \alpha<\Omega)$ が無限なるときは，$b<a$, $b\equiv a$ なるが如き b が存在する。補題 1.9 より $b=\vee(\oplus b_\alpha;\ \alpha<\Omega)$, $a_\alpha\equiv b_\alpha$ なるが如き b_α $(\alpha<\Omega)$ が存在する。$b_\alpha=e(b_\alpha)\frown b\leqq e(a_\alpha)\frown a=a_\alpha$. a_α は有限なれば $a_\alpha=b_\alpha$. 從つて $a=b$. これ假定に反する。

補題 1.13. $a\in L$ に對して適當なる $z^*\in Z$ を用ひ，$a=(z^*\frown a)\oplus\{(1-z^*)\frown a\}$(2) に於て，$z^*\frown a$ は有限にして，$(1-z^*)\frown a$ は純粋に無限ならしめ得る。

[證] $z\frown a$ が有限なるが如き $z\in Z$ の全體を S とし，$z^*=\vee(z;\ z\in S)$ とおく。補題 1.3 より $z^*=\vee(\oplus z_\alpha;\ \alpha<\Omega)$ とあらはし得る。但し $z_\alpha\in Z$ にして，適當なる $z\in S$ に對して $z_\alpha\leqq z$ である。補題 1.11 より $z_\alpha\in S$ である。

$$a=(z^*\frown a)\oplus\{(1-z^*)\frown a\}$$

とおけば，補題 1.12 より $z^*\frown a$ は有限である。$0<z\leqq(1-z^*)\frown e(a)$ なる任意の $z\in Z$ をとるときは，もし $z\frown a$ が有限ならば $z\in S$, 從つて $z\leqq z^*$ なれば，$z\frown a$ は無限である。故に $(1-z^*)\frown a$ は純粋に無限である。

定義 1.5. 補題 1.13 に於て，$z^*\frown a$ を a の**有限成分**，$(1-z^*)\frown a$ を a の**無限成分**といふ。

補題 1.14. $a<b<c$, $a\equiv c$ ならば，$a\equiv b\equiv c$ である。

[證] $c=b\oplus b'$, $b=a\oplus a'$ とおけば，$c=a\oplus a'\oplus b'$, $c\equiv a$ なれば，補題 1.9 より $a=a_1\oplus a_1'\oplus b_1'$, $a\equiv a_1$, $a'\equiv a_1'$, $b'\equiv b_1'$ なる分解がある。又 $a\equiv a_1$ なれば，$a_1=a_2\oplus a_2'\oplus b_2'$, $a_1\equiv a_2$, $a_1'\equiv a_2'$, $b_1'\equiv b_2'$ なる分解がある。かくの如くして一般に $a_{n-1}=a_n\oplus a_n'\oplus b_n'$, $a_{n-1}\equiv a_n$, $a_{n-1}'\equiv a_n'$, $b_{n-1}'\equiv b_n'$ である。今 $a_0=a$, $a_0'=a'$, $b_0'=b'$ とおけば，補題 1.1 より

(1) 小平 [1] 定義 2.4 による。
(2) $1-z^*$ は Z に於て z^* の補元を示す。

$$c=\bigwedge_{n=0}^{\infty}a_n\oplus\bigvee_{n=0}^{\infty}(\oplus\, a'_n)\oplus\bigvee_{n=0}^{\infty}(\oplus\, b'_n)\,,$$

$$b=\bigwedge_{n=0}^{\infty}a_n\oplus\bigvee_{n=0}^{\infty}(\oplus\, a'_n)\oplus\bigvee_{n=1}^{\infty}(\oplus\, b'_n)\,,$$

しかるに $\bigvee_{n=0}^{\infty}(\oplus\, b'_n)\equiv\bigvee_{n=1}^{\infty}(\oplus\, b'_n)$ なれば, $c\equiv b$ である。

補題 1.15. a が純粋に無限なるとき, $a=c\oplus p$, $a\equiv c$, $e(a)=e(p)$ なるが如き分解がある。

[證] (i) a は無限であるから

$$a=c\oplus p\,,\quad a\equiv c\,,\quad p\neq 0 \tag{1}$$

なるが如き分解がある。かゝる p を用ひて $z=e(p)$ の如くあらはされる z の全體を S とし, $z^*=\bigvee(z;\, z\in S)$ とおく。補題 1.2 より $z^*=\bigvee(\oplus\, z_\alpha;\, \alpha<\Omega)$ とあらはし得る。但し $z_\alpha\in Z$ にして, 適當なる $z^{(\alpha)}\in S$ に對して $z_\alpha\leqq z^{(\alpha)}$ である。今 $a=c^{(\alpha)}\oplus p^{(\alpha)}$, $z^{(\alpha)}=e(p^{(\alpha)})$ とし, $p_\alpha=z_\alpha\frown p^{(\alpha)}$, $p^{(\alpha)}=p_\alpha\oplus p'_\alpha$, $c_\alpha=c^{(\alpha)}\oplus p'_\alpha$ とおけば,

$$a=c_\alpha\oplus p_\alpha\,,\qquad c^{(\alpha)}\leqq c_\alpha\leqq a$$

にして, $c^{(\alpha)}\equiv a$ なれば, 補題 1.14 より $a\equiv c_\alpha$. 又 $e(p_\alpha)=z_\alpha\frown e(p^{(\alpha)})=z_\alpha\frown z^{(\alpha)}=z_\alpha\neq 0$ なれば $p_\alpha\neq 0$. 故に $z_\alpha\in S$.

$$p^*=\bigvee(\oplus\, p_\alpha;\, \alpha<\Omega)\,,\qquad a=c^*\oplus p^* \tag{2}$$

とすれば, $z_\alpha\frown a=(z_\alpha\frown c^*)\oplus(z_\alpha\frown p^*)=(z_\alpha\frown c^*)\oplus p_\alpha$. 他方 $a=c_\alpha\oplus p_\alpha$ なれば, $z_\alpha\frown a=(z_\alpha\frown c_\alpha)\oplus(z_\alpha\frown p_\alpha)=(z_\alpha\frown c_\alpha)\oplus p_\alpha$. 故に $z_\alpha\frown c^*\sim z_\alpha\frown c_\alpha\equiv z_\alpha\frown a$. 故に

$$z^*\frown a=\bigvee\big(\oplus\,(z_\alpha\frown a);\, \alpha<\Omega\big)\equiv\bigvee\big(\oplus\,(z_\alpha\frown c^*);\, \alpha<\Omega\big)=z^*\frown c^*\,.$$

又 $e(p^*)=\bigvee\big(\oplus\, e(p_\alpha);\, \alpha<\Omega\big)=z^*$ なれば,

$$(1-z^*)\frown a=\{(1-z^*)\frown c^*\}\oplus\{(1-z^*)\frown p^*\}=(1-z^*)\frown c^*\,.$$

故に $a\equiv c^*$. 從つて (2) が (1) の如き分割の中, $e(p)$ が最大なるものである。

(ii) $\{1-e(p^*)\}\frown a\neq 0$ ならば, これは無限である。故に

$$\{1-e(p^*)\}\frown a=d\oplus q\,,\quad \{1-e(p^*)\}\frown a\equiv d\,,\quad q\neq 0$$

なる分解がある。$e(p^*)\frown a=a_1$ とおけば,

$$a=(a_1\oplus d)\oplus q\,,\quad a\equiv a_1\oplus d\,,\quad q\neq 0$$

は一つの (1) の分解なれば, $e(q)\leqq e(p^*)$. 他方 $q\leqq 1-e(p^*)$ なれば, $q=0$ となりて不合理である。故に $\{1-e(p^*)\}\frown a=0$. 從つて $a\leqq e(p^*)$. 故に $e(a)=e(p^*)$. 即ち (2) が求むる分解である。

2. 定義 2.1. $a\equiv b_1<b$, $b_1\not\equiv b$ なるが如き b_1 が存在するときは, $a<b$ 或は $a>b$ とかく。

補題 2.1. $a<c\equiv b$, $a\not\equiv c$ ならば, $a<b$ である。

[證] $c=a\oplus a_1$ とおけば, 補題 1.9 より $b=d\oplus d_1$, $a\equiv d$, $a_1\equiv d_1$ の如く分解される。故に $a\equiv d<b$ にして, $d\not\equiv b$ である。なんとなれば, $d\equiv b$ ならば $a\equiv d\equiv b\equiv c$ となりて $a\not\equiv c$ に矛盾する。

補題 2.2. (i) $a\equiv c$, $b\equiv d$, $a<b$ ならば, $c<d$.

(ii) $a<b$, $b<c$ ならば, $a<c$.

(iii) $a<b$, $a\equiv b$, $a>b$ は互に排他的である。

(iv) $a<b$ ならば, $e(a)\leqq e(b)$.

(v) $a<b$, $z\in Z$ ならば, $z\frown a\leqq z\frown b$.

[證] (i) $a<b$ なれば, $a\equiv b_1<b$, $b_1\not\equiv b$. しかるときは $b_1<b\equiv d$, $b_1\not\equiv b$ なれば, 補題 2.1 より $b_1<d$. 即ち $b_1\equiv d_1<d$, $d_1\not\equiv d$. 故に $c\equiv d_1<d$, $d_1\not\equiv d$, 即ち $c<d$.

(ii) 假定により $a\equiv b_1<b$, $b_1\not\equiv b$, $b\equiv c_1<c$, $c_1\not\equiv c$. しかるときは $b_1<b\equiv c_1$, $b_1\not\equiv b$ なれば, 補題 2.1 より $b_1<c_1$. 即ち $b_1\equiv c_2<c_1$, $c_2\not\equiv c_1$. 故に $a\equiv c_2<c_1<c$, $c_1\not\equiv c$ なれば, 補題 1.14 より $c_2\not\equiv c$. 從つて $a<c$.

(iii) $a<b$ ならば $a\equiv b_1<b$, $b_1\not\equiv b$ なれば, $a<b$ と $a\equiv b$ とは兩立しない。$a>b$ と $a\equiv b$ とも同様。$a<b$, $a>b$ ならば, (ii) より $a<a$. これ定義 2.1 より不合理である。

(iv) $a<b$ ならば, $a\equiv b_1<b$. 故に補題 1.6 より $e(a)=e(b_1)\leqq e(b)$.

(v) $a\equiv b_1<b$ なれば, 補題 1.6 より $z\frown a\equiv z\frown b_1\leqq z\frown b$. 故に $z\frown a\leqq z\frown b$.

定理 2.1. L が $\mathfrak{G}$ に關して既約なるときは, 任意の a, b に對して, $a>b$, $a\equiv b$, $a<b$ の中一つしかも唯一つが常に成立する。(1)

[證] 定理 1.1 より $a=a'\oplus a''$, $b=b'\oplus b''$, $a'\equiv b'$, $e(a'')\frown e(b'')=0$. しかるに L は $\mathfrak{G}$ に關して既約なれば, Z は 0 と 1 とのみからなる。$e(a'')=0$ ならば $a''=0$. $e(a'')=1$ ならば, $a''\neq 0$. $e(b'')$ につきても同様。故に

---

(1) この定理により, $\mathfrak{G}$ に關して既約なるときは, L は半順序 $\leqq$ によりて, 線形順序系を作る。Halperin [1] は, この上に有限性即ち $a\equiv 1$ ならば $a=1$ なることを假定して, v. Neumann [1] の方法を適用して, L の次元を決定した。

$$a'' \neq 0,\ b''=0\ ;\quad a''=0,\ b''=0\ ;\quad a''=0,\ b''\neq 0$$

の三つの場合の中少くとも一つが常に成立する。これ等は夫々 $a \geqq b$, $a \equiv b$, $a \leqq b$ の場合を示す。しかして補題 2.2 (iii) より $a > b$, $a \equiv b$, $a < b$ の中唯一つが成立する。

定義 2.2. すべての $z \in Z$ に對して, $z \frown a < z \frown b$ か $z \frown a = z \frown b = 0$ なるとき, $a \ll b$ とかく。

[注意 2.1] 定義 2.2 に於て, $z=1$ とおけば, $a \ll b$ ならば, $a < b$ か $a=b=0$ である。

補題 2.3. (i) $a \ll b$, $z \in Z$ ならば, $z \frown a \ll z \frown b$.

(ii) $a \ll b$ ならば, $e(a) \leqq e(b)$.

(iii) $a \leqq b$, $b \ll c$, $c \leqq d$ ならば, $a \ll d$.

(iv) $a \ll b$ ならば, $a \equiv b_1 \leqq b$, $b_1 \ll b$ なるが如き b_1 が存在する。

(v) a が有限にして $a = a_1 \oplus a_2$ のとき, $a_1 \ll a$ と $e(a_2)=e(a)$ とは同義である。

[證] (i) 任意の $y \in Z$ に對して $y \frown z \in Z$ なれば, 定義 2.2 より $y \frown z \frown a < y \frown z \frown b$ か $y \frown z \frown a = y \frown z \frown b = 0$ である。故に $z \frown a \ll z \frown b$.

(ii) $a \ll b$ ならば, 注意 2.1 より $a < b$ か $a=b=0$. 故に補題 2.2 (iv) より $e(a) \leqq e(b)$.

(iii) 補題 1.6 (i) 及び補題 2.2 (v) より, 任意の $z \in Z$ に對して $z \frown a \leqq z \frown b$, $z \frown c \leqq z \frown d$. しかるに定義 2.2 より $z \frown b < z \frown c$ か $z \frown b = z \frown c = 0$ である。始めの場合は補題 2.2 (i), (ii) より $z \frown a < z \frown d$. 後の場合は $z \frown a = 0 \leqq z \frown d$. 故に $z \frown a < z \frown d$ か $z \frown a = z \frown d = 0$ である。從つて $a \ll d$.

(iv) $a \ll b$ ならば, 注意 2.1 より $a \equiv b_1 < b$, $b_1 \neq b$ か $a=b=0$ である。始めの場合は (iii) より $b_1 \ll b$. 後の場合は $b_1=b=0$ とおけば $a \equiv b_1 \leqq b$ にして, $b_1 \ll b$ である。

(v) $a_1 \ll a$ は, すべての $z \in Z$ に對して $z \frown a_1 < z \frown a$ か $z \frown a_1 = z \frown a = 0$ であることゝ同義である。しかるに $z \frown a_1 \leqq z \frown a$ にして, 補題 1.11 より $z \frown a$ は有限なれば, このことはすべての $z \in Z$ に對して $z \frown a_1 < z \frown a$ か $z \frown a = 0$ であることと同義である。しかるに $z \frown a = (z \frown a_1) \oplus (z \frown a_2)$ なれば, このことはすべての $z \in Z$ に對して $z \frown a_2 \neq 0$ か $z \frown a = 0$ である

ことと同義である。換言すれば，$a_1 \ll a$ なることは $z \in Z$, $z \frown a_2 = 0$ ならば $z \frown a = 0$ であることと同義である。即ちこのことは $z \in Z$, $a_2 \leqq 1-z$ ならば，$a \leqq 1-z$ なることと同義である。しかるに $1-z \in Z$ なれば，$a_1 \ll a$ は $e(a_2) \geqq e(a)$ なることと同義である。他方 $a \geqq a_2$ より $e(a) \geqq e(a_2)$. 故に $a_1 \ll a$ は $e(a_2) = e(a)$ と同義である。

定理 2.2. 任意の $a, b \in L$ に對して次の性質を有する $q(a,b) \in Z$ が存在する。

(i) $q(a,b) \geqq 1-e(a)$, $q(a,b) \frown a \leqq q(a,b) \frown b$,
$\bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown a \geqq \bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown b$.

(ii) 特に a が有限であるときは，$\bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown a \gg \bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown b$ にして，$z \in Z$ に對して $z \leqq q(a,b)$ のとき及びそのときに限り $z \frown a \leqq z \frown b$ である。

[證] 定理 1.1 より $a = a' \oplus a''$, $b = b' \oplus b''$, $a' \equiv b'$, $e(a'') \frown e(b'') = 0$ なるが如き a', a'', b', b'' が存在する。$q(a,b) = 1-e(a'')$ とおけば，$q(a,b) \geqq 1-e(a)$ にして，

$$q(a,b) \frown a = q(a,b) \frown (a' \oplus a'') = q(a,b) \frown a'.$$

又 $b'' \leqq e(b'') \leqq q(a,b)$ なれば

$$q(a,b) \frown b = q(a,b) \frown (b' \oplus b'') = \bigl(q(a,b) \frown b'\bigr) \oplus b''.$$

故に，補題 1.6 より $q(a,b) \frown a' \equiv q(a,b) \frown b'$ なれば，$q(a,b) \frown a \leqq q(a,b) \frown b$.

次に
$$e(a'') \frown a = e(a'') \frown (a' \oplus a'') = \{e(a'') \frown a'\} \oplus a''. \tag{1}$$

又 $e(a'') \frown b'' \leqq e(a'') \frown e(b'') = 0$ なれば，

$$e(a'') \frown b = e(a'') \frown (b' \oplus b'') = e(a'') \frown b'. \tag{2}$$

故に，$e(a'') \frown b' \equiv e(a'') \frown b'$ なれば，$e(a'') \frown a \geqq e(a'') \frown b$. 即ち $\bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown a \geqq \bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown b$.

(ii) 次に a は有限なりとする。(1), (2) より任意の $z \in Z$ に對して

$z \frown e(a'') \frown a = \{z \frown e(a'') \frown a'\} \oplus (z \frown a'')$, $\quad z \frown e(a'') \frown b = z \frown e(a'') \frown b'$

なれば，$z \frown a'' = 0$ ならざる限り $z \frown e(a'') \frown a > z \frown e(a'') \frown b$. $z \frown a'' = 0$ ならば，$z \frown e(a'') = e(z \frown a'') = 0$. 從つて $z \frown e(a'') \frown a = z \frown e(a'') \frown b = 0$. 故に $e(a'') \frown a \gg e(a'') \frown b$. 即ち $\bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown a \gg \bigl(1-q(a,b)\bigr) \frown b$.

$z \leqq q(a,b)$ ならば，$z \frown a \leqq z \frown b$ なることは (i) から明らかである。次に $z \in Z$, $z \frown a \leqq z \frown b$ とすれば，$e(a'') \frown a \gg e(a'') \frown b$ なれば，注意 2.1 より

$z \frown e(a'') \frown a = z \frown e(a'') \frown b = 0$. 故に $z \frown e(a'') = z \frown e(a'') \frown e(a) = e\big(z \frown e(a'') \frown a\big) = 0$. 即ち $z \leqq 1 - e(a'') = q(a, b)$.

補題 2.4. $a \oplus b = c \oplus d$ なるときは,

$$z \frown a \leqq z \frown c, \qquad (1-z) \frown b \leqq (1-z) \frown d$$

なるが如き $z \in Z$ が存在する。

[證] 補題 1.10 より $a = a_1 \oplus a_2$, $b = b_1 \oplus b_2$, $c = c_1 \oplus c_2$, $d = d_1 \oplus d_2$, $a_1 \equiv c_1$, $a_2 \equiv d_1$, $b_1 \equiv c_2$, $b_2 \equiv d_2$ なるが如き分解がある。$z = q(d_1, c_2)$ とおけば, 定理 2.2 より

$$z \frown d_1 \leqq z \frown c_2, \qquad (1-z) \frown d_1 \geqq (1-z) \frown c_2.$$

$$z \frown c = (z \frown c_1) \oplus (z \frown c_2) \geqq (z \frown a_1) \oplus (z \frown a_2) = z \frown a,$$

$$\begin{aligned}(1-z) \frown d &= \{(1-z) \frown d_1\} \oplus \{(1-z) \frown d_2\} \geqq \{(1-z) \frown b_1\} \oplus \{(1-z) \frown b_2\} \\ &= (1-z) \frown b.\end{aligned}$$

補題 2.5. a, b が有限ならば, $a \smile b$ も有限である。

[證] (i) 先づ $a \frown b = 0$ とし, $c = a \oplus b$ が無限であるとする。しかるときは $c = c_1 \oplus p_1$, $c \equiv c_1$, $p_1 \neq 0$ なる c_1, p_1 が存在する。$c \equiv c_1$ なれば補題 1.9 より $c_1 = c_2 \oplus p_2$, $c_1 \equiv c_2$, $p_1 \equiv p_2$ なるが如き c_2, p_2 がある。$c \equiv c_2$, $c = a \oplus b$ なれば, $c_2 = a_2 \oplus b_2$, $a \equiv a_2$, $b \equiv b_2$ に分解せられる。

$$a \oplus b = c_1 \oplus p_1 = c_2 \oplus p_2 \oplus p_1 = (a_2 \oplus p_1) \oplus (b_2 \oplus p_2)$$

なれば, 補題 2.4 より

$$z \frown (a_2 \oplus p_1) \leqq z \frown a, \qquad (1-z) \frown (b_2 \oplus p_2) \leqq (1-z) \frown b$$

なる $z \in Z$ が存在する。補題 1.6 より $z \frown a \equiv z \frown a_2$ なれば, 補題 2.2 より $z \frown (a_2 \oplus p_1) \leqq z \frown a_2$. 補題 1.11 より $z \frown a_2$ は有限であるから $z \frown p_1 = 0$. 同様に $(1-z) \frown p_2 = 0$. $p_1 \equiv p_2$ なれば $(1-z) \frown p_1 = 0$. 故に $p_1 = (z \frown p_1) \oplus \{(1-z) \frown p_1\} = 0$. これ $p_1 \neq 0$ に矛盾する。故に $a \smile b$ は有限である。

(ii) 一般の場合は $a = (a \frown b) \oplus a_1$, $b = (a \frown b) \oplus b_1$ とおけば, $a \smile b = (a \frown b) \oplus a_1 \oplus b_1$. しかるに $a \frown b$, a_1, b_1 は有限であるから, (i) より $a \smile b$ も有限である。

補題 2.5 c が有限なるとき, $c = a_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus b_2$, $a_1 \equiv b_1$ ならば, $a_2 \equiv b_2$ である.

[證] $z = q(a_2, b_2)$ とおけば, 定理 2.2 より

$$z \frown a_2 \leqq z \frown b_2, \qquad (1-z) \frown a_2 \geqq (1-z) \frown b_2$$

今 $z\frown a_2 < z\frown b_2$ とすれば，$z\frown a_2 \equiv d < z\frown b_2$ なる d が存在する．しかるときは

$$(z\frown b_1)\oplus d < z\frown c, \qquad (z\frown b_1)\oplus d \equiv (z\frown a_1)\oplus(z\frown a_2) = z\frown c.$$

これ c が有限なることに矛盾する。故に $z\frown a_2 \equiv a\frown b_2$. 同様に $(1-z)\frown a_2 \equiv (1-z)\frown b_2$. 從てつ $a_2 \equiv b_2$.

補題 2.7 c が有限なるとき，$c=a_1\oplus a_2$, $d=b_1\oplus b_2$, $c\equiv d$, $a_1\equiv b_2$ ならば，$a_2\equiv b_2$ である．

[證] 補題 1.9 より $d=d_1\oplus d_2$, $a_1\equiv d_1$, $a_2\equiv d_2$ なるが如き d_1, d_2 が存在する．$b_1\equiv d_1$ なれば，補題 2.6 より $b_2\equiv d_2$. 即ち $a_2\equiv b_2$ である。

補題 2.8 $e(a)\leqq e(b)$ ならば，$a=\vee(\oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)$, $a_\alpha \lesseqqgtr b$ なるが如き a の分解がある。

[證] 補題 1.8 より $0\neq a_0\leqq a$, $0\neq b_0\leqq b$, $a_0\equiv b_0$ なるが如き a_0, b_0 が存在する。このとき $0\neq a_0 \lesseqqgtr b$ である。$a=a_0\oplus c_1$ とおく。$c_0=a$ とし，すべての $\alpha<\gamma$ に對して

$$c_\alpha = a_\alpha \oplus c_{\alpha+1}, \qquad 0\neq a_\alpha \lesseqqgtr b,$$

又 $\alpha\leqq\gamma$ が極限數のときは $c_\alpha=\wedge(c_\beta;\beta<\alpha)$ の如く定義されたるとき，$c_\gamma\neq 0$ ならば，$e(c_\gamma)\leqq e(a)\leqq e(b)$ なれば，上と同様に補題 1.8 を用ひて，

$$c_\gamma = a_\gamma \oplus a_{\gamma+1}, \qquad 0\neq a_\gamma \lesseqqgtr b$$

の如く $c_\Omega=0$ になるまで定義して行くときは，補題 1.1 より $a=\vee(\oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)$ にして，$a_\alpha \lesseqqgtr b$ である。

定義 2.3 $(a;a\in S)\perp$ ならば，S は常に有限或は可附番集合なるとき，L は**可附番獨立條件**を滿足すると云ふ。

定理 2.3 L が可附番獨立條件を滿足するとき，a, b が共に純粹に無限にして $e(a)=e(b)$ ならば，$a\equiv b$ である。(1)

[證] 補題 1.15 より $a=c_1\oplus p_1$, $a\equiv c_1$, $e(a)=e(p_1)$ なるが如き分解がある。補題 1.9 より $c_1=c_2\oplus p_2$, $c_1\equiv c_2$, $p_1\equiv p_2$ の如く分解せられる．從つて

$$a=c_2\oplus p_1\oplus p_2, \quad a\equiv c_2, \quad p_1\equiv p_2, \quad e(a)=e(p_1).$$

かくの如き方法を續けて，$c_\infty=\wedge(c_n;n=1,2,\ldots)$ とおけば，補題 1.1 より

$$a=c_\infty\oplus\vee(\oplus p_n;n=1,2,\ldots), \quad p_1\equiv p_n, \quad e(a)=e(p_1).$$

---

(1) 小平 [1] Lemma 2.5 參照。

$e(b)=e(p_1)$ にして，L は可附番獨立條件を滿足するから，補題 2.8 に於ける分解

$$b=\vee(\oplus b_\alpha;\alpha<\Omega),\quad b_\alpha\leqq p_1$$

に於て $(b_\alpha;\alpha<\Omega)$ は有限或は可附番集合である．故に補題 1.5 より $b\leqq a$. 同様にして $a\leqq b$. 從つて $a\equiv b$.

3. 補題 3.1 有限なる a によりて $z=e(a)$ の如くあらはされる $z\in Z$ が存在するときは，その中には最大なるもの z^* が存在する。

［證］ 有限なる a によりて $z=e(a)$ の如くあらはされる z の全體を S とし，$z^*=\vee(z;z\in S)$ とおく，補題 1.2 より $z^*=\vee(\oplus z_\alpha;\alpha<\Omega)$ とあらはし得る。但し z_α は適當なる $z^{(\alpha)}\in S$ に對して $z_\alpha\leqq z^{(\alpha)}$ である。$z^{(\alpha)}=e(a^{(\alpha)})$ なるとき $a_\alpha=z_\alpha\frown a^{(\alpha)}$ とおけば，補題 1.11 より a_α は有限にして，$e(a_\alpha)=z_\alpha\frown e(a^{(\alpha)})=z_\alpha$. 故に $z_\alpha\in S$ である。$a^*=\vee(\oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)$ とおけば，補題 1.12 より a^* は有限である。補題 1.4 より $e(a^*)=\vee\big(e(a_\alpha);\alpha<\Omega\big)=\vee(z_\alpha;\alpha<\Omega)=z^*$. 故に z^* が求むる最大なるものである。

定義 3.1 補題 3.1 に於て求めた z^* を用ひて，$z_{\mathrm{I,II}}=z^*$, $z_{\mathrm{III}}=1-z^*$ とおき，$L_{\mathrm{I,II}}=L(0,z_{\mathrm{I,II}})$, $L_{\mathrm{III}}=L(0,z_{\mathrm{III}})$ とする。

$L=L_{\mathrm{I,II}}\oplus L_{\mathrm{III}}$ である。

定理 3.1 L_{III} の要素はすべて純粹に無限である。

［證］ $a\leqq z_{\mathrm{III}}$ なるとき，$0<z\leqq e(a)\leqq z_{\mathrm{III}}$ なる $z\in Z$ に對して $z\frown a$ が有限なりとすれば，補題 3.1 より $e(z\frown a)\leqq z_{\mathrm{I,II}}$. しかるに $e(z\frown a)=z\frown e(a)=z\leqq z_{\mathrm{III}}$ なれば，これは不合理である。故に a は純粹に無限である。

定義 3.2 $a\neq 0$ にして，$x\ll a$ ならば $x=0$ なるとき，a を**最小元**といふ。

補題 3.2 a が最小元にして，$0\neq b\leqq a$ ならば，b は最小元である。

［證］ $x\ll b$ ならば，補題 2.3 (iii) より $x\ll a$. 故に $x=0$. 從つては最小元である。

補題 3.3 $\big(e(a_\alpha);\alpha<\Omega\big)\perp$ にして a_α が最小元なるときは，$\vee(\oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)$ は最小元である。

［證］ $a=\vee(\oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)$ とおく。$x\ll a$ ならば，任意の $\beta<\Omega$ に對して，

補題 2.3 (i) より

$$e(a_\beta)\frown x\ll e(a_\beta)\frown a=\vee\Big(\oplus\big(e(a_\beta)\frown a_\alpha\big)\,;\,\alpha<\Omega\Big)$$

しかるに $\alpha\neq\beta$ なるとき $e\big(e(a_\beta)\frown a_\alpha\big)=e(a_\beta)\frown e(a_\alpha)=0$, 即ち $e(a_\beta)\frown a_\alpha=0$ なれば, $e(a_\beta)\frown x\ll e(a_\beta)\frown a_\beta=a_\beta$. a_β は最小元なれば, $e(a_\beta)\frown x=0$. $x\ll a$ なれば補題 2.3 (ii) より $x\leqq e(a)$. 故に

$$x=e(a)\frown x=\vee\big(\oplus e(a_\alpha)\,;\,\alpha<\Omega\big)\frown x=\vee\Big(\oplus\big(e(a_\alpha)\frown x\big)\,;\,\alpha<\Omega\Big)=0.$$

從つて a は最小元である。

補題 3.4 $L_{\mathrm{I,II}}$ に於て, 最小元 a によりて $z=e(a)$ の如くあらはされる $z\in Z$ が存在するときは, その中には最大なるもの z^* が存在する。

[證] ある最小元 $a\in L_{\mathrm{I,II}}$ によりて $z=e(a)$ の如くあらはされる z の全體を S とし, $z^*=\vee(z\,;z\in S)$ とおく。補題 1.2 より $z^*=\vee(\oplus z_\alpha\,;\alpha<\Omega)$ とあらはし得る。但し z_α は S の中の適當なる $z^{(\alpha)}=e(a^{(\alpha)})$ に對して $z_\alpha\leqq z^{(\alpha)}$ である。$a_\alpha=z_\alpha\frown a^{(\alpha)}$ とおけば, 補題 3.2 より a_α は最小元にして, $e(a_\alpha)=z_\alpha\frown e(a^{(\alpha)})=z_\alpha$. 故に $z_\alpha\in S$ $(\alpha<\Omega)$ である. $a^*=\vee(\oplus a_\alpha\,;\alpha<\Omega)$ とおけば, 補題 3.3 より a^* は最小元にして, 補題 1.4 より $e(a^*)=\vee\big(\oplus e(a_\alpha)\,;\alpha<\Omega\big)=z^*$. 故に z^* が求むる最大なるものである。

定義 3.3 補題 3.4 に求めた z^* を用ひて, $z_{\mathrm{I}}=z^*$, $z_{\mathrm{II}}=z_{\mathrm{I,II}}-z^*$ とおき, $L_{\mathrm{I}}=L(0,z_{\mathrm{I}})$, $L_{\mathrm{II}}=L(0,z_{\mathrm{II}})$ とする. 又 $Z_{\mathrm{I}}=(z\,;z\leqq z_{\mathrm{I}},z\in Z)$, $Z_{\mathrm{II}}=(z\,;z\leqq z_{\mathrm{II}}, z\in Z)$ とおく。

定義 3.1 より $L=L_{\mathrm{I}}\oplus L_{\mathrm{II}}\oplus L_{\mathrm{III}}$ である。

定理 3.2 L_{II} は最小元を含まない。

[證] $a\in L_{\mathrm{II}}$ が最小元なるときは, 補題 3.4 より $e(a)\leqq z_{\mathrm{I}}$. しかるに $a\leqq z_{\mathrm{II}}$ なれば, $a=0$. これ a が最小元なることに矛盾する。

補題 3.5 L_{I} に於ける最小元は有限である.

[證] $a\in L_{\mathrm{I}}$ が最小元であるとする。a の無限成分 a_∞ が 0 ならざるときは, 補題 3.2 より a_∞ は最小元である。補題 3.1, 定義 3.1 より $e(k)=z_{\mathrm{I,II}}$ なるが如き有限なる元をとるときは, 補題 1.13 より a_∞ は純粋に無限であるから $0\neq e(a_\infty)\frown k\ll a_\infty$. これ a_∞ が最小元なることに矛盾する. 故に $a_\infty=0$. 從つて a は有限である.

補題 3.6 元 a が有限なる最小元であるための必要且つ充分なる條件は, $a\neq 0$ にして, $c<a$ ならば $e(c)<e(a)$ なることである。

[證] (i) 必要。 a が有限なる最小元なるとき, $e(c)=e(a)$ なる $c<a$ が存在するとすれば, 補題 2.3 (v) より $a=c\oplus c_1$ なる c_1 に對して $c_1\ll a$. $c_1\neq 0$ なることは a が最小元なることに矛盾する。

(ii) 充分。 a が無限であるとすれば, $c\equiv a$ なるが如き $c<a$ が存在する。しかるときは $e(c)=e(a)$ にして假定に反する。故に a は有限である。次に a が最小元ならずとすれば, $x\ll a$ なる $x\neq 0$ が存在する。補題 2.3 (iv) より $x\equiv a_1\leqq a$, $a_1\ll a$ なる a_1 が存在する。$a=a_1\oplus c$ とおけば, 補題 2.3 (v) より $e(c)=e(a)$. しかるに $a_1\neq 0$ なれば $c<a$. これ假定に反する。故に a は最小元である。

補題 3.7 L_{I} に於て, a が最小元にして $e(a)=e(b)$ ならば, $a\lesssim b$ である。又 a, b が最小元にして $e(a)=e(b)$ ならば, $a\equiv b$ である。

[證] 定理 1.1 より $a=a'\oplus a''$, $b=b'\oplus b''$, $a'\equiv b'$, $e(a')=e(b')=e(a)\frown e(b)$ の如く分解せられる。$e(a')=e(a)$ であるから補題 3.5, 補題 3.6 より $a=a'$. 從つて $a\lesssim b$. もし b も亦最小元なるときは, 同様にして $b=b'$. 故に $a\equiv b$.

定理 3.3 $z_{\mathrm{I}}=e(h)$ なるが如き最小元 h をとるときは, L_{I} に於けるすべての最小元 a に對して $a\equiv e(a)\frown h$ である. 從つて $z_{\mathrm{I}}=e(a)$ なるが如き最小元 a に對しては $a\equiv h$ である。

[證] a を L_{I} に於ける最小元とし $h_1=e(a)\frown h$ とおけば, h_1 は最小元にして $e(h_1)=e(a)\frown e(h)=e(a)$. 故に補題 3.7 より $a\equiv h_1$. 從つて $z_{\mathrm{I}}=e(a)$ ならば $a\equiv h$.

補題 3.8 $a(\neq 0)$ が最小元ならざるときは, $b\frown c=0$, $b\equiv c$, $0\neq b$, $c<a$ なるが如き b, c が存在する.

[證] a が有限なるときは補題 3.6 より, a が無限なるときは定義 1.4 より $e(d_1)=e(a)$ なるが如き $d_1<a$ が存在する。$a=c_1\oplus d_1$ とすれば $0\neq e(c_1)\leqq e(a)$. $b_1=e(c_1)\frown d_1$ とおけば, $b_1, c_1<a$, $b_1\frown c_1=0$, $e(b_1)=e(c_1)\frown e(d_1)=e(c_1)\neq 0$. 故に補題 1.8 より $0\neq b\leqq b_1$, $0\neq c\leqq c_1$, $b\equiv c$ なる b, c が存在する. $b\frown c\leqq b_1\frown c_1=0$ なれば, b, c が求むるものである。

補題 3.9 $a\in L_{\mathrm{II}}$ なるときは, 任意の自然數 n に對して, $a=b_1\oplus\dots\oplus b_n$, $b_i\equiv b_j$, $e(b_i)=e(a)$ なるが如き $(b_i; i=1, \dots, n)$ が存在する。

[證] (i) $a\neq 0$ ならば, 定理 3.2 より a は最小元でないから, 補題 3.8 より $c_1\frown c_2=0$, $c_1\equiv c_2$, $c_1\neq 0$ なるが如き $c_1, c_2<a$ が存在する。c_1 は最小

元でないから，同様にして $d_1 \frown d_2=0$, $d_1 \equiv d_2$, $d_1 \neq 0$ なるが如き $d_1, d_2 < c_1$ が存在する．$c_1 \equiv c_2$ なれば，補題 1.9 より $d_3 \frown d_4=0$, $d_1 \equiv d_3$, $d_2 \equiv d_4$ なるが如き $d_3, d_4 < c_2$ が存立する。従つて $(d_1, d_2, d_3, d_4)\perp$, $d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv d_4$, $d_1 \neq 0$, $d_1, d_2, d_3, d_4 < a$ である。$n \leqq 2^m$ なる自然數 m をとり，上の方法を m 回繰り返へせば，$(c_i; i=1, \dots, n)\perp$, $c_i \equiv c_j$, $c_i \neq 0$, $c_i < a$ なるが如き $(c_i; i=1, \dots, n)$ を得る。

(ii) $a=0$ のときは本補題は明らかであるから，$a \neq 0$ とする。(i) より

$$a=b^{(0)} \oplus c^{(1)}, \quad b^{(0)}=b_1^{(0)} \oplus \dots \oplus b_n^{(0)}, \quad b_i^{(0)} \equiv b_j^{(0)}$$

とあらはすことが出來る。$c^{(0)}=a$ とし，すべての $\alpha < \gamma$ に對して

$$c^{(\alpha)}=b^{(\alpha)} \oplus c^{(\alpha+1)}, \quad b^{(\alpha)}=b_1^{(\alpha)} \oplus \dots \oplus b_n^{(\alpha)}, \quad b_i^{(\alpha)}=b_j^{(\alpha)},$$

又 $\alpha \leqq \gamma$ が極限數ならば $c^{(\alpha)}=\wedge(c^{(\beta)}; \beta < \alpha)$ の如く定義せられたるとき，$c^{(\gamma)} \neq 0$ ならば，(i) より

$$c^{(\gamma)}=b^{(\gamma)} \oplus c^{(\gamma+1)}, \quad b^{(\gamma)}=b_1^{(\gamma)} \oplus \dots \oplus b_i^{(\gamma)}, \quad b_i^{(\gamma)} \equiv b_j^{(\gamma)}$$

の如くあらはすことが出來る。かくの如き方法を $c^{(\Omega)}=0$ になるまで續けて行くときは，補題 1.1 より $a=\vee(\oplus b^{(\alpha)}; \alpha < \Omega)$ である。$(b_i^{(\alpha)}; \alpha < \Omega)\perp$ にして，$b_i^{(\alpha)} \equiv b_j^{(\alpha)}$ なれば，$b_i=\vee(\oplus b_i^{(\alpha)}; \alpha < \Omega)$ とおくときは，補題 1.5 より $b_i \equiv b_j$ にして，$a=b_1 \oplus \dots \oplus b_n$ である。補題 1.4, 補題 1.6 (ii) より $e(a)=e(b_1) \smile \dots \smile e(b_n)=e(b_i)$.

4. 定義 4.1 $a \equiv x$ なる $x \in L$ の全體を $[a]$ とかき，a を $[a]$ の**代表元**といふ。$[a]$ $(a \in L)$ の全體を $[L]$ にてあらはす。$[L]$ に於て $a < b$ なるとき $[a]<[b]$ と定義し，$a \ll b$ なるとき $[a] \ll [b]$ と定義する。

a が有限，無限，純粹に無限，或は最小元なるとき，夫々 $[a]$ は有限，無限，純粹に無限，或は最小元なりといふ。

$[L_{\mathrm{I}}]$, $[L_{\mathrm{II}}]$, $[L_{\mathrm{III}}]$ も $[L]$ と同様に定義する。

$e(h)=z_{\mathrm{I}}$ なるが如き最小元 h をとるとき，$[h]$ を $[L_{\mathrm{I}}]$ の**基最小元**といふ。

$z \in Z$ なるとき，$[z \frown a]$ を $[a]$ の**成分**といふ。

[注意 4.1] 補題 2.2 より，$[L]$ に於て $[a]<[b]$ はその代表元 a, b に無關係に定まり，又 $\leqq$ によりて $[L]$ は半順序系である。

L が $\mathfrak{G}$ に關して既約なるときは，定理 2.1 より $[L]$ は線形順序系である。

定理 3.3 より，$[L_{\mathrm{I}}]$ の基最小元は唯一つにして，$[L_{\mathrm{I}}]$ の最小元はすべて基最小元の成分である。

定義 4.2 $[a], [b]\in[L]$ に對して，$a_1\in[a]$, $b_1\in[b]$, $a_1\frown b_1=0$ なる a_1, b_1 が存在するときは，$[a]+[b]$ を $[a_1\oplus b_1]$ によりて定義する。かゝる a_1, b_1 が存在しないときは，$[a]+[b]$ は定義せられない。

[注意 4.2] 補題 1.5 より，$[a]+[b]$ は，その定義に用ひた代表元に無關係に定まる。$[a]+[b]=[b]+[a]$, $[a]+[0]=[a]$ なることは定義から明らかである。

補題 4.1 $[a]+[b], ([a]+[b])+[c]$ が存在するときは，$[b]+[c], [a]+([b]+[c])$ が存在し，$([a]+[b])+[c]=[a]+([b]+[c])$.

[證] 假定により $a\frown b=0$, $(a\smile b)\frown c=0$ の如く a, b, c をとり得る。しかるときは $(a, b, c)\perp$ なれば，$[b]+[c]$, $[a]+([b]+[c])$ は存在し，$([a]+[b])+[c]=[a\oplus b\oplus c]=[a]+([b]+[c])$.

定理 4.1 (i) $[L]$ は半順序 $\leqq$ により束である。

(ii) $[a]+[b]$ が存在するときは $[a]+[b]=[a]\smile[b]+[a]\frown[b]$.

(iii) $e(a)\frown e(b)=0$ と $[a]\frown[b]=[0]$ とは同義である。(1)

[證] (i) $[a], [b]\in[L]$ とするときは，定理 2.2 より $z=q(a, b)$ とおけば，

$$z\frown a\leqq z\frown b, \qquad (1-z)\frown a\geqq(1-z)\frown b.$$

故に $\quad s=\{(1-z)\frown a\}\oplus(z\frown b), \qquad d=(z\frown a)\oplus\{(1-z)\frown b\}$

とおけば，補題 1.5 より $a=\{(1-z)\frown a\}\oplus(z\frown a)\leqq s$. 同様に $b\leqq s$. 又 $a\leqq s_1$, $b\leqq s_1$ ならば，$(1-z)\frown a\leqq(1-z)\frown s_1$, $z\frown b\leqq z\frown s_1$. 故に $s\leqq s_1$. 故に $[a]\smile[b]$ は存在し，$[s]$ に等しい. 同様に $[a]\frown[b]$ は存在し，$[d]$ に等しい。

(ii) $[a]+[b]$ が存在するときは，$a\frown b=0$ と考へ得。しかるときは $z\frown s\frown d=(z\frown b)\frown(z\frown a)=0$, $(1-z)\frown s\frown d=\{(1-z)\frown a\}\frown\{(1-z)\frown b\}=0$ なれば，$s\frown d=0$. 即ち $[s]+[d]$ は存在し

$$[s]+[d]=[(1-z)\frown a]+[z\frown b]+[z\frown a]+[(1-z)\frown b]=[a]+[b].$$

(iii) 定理 2.2 の證明より $a=a'\oplus a''$, $b=b'\oplus b''$, $e(a')=e(b')=e(a)\frown e(b)$, $e(a'')\frown e(b'')=0$ にして，$z=1-e(a'')$ である。$e(a)\frown e(b)=0$ のときは，$e(a')=e(b')=0$ 即ち $a'=b'=0$. 故に $z=1-e(a)$. 從つて，$e(z\frown a)=\{1-e(a)\}\frown e(a)$

(1) 前田 [2] に於てベクトル束の根柢に横はつてゐるブール代數を見出す方法を述べた。(iii) より $[L]$ の根柢に横はるブール代數は Z があることがわかる。

$=0$ なれば $z \frown a=0$, 又 $(1-z) \frown b \leqq e(a) \frown e(b)=0$. 故に $d=0$. 從つて $[a] \frown [b]=0$. 逆に $[a] \frown [b]=[0]$ のときは, $d=0$ なれば, $z \frown a=0$, $(1-z) \frown b=0$. しかるに

$$e(z \frown a)=z \frown e(a)=\{1-e(a'')\} \frown \{e(a') \smile e(a'')\}=\{1-e(a'')\} \frown e(a'),$$

$$e\big((1-z) \frown b\big)=(1-z) \frown e(b)=e(a'') \frown \{e(b') \smile e(b'')\}=e(a'') \frown e(a')$$

なれば, $\{(1-e(a'')\} \frown e(a')=0$, $e(a'') \frown e(a')=0$. 從つて $e(a) \frown e(b)=e(a')=0$.

定義 4.3 $[L]$ を L の**次元束**といふ。

定理 4.2 L_{III} が可附番獨立條件を滿足するときは, $[L_{\mathrm{III}}]$ は完全ブール代數である。

[證] 補題 1.6 (ii), 定理 2.3, 定理 3.1 より L_{III} に於ては, $e(a)$ と $[a]$ とは一對一の對應をなす。この對應は半順序を變へないから, Z_{III} と $[L_{\mathrm{III}}]$ とは束-同型である。即ち $[L_{\mathrm{III}}]$ は完全ブール代數である。

補題 4.2 $\big(e(a_\alpha);\alpha<\Omega\big)\perp$ ならば, $\vee([a_\alpha];\alpha<\Omega)$ は存在し, $[\vee \oplus a_\alpha;\alpha<\Omega)]$ に等しい。

[證] $\vee(\oplus a_\alpha;\ \alpha<\Omega)=b$ とおけば, すべての $\alpha<\Omega$ に對して, $[a_\alpha]\leqq[b]$. 次にすべての $\alpha<\Omega$ に對して $[a_\alpha]\leqq[c]$ とする。$a_\alpha\equiv d_\alpha\leqq c$ なるが如き d_α をとるとき, $e(a_\alpha)=e(d_\alpha)$ なれば, $(d_\alpha;d<\Omega)\perp$. 故に補題 1.5 より $b\equiv \vee(\oplus d_\alpha;\alpha<\Omega)\leqq c$. 從つて $[b]\leqq[c]$. 故に $\vee([a_\alpha];\alpha<\Omega)$ は存在し, $[b]$ に等しい。

定義 4.4 $[a]$ が有限にして, $[a]\geqq[b]$ なるときは, $a\geqq b$ であるから $a\geqq a_1\equiv b$ なるが如き a_1 が存在する。$a=a_1\oplus a_2$ とおくとき, $[a]-[b]$ を $[a_2]$ によつて定義する。

[注意 4.3] 補題 2.7 より $[a]-[b]$ はその代表元 a,b に無關係に一意的に定まる。

補題 4.3 (i) $[a]+[b]$ が有限ならば, $([a]+[b])-[b]=[a]$.

(ii) $[b]$ が有限にして $[a]\leqq[b]$ ならば, $[a]+([b]-[a])=[b]$.

(iii) $[b]$ が有限なるとき, $[a]+[x]=[b]$ は $[a]\leqq[b]$ のとき, 及びそのときに限り解 $[x]$ を有し, その解は唯一つにして $[x]=[b]-[a]$ である。

(iv) $[a]<[b]$ にして $[b]+[c]$ が有限ならば, $[a]+[c]<[b]+[c]$.

(v) $[a]+[c]<[b]+[c]$ にして $[b]+[c]$ が有限ならば, $[a]<[b]$.

(vi) $[a]\leqq[b]$, $[b]$ が有限にして $[a]-[c]$ が存在するときは, $[a]-[c]\leqq$

$[b]-[c]$.

(vii) $[a]\leqq[b]$ にして $[c]-[b]$ が存在するときは, $[c]-[a]\geqq[c]-[b]$.

(viii) $[a]+[b]$ が存在し, $[c]\geqq[a]+[b]$ にして $[c]$ が有限ならば, $[c]-[b]\geqq[a]$.

(ix) $[a]-[b]$ が存在し, $[c]\leqq[a]-[b]$ ならば, $[c]+[b]\leqq[a]$.

[證] (i) $a\frown b=0$ の如く a, b をとり, $c=a\oplus b$ とおけば, $[a]+[b]=[c]$ なることから明らかである。

(ii) 定義 4.4 から明らかである。

(iii) $[a]+[x]=[b]$ が解を有するときは, $a\oplus x=b$ の如く a, b, x をとり得るから $a\leqq b$. 從つて $[a]\leqq[b]$. 逆に $[a]\leqq[b]$ ならば, 定義4.4 より $[b]-[a]$ は存在し, (ii) より $[a]+([b]-[a])=[b]$. 即ち $[b]-[a]$ が解である。次に $[x]$ を任意の解とすれば, (i) より

$$[x]=([a]+[x])-[a]=[b]-[a].$$

(iv) $[a]<[b]$ なれば, $[a]+[x]=[b]$ なる $x\neq 0$ が存在する。$[b]+[c]$ が存在するから, 補題 4.1 より $[a]+[c]$, $([a]+[c])+[x]$ は存在し, $([a]+[c])+[x]=[b]+[c]$. 故に (iii) より $[a]+[c]<[b]+[c]$.

(v) $[a]+[c]<[b]+[c]$ なれば, (iii) より $[a]+[c]+[x]=[b]+[c]$ なる $x\neq 0$ が存在する。(iii) より $[a]+[x]=[b]$ なれば, $[a]<[b]$.

(vi) $c\leqq a\leqq b$ なるが如く a, b, c をとる。$b=a_1\oplus a$, $a=c_1\oplus c$ とおけば, $[a]-[c]=[c_1]$ にして, $[b]-[c]=[a_1\oplus c_1]$ は存在し, $[c_1]\leqq[a_1\oplus c_1]$ である。

(vii) $a\leqq b\leqq c$ なるが如く a, b, c をとる。$c=b\oplus b_1$, $b=a\oplus a_1$ とおけば, $[c]-[b]=[b_1]$ にして, $[c]-[a]=[a_1\oplus b_1]$ は存在し, $[b_1]\leqq[a_1\oplus b_1]$ である。

(viii) $a\frown b=0$, $c\geqq a\oplus b$ なるが如く a, b, c をとり, $c=a\oplus b\oplus d$ とおけば,

$$[c]-[b]=[a\oplus d]\geqq[a].$$

(ix) $a\geqq b$ なるが如く a, b をとり, $a=b\oplus d$ とする。$[d]\geqq[c]$ なれば $d=c\oplus c_1$ の如き c, c_1 が存在する。$a=b\oplus c\oplus c_1$ なれば,

$$[b]+[c]=[b\oplus c]\leqq[a].$$

補題 4.4 $\big(e(a_\alpha);\ \alpha<\Omega\big)\perp$ にして, $[a_\alpha]-[b_\alpha]$ $(\alpha<\Omega)$ が存在するときは

$$\vee([a_\alpha]-[b_\alpha];\ \alpha<\Omega)=\vee([a_\alpha];\ \alpha<\Omega)-\vee([b_\alpha];\ \alpha<\Omega).$$

[證] $a_\alpha = b_\alpha \oplus c_\alpha$ の如く a_α, b_α をとり，$a=\vee(a_\alpha;\alpha<\Omega)$, $b=\vee(b_\alpha;\alpha<\Omega)$, $c=\vee(c_\alpha;\alpha<\Omega)$ とおけば，$a=b\smile c$ である。$e(a_\alpha)\frown b\frown c=b_\alpha\frown c_\alpha=0$ なれば，$b\frown c=\vee\big(e(a_\alpha)\frown b\frown c;\alpha<\Omega\big)=0$. 故に $a=b\oplus c$. a_α は有限なれば，補題 1.12 より a は有限である。從つて $[c]=[a]-[b]$. しかるに補題 4.2 より $[c]=\vee([c_\alpha];\alpha<\Omega)=\vee([a_\alpha]-[b_\alpha];\alpha<\Omega)$, $[a]=\vee([a_\alpha];\alpha<\Omega)$, $[b]=\vee([b_\alpha];\alpha<\Omega)$ なれば，本補題は成立する。

定義 4.5 $0[a]=[0]$ とし，$n=1,2,\dots$ なるとき，$(n-1)[a]$ が定義せられ $(n-1)[a]+[a]$ が存在するときは，これを $n[a]$ にてあらはす。しからざるときは $n[a]$ は定義せられない。

補題 4.5 (i) $m[a]$, $n[a]$, $m[a]+n[a]$ が存在するか，或は $(m+n)[a]$ が存在するときは，$(m+n)[a]=m[a]+n[a]$.

(ii) $n[a]$, $m(n[a])$ が存在するときは，$mn[a]=m(n[a])$.

(iii) $n([a]+[b])$ か或は $n[a]+n[b]$ が存在するときは，$n([a]+[b])=n[a]+n[b]$.

[證] (i), (ii) は定義 4.5 を繰り返へして用ふれば證明し得る。

(iii) $n=0,1$ のときは明らかである。$n-1$ のとき成立するとすれば

$$n([a]+[b])=(n-1)([a]+[b])+([a]+[b])=(n-1)[a]+[a]+$$
$$(n-1)[b]+[b]=n(a)+n[b]$$

補題 4.6 b が有限なるとき，すべての $n\geqq 0$ に對して $n[a]$ が定義せられ $n[a]\leqq[b]$ ならば，$a=0$ である。

[證] 今 $(a_i;i=1,\dots,n)\perp$, $a_i\in[a]$ なる $a_i\leqq b$ が存在したとすれば，$a_1\oplus\dots\oplus a_n\in n[a]$ である。$(n+1)[a]$ が存在するから $(a_1\smile\dots\smile a_n)\frown a_{n+1}=0$, $a_{n+1}\in[a]$ なるが如き $a_{n+1}\leqq b$ が存在する。このとき $(a_i;i=1,\dots,n+1)\perp$ である。(1) 故に a_1 を $[a]$ の任意の要素とすれば，數學的歸納法により，任意の n に對して $(a_i;i=1,\dots,n)\perp$ なるが如き無限列 $(a_i;i=1,2,\dots)$ が存在し $a_i\leqq b$ である。このとき $(a_i;i=1,2,\dots)\perp$ にして(2), $a_1\equiv a_i\,(i=1,2,\dots)$. 故に補題 1.5 より

$$\vee(\oplus a_i;i=1,2,\dots)\equiv\vee(\oplus a_i;i=2,3,\dots)$$

しかるに b が有限なれば補題 1.11 より $\vee(\oplus a_i;i=1,2,\dots)$ は有限である。

(1) v. Neumann [1], Theorem 2.2 より。
(2) v. Neumann [1], Theorem 2.3 より。

従つて $a_i=0$.

補題 4.7 a は有限であるとする。

(i) $n[a]$ が存在するときは，これは有限である。

(ii) $m\geqq n$ にして，$m[a]$ が存在すれば，$(m-n)[a]=m[a]-n[a]$.

(iii) $[a]-[b]$, $n[a]$ が存在すれば，$n([a]-[b])=n(a)-n(b)$.

[證] (i) 補題 2.5 より明らかである。

(ii) 補題 4.5 (i) より $m(a)=(m-n)[a]+n[a]$. 故に補題 4.3 (iii) より $(m-n)[a]=m[a]-n[a]$.

(iii) 補題 4.5 (iii) より $n[a]=n([a]-[b])+n[b]$. 故に補題 4.3 (iii) より $n([a]-[b])=n[a]-n[b]$.

定理 4.3 $a, b\in L$ 及び $n=0, 1, \dots, \infty$ に對して，$r_n(a, b)\in Z$ が定まり，

(1°) $\vee\big(\oplus\, r_n(a, b); n=0, 1, \dots, \infty\big)=e(a)$,

(2°) $n=0, 1, 2, \dots$ のとき，$n[r_n(a, b)\frown a]$ は存在し，

$$[r_n(a, b)\frown b]=n[r_n(a, b)\frown a]+[p_n], \qquad [p_n]\leqq[r_n(a, b)\frown a],$$

(3°) すべての n に對して $n[r_\infty(a, b)\frown a]$ は存在し，

$$n[r_\infty(a, b)\frown a]\leqq[r_\infty(a, b)\frown b],$$

(4°) a が有限ならば，(2°) の第二式の代りに $[p_n]\ll[r_n(a, b)\frown a]$ が成立する，

(5°) b が有限ならば，$r_\infty(a, b)=0$.

[證][(1)] (i) $a_0=a$, $b_0=b$ とおく。定理 2.2 より $r_0=e(a_0)\frown\big(1-q(a_0, b_0)\big)$, $s_0=e(a_0)\frown q(a_0, b_0)$ とすれば，$r_0, s_0\in Z$ にして，

$$e(a_0)=r_0\oplus s_0, \quad [r_0\frown a_0]\geqq[r_0\frown b_0], \quad [s_0\frown a_0]\leqq[s_0\frown b_0].$$

(但し a が有限ならば $[r_0\frown a_0]\gg[r_0\frown b_0]$)

$p_0=r_0\frown b_0$, $a_1=s_0\frown a_0$, $[s_0\frown b_0]=[a_1]+[b_1]$ とおけば，$e(a_1)=s_0\frown e(a_0)=s_0$.
一般に r_{n-1}, s_{n-1}, p_{n-1}, a_n, b_n が定まりたるときは，$r_n=e(a_n)\frown\big(1-q(a_n, b_n)\big)$, $s_n=e(a_n)\frown q(a_n, b_n)$ とおけば，$r_n, s_n\in Z$ にして，

$$e(a_n)=r_n\oplus s_n, \quad [r_n\frown a_n]\geqq[r_n\frown b_n], \quad [s_n\frown a_n]\leqq[s_n\frown b_n].$$

(但し a が有限ならば $[r_n\frown a_n]\gg[r_n\frown b_n]$)

$p_n=r_n\frown b_n$, $a_{n+1}=s_n\frown a_n$, $[s_n\frown b_n]=[a_{n+1}]+[b_{n+1}]$ とおけば，$e(a_{n+1})=s_n\frown e(a_n)=s_n$.

(1) 小平 [1], Lemma 2.4 の方法による。

(ii)　かくの如くして a_n, b_n, r_n, s_n, p_n $(n=0,1,2,\ldots)$ が定まり，$r_\infty = \wedge(s_n; n=0,1,2,\ldots)$ とおけば，$r_\infty \in Z$ にして，補題 1.1 より $e(a)=\vee(\oplus r_n; n=0,1,\ldots,\infty)$．$s_{n-1}=r_n \oplus s_n$ なれば，$m<n$ ならば $r_n \leqq s_m$．故に $m<n$ なるとき $r_n \frown a_{m+1}=r_n \frown s_m \frown a_m = r_n \frown a_m$．從つて $m \leqq n$ ならば $r_n \frown a_m = r_n \frown a$．故に $[p_n] \leqq [r_n \frown a]$．（但し a が有限ならば $[p_n] \ll [r_n \frown a]$．）又 $m<n$ なるとき

$$[r_n \frown b_m]=[r_n \frown s_m \frown b_m]=[r_n \frown a_{m+1}]+[r_n \frown b_{m+1}]=[r_n \frown a]+[r_n \frown b_{m+1}].$$

これを $m=0,1,\ldots,n-1$ につきて加へれば，

$$[r_n \frown b]=n[r_n \frown a]+[r_n \frown b_n]=n[r_n \frown a]+[p_n].$$

次に $r_\infty \frown a_{m+1}=r_\infty \frown s_m \frown a_m = r_\infty \frown a_m$ なれば，一般に $r_\infty \frown a_m = r_\infty \frown a$．故に

$$[r_\infty \frown b_m]=[r_\infty \frown s_m \frown b_m]=[r_\infty \frown a_{m+1}]+[r_\infty \frown b_{m+1}]=[r_\infty \frown a]+[r_\infty \frown b_{m+1}].$$

これを $m=0,1,\ldots,n-1$ につきて加へれば，

$$[r_\infty \frown b]=n[r_\infty \frown a]+[r_\infty \frown b_n].$$

故に n の如何に關らず $[r_\infty \frown b] \geqq n[r_\infty \frown a]$．

從つて $r_n (n=0,1,\ldots,\infty)$ が求むる $r_n(a,b)$ である。

(iii)　b が有限ならば，(3°) 及び補題 4.6 より $r_\infty(a,b)=0$．

定理 4.4　$a, b \in L$，a が有限にして，$n=0,1,\ldots$ のとき，唯一つの要素 $q_n(a,b) \in Z$ が定まり，次の性質を有する。

(1°)　$z \in Z$ に對して，$z \leqq q_n(a,b)$ のとき及びそのときに限り，$n[z \frown a]$ が存在して $n[z \frown a] \leqq [z \frown b]$ である。

(2°)　$q_n(a,b)=q_{n+1}(a,b) \oplus r_n(a,b)$ $(n=0,1,\ldots)$．

(3°)　$q_0(a,b)=1$，$\wedge(q_n(a,b);\ n=0,1,\ldots)=r_\infty(a,b) \oplus \bigl(1-e(a)\bigr)$．

［證］ (i)　$q_n(a,b)=\vee(\oplus r_i(a,b); i=n, n+1, \ldots, \infty) \oplus \bigl(1-e(a)\bigr)$ とおけば，定理 4.3 より (2°), (3°) は明らかである。

(ii)　$z \leqq q_n(a,b)$ ならば，

$$z=\vee\Bigl(\oplus\bigl(z \frown r_i(a,b)\bigr);\ i=n, n+1, \ldots, \infty\Bigr) \oplus \Bigl\{z \frown \bigl(1-e(a)\bigr)\Bigr\}.$$

定理 4.3 より，$i=n, n+1, \ldots$ のとき

$$[z \frown r_i(a,b) \frown b]=i[z \frown r_i(a,b) \frown a]+[z \frown p_i] \geqq n[z \frown r_i(a,b) \frown a],$$

$$[z \frown r_\infty(a,b) \frown b] \geqq n\,[z \frown r_\infty(x,b) \frown a],$$

$$\left[z\frown\left(1-e(a)\right)\frown b\right]\geqq 0=n\left[z\frown\left(1-e(a)\right)\frown a\right].$$

故に補題 4.2 より $[z\frown b]\geqq n[z\frown a]$.

逆に $[z\frown b]\geqq n[z\frown a]$ なる $z\in Z$ をとるときは,

$$[z\frown r_i(a,b)\frown b]\geqq n[z\frown r_i(a,b)\frown a]$$

にして, 他方, 定理 4.3 より

$$[z\frown r_i(a,b)\frown b]=i[z\frown r_i(a,b)\frown a]+[z\frown p_i],\ [z\frown p_i]\ll[z\frown r_i(a,b)\frown a].$$

故に $i<n$ ならば $z\frown r_i(a,b)\frown a=0$. 從つて $z\frown r_i(a,b)\frown e(a)=0$. 故に $r_i(a,b)\leqq e(a)$ なれば $z\frown r_i(a,b)=0$. しかるに

$$1=\vee(\oplus r_i(a,b);i=0,1,\dots,\infty)\oplus\left(1-e(a)\right)\quad \text{なれば},$$

$$z\leqq\vee(\oplus r_i(a,b);i=n,n+1,\dots,\infty)\oplus\left(1-e(a)\right)=q_n(a,b).$$

(iii) $q_n(a,b)$ が唯一つ定まることは, (1°) から明らかである。

補題 4.8 $a\in L_{\mathrm{I}}$ なるとき, $[L_{\mathrm{I}}]$ の基最小元を $[h]$ とすれば, $r_n(h,a)$ ($n=0,1,\dots,\infty$) は次の性質を有する。

(1°) $\vee\left(\oplus r_n(h,a);n=0,1,\dots,\infty\right)=z_{\mathrm{I}}$.

(2°) $n=0,1,\dots$ のとき, $z\in Z_{\mathrm{I}}$ に對して, $z\leqq r_n(h,a)$ のとき及びそのときに限り, $n[z\frown h]$ が存在して $n[z\frown h]=[z\frown a]$.

(3°) すべての $n=1,2,\dots$ に對して $n[r_\infty(h,a)\frown h]$ が存在して

$$n[r_\infty(h,a)\frown h]\leqq[r_\infty(h,a)\frown a].$$

(4°) $r_0(h,a)=z_{\mathrm{I}}-e(a)$.

(5°) a が有限ならば $r_\infty(h,a)=0$,

[證] (i) (1°), (3°) は夫々定理 4.3 (1°), (3°) を L_{I} に適用することにより明らかである。

(ii) 定理 4.3 (2°) より, $n=0,1,\dots$ のとき, $z\leqq r_n(h,a)$ ならば, $n[z\frown h]$ は存在し

$$[z\frown a]=n[z\frown h]+[z\frown p_n],\qquad [z\frown p_n]\ll[z\frown h].$$

しかるに補題 3.2 より $z\frown h$ は最小元なれば, $z\frown p_n=0$. 故に $n[z\frown h]=[z\frown a]$.

逆に $n[z\frown h]=[z\frown a]$ とする。今 $m=0,1,\dots,\ m\neq n$ に對して $z_1=z\frown r_m(h,a)$ とおけば, 上のことから $m[z_1\frown h]=[z_1\frown a]$. 假定により $n[z_1\frown h]=[z_1\frown a]$ なれば $z_1\frown h=0$. 從つて $z_1=z_1\frown e(h)=e(z_1\frown h)=0$. 又 $z_1=z\frown r_\infty(h,a)$ とするときは, (3°) より $m>n$ なる m に對して $m[z_1\frown h]\leqq$

$[z_1 \frown a]$. 故に $z_1 \frown h=0$. 從つて $z_1=0$. 結局 $z \frown r_m(h,a)=0$, $m=0,1,\dots,\infty$, $m \neq n$ となるから, $z \leqq r_n(h,a)$.

(iii) (2°) より $z \leqq r_0(h,a)$ は $[z \frown a]=0$ と同義である。しかるに $z \frown e(a) = e(z \frown a)$ なれば, $[z \frown a]=0$ は, $z \frown e(a)=0$ 即ち $z \leqq z_{\mathrm{I}}-e(a)$ と同義である。故に $r_0(h,a)=z_{\mathrm{I}}-e(a)$.

(iv) a が有限ならば, 定理 4.3 (5°) より $r_\infty(h,a)=0$.

定理 4.5. $[L_{\mathrm{I}}]$ の基最小元を $[h]$ とすれば, $[a] \in [L_{\mathrm{I}}]$ に對して, $\vee(\oplus z_n;\ n=1,2,\dots,\infty)=e(a)$ なるが如き $z_n \in Z_{\mathrm{I}}$ が存在して

$$[a]=[z_\infty \frown a] \oplus \vee(\oplus n[z_n \frown h];\ n=1,2,\dots).$$

$[a]$ が有限ならば,

$$[a]=\vee(\oplus n[z_n \frown h];\ n=1,2,\dots).$$

[證] $z_n=r_n(h,a)$, $n=1,2,\dots,\infty$ とおけば, 補題 4.8 及び補題 4.2 から明らかである。

[注意 4.4] L_{I} が $\mathfrak{G}$ に關して既約にして, z_{I} が有限なるときは, Z_{I} は 0 と z_{I} とのみからなるから, すべての $a \in L_{\mathrm{I}}$ に對して $[a]=n[h]$ なるが如き整數 n が定まる。$\equiv$ の代りに $\sim$ を用ひたときは, $n-1$ が有限次元の射影空間に於ける普通の意味の a の次元になつてゐる。このとき h は點である。

補題 4.9. 有限なる元 a に對して, 自然數 q,t ありて $[a]=q[b]=t[c]$ なるとき, q,t の最小公倍數を v とし, $v=q_1q=t_1t$ とおけば, $[a]=v[d]$, $[b]=q_1[d]$, $[c]=t_1[d]$ なるが如き d が存在する。

[證] (i) 先づ $a \in L_{\mathrm{I}}$ のときを考へる。補題 4.8 より, $z \in Z_{\mathrm{I}}$ に對して, $z \leqq r_m(h,b)$ のとき及びそのときに限り $m[z \frown h]=[z \frown b]$, 即ち $qm[z \frown h]=q[z \frown b]=[z \frown a]$. 從つて $r_{qm}(h,a)=r_m(h,b)$. 同樣に $r_{tn}(h,a)=r_n(h,c)$. しかるに $\vee\bigl(\oplus r_m(h,b);\ m=0,1,\dots\bigr)=z_{\mathrm{I}}$ なれば,

$$\vee\bigl(\oplus r_{qm}(h,a);\ m=0,1,\dots\bigr)=z_{\mathrm{I}}.$$

同樣に
$$\vee\bigl(\oplus r_{tn}(h,a);\ n=0,1,\dots\bigr)=z_{\mathrm{I}}.$$

故に q,t の最小公倍數を v とするときは, $i \neq jv$ $(j=0,1,\dots)$ ならば $r_i(h,a)=0$. 即ち $\bigl(\oplus r_{jv}(h,a);\ j=0,1,\dots\bigr)=z_{\mathrm{I}}$ である。しかるに $r_{jv}(h,a)=r_{jq_1}(h,b)$ なれば,

$$jq_1[r_{jv}(h,a) \frown h]=[r_{jv}(h,a) \frown b].$$

同様に $$jt_1[r_{j\nu}(h, a) \frown h] = [r_{j\nu}(h, a) \frown c].$$
これは $j=0, 1, \dots$ に對して成立するから
$$[d] = \bigvee\Bigl(\oplus j[r_{j\nu}(h, a) \frown h];\ j=0, 1, \dots\Bigr)$$
とおけば, $[b]=q_1[d]$, $[c]=t_1[d]$.

(ii) $a \in L_{\mathrm{II}}$ なるときは, 補題 3.9 から $[a]=v[d]$ なるが如き $d \in L_{\mathrm{II}}$ が存在する。しかるときは $q[b]=q_1q[d]$ なれば $[b]=q_1[d]$(1). 同様に $[c]=t_1[d]$.

(iii) $a \in L$ のときは, 定義 3.3 より $b=b_{\mathrm{I}} \oplus b_{\mathrm{II}}\ (b_{\mathrm{I}} \in L_{\mathrm{I}}, b_{\mathrm{II}} \in L_{\mathrm{II}})$ の如く分解せられる。c につきも同樣。補題 1.11 より $b_{\mathrm{I}}, b_{\mathrm{II}}$ は有限であるから, (i), (ii) より $b_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{I}}$ に對する d_{I}, 及び $b_{\mathrm{II}}, c_{\mathrm{II}}$ に對する d_{II} を求めて, $d=d_{\mathrm{I}} \oplus d_{\mathrm{II}}$ とおけば, 補題 4.5 より $[b]=[b_{\mathrm{I}}]+[b_{\mathrm{II}}]=q_1[d_{\mathrm{I}}]+q_1[d_{\mathrm{II}}]=q_1[d]$. 同様に $[c]=t_1[d]$.

定義 4.6. $[a]$ が有限なるとき, $[a]=q[b]$ なる b があつて, $p[b]$ が存在するとき, $\frac{p}{q}[a]$ を $p[b]$ によつて定義する。

[注意 4.4] $\frac{p}{q}[a]$, $\frac{s}{t}[a]$ が存在し, $\frac{p}{q}=\frac{s}{t}$ なるときは, 定義 4.6 より $[a]=q[b]=t[c]$ なる b, c があつて, $\frac{p}{q}[a]=p[b]$, $\frac{s}{t}[a]=s[c]$ なれば, 補題 4.9 より $[b]=q_1[d]$, $[c]=t_1[d]$ なるが如き $[d]$ が存在する。$\frac{p}{s}=\frac{q}{t}=\frac{t_1}{q_1}$ なれば, $p[b]=pq_1[d]=st_1[d]=s[c]$. 故に $\frac{p}{q}[a]=\frac{s}{t}[a]$. 從つて定義 4.6 により λ が正の有理數の場合の $\lambda[a]$ の意義が定義せられたことになる。

$\frac{p}{q}[a]$ が存在し, $p=p_1t$, $q=q_1t$ なるときは, $\frac{p_1}{q_1}[a]$ は存在し, $\frac{p}{q}[a]$ に等しい。なんとなれば, $\frac{p}{q}[a]$ が存在する故に, $[a]=q[b]$ なる b があつて $p[b]=\frac{p}{q}[a]$ である。$[c]=t[b]$ とおくときは, $[a]=q_1[c]$ にして $p_1[c]=p_1t[b]=p[b]$ は存在し $\frac{p_1}{q_1}[a]=\frac{p}{q}[a]$ である。

補題 4.10. a は有限にして, λ, μ は正の有理數とする。

(i) $\lambda[a]$, $\mu[a]$, $\lambda[a]+\mu[a]$ が存在するときは, $(\lambda+\mu)[a]=\lambda[a]+\mu[a]$.

(ii) $\mu[a]$, $\lambda(\mu[a])$ が存在するときは, $\lambda\mu[a]=\lambda(\mu[a])$.

(iii) $\lambda[a]$, $\lambda[b]$, $\lambda([a]+[b])$ が存在するときは $\lambda([a]+[b])=\lambda[a]+\lambda[b]$.

---

(1) 定理 2.2, 補題 4.7 (iii) より。

(iv) $\lambda[a]$, $\mu[a]$ が存在し，$\lambda>\mu$ ならば，$\lambda[a]>\mu[a]$.

(v) $\big(e(a_\alpha);\alpha<\Omega\big)\perp$ にして，すべての $\alpha<\Omega$ に對して $\lambda[a_\alpha]$ が存在するときは $\vee(\lambda[a_\alpha];\alpha<\Omega)=\lambda\vee([a_\alpha];\alpha<\Omega)$.

［證］ $\lambda=\dfrac{p}{q}$, $\mu=\dfrac{s}{t}$ とする。

(i) q, t の最小公倍數を v とし，$v=q_1q=t_1t$ とする。定義 4.6 より $[a]=q[b]=t[c]$ なるが如き b, c が存在し，$\dfrac{p}{q}[a]=p[b]$, $\dfrac{s}{t}[a]=s[c]$ である。補題 4.9 より $[a]=v[d]$, $[b]=q_1[d]$, $[c]=t_1[d]$ なるが如き $[d]$ が存在する。このとき $\dfrac{p}{q}[a]=pq_1[d]$, $\dfrac{s}{t}[a]=st_1[d]$ なれば，假定により $\dfrac{p}{q}[a]+\dfrac{s}{t}[a]=(pq_1+st_1)[d]$ は存在する。從つて $\dfrac{pq_1+st_1}{v}[a]$ は存在し $(pq_1+st_1)[d]$ に等し。故に，$\dfrac{p}{q}+\dfrac{s}{t}=\dfrac{pq_1+st_1}{v}$ なれば，$\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{s}{t}\right)[a]$ は存在し $\dfrac{p}{q}[a]+\dfrac{s}{t}[a]$ に等し。

(ii) $\dfrac{s}{t}[a]$ は存在するから，$[a]=t[b]$ なる b があつて $s[b]=\dfrac{s}{t}[a]$ である。又 $\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{s}{t}[a]\right)$ が存在するから，$\dfrac{s}{t}[a]=q[c]$ なる c があつて $p[c]=\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{s}{t}[a]\right)$ である。$s[b]=q[c]$ なれば，s, q の最小公倍數を v とし，$v=s_1s=q_1q$ とおけば，補題 4.9 から $[b]=s_1[d]$, $[c]=q_1[d]$ なる d が存在する。しかるときは $[a]=s_1t[d]$ にして，$pq_1[d]=p[c]$ は存在するから，$\dfrac{pq_1}{s_1t}[a]$ は存在し $pq_1[d]$ に等しい。$\dfrac{pq_1}{s_1t}=\dfrac{p}{q}\dfrac{s}{t}$ なれば，$\dfrac{p}{q}\dfrac{s}{t}[a]$ は存在し $pq_1[d]=p[c]=\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{s}{t}[a]\right)$ に等しい。

(iii) $[a]+[b]$ が存在するから，$a\frown b=0$ にすることが出來る。$\dfrac{p}{q}[a\oplus b]$, $\dfrac{p}{q}[a]$, $\dfrac{p}{q}[b]$ が存在するから $[a\oplus b]=q[c]$, $[a]=q[c_1]$, $[b]=q[c_2]$ なる c, c_1, c_2 が存在し，$p[c]=\dfrac{p}{q}[a\oplus b]$, $p[c_1]=\dfrac{p}{q}[a]$, $p[c_2]=\dfrac{p}{q}[b]$. $c_1\leqq a$, $c_2\leqq b$ なるが如くとり得れば，$c_1\frown c_2=0$. 故に $[c_1]+[c_2]$ は存在し，$q[c]=[a]+[b]=q([c_1]+[c_2])$ である。故に $[c]=[c_1]+[c_2]$. 從つて $\dfrac{p}{q}[a\oplus b]=p[c]=p[c_1]+p[c_2]=\dfrac{p}{q}[a]+\dfrac{p}{q}[b]$.

(iv) (i) の如く d をとれば，$\dfrac{p}{q}[a]=pq_1[d]$, $\dfrac{s}{t}[a]=st_1[d]$. しかるに $\dfrac{p}{q}>$

$\frac{s}{t}$ なれば，$\frac{p}{s} > \frac{q}{t} = \frac{t_1}{q_1}$. 故に $pq_1 > st_1$ なれば $\frac{p}{q}[a] > \frac{s}{t}[a]$.

(v) $\frac{p}{q}[a_\alpha]$ が存在するから，$[a_\alpha]=q[b_\alpha]$ なる b_α があつて $\frac{p}{q}[a_\alpha]=p[b_\alpha]$. 故に $(b_\alpha^{(1)}, \dots, b_\alpha^{(q)})\perp$, $b_\alpha^{(i)} \equiv b_\alpha^{(j)}$ なる $b_\alpha^{(1)}, \dots, b_\alpha^{(q)}$ ありて，$a_\alpha = b_\alpha^{(1)} \oplus \cdots \oplus b_\alpha^{(q)}$. 今 $a = \vee(\oplus a_\alpha;\, \alpha < \Omega)$, $b^{(i)} = \vee(\oplus b_\alpha^{(i)};\, \alpha < \Omega)$ とおけば，$a = b^{(1)} \oplus \cdots \oplus b^{(q)}$ にして，補題 1.5 より $b^{(i)} \equiv b^{(j)}$. 故に $[a]=[b^{(1)} \oplus \cdots \oplus b^{(q)}]=q[b^{(1)}]$. 他方補題 4.2 より

$$\begin{aligned}\vee(p[b_\alpha];\, \alpha < \Omega) &= \vee([b_\alpha^{(1)} \oplus \cdots \oplus b_\alpha^{(p)}];\, \alpha < \Omega)\\ &= \Big[\vee\Big(\oplus(b_\alpha^{(1)} \oplus \cdots \oplus b_\alpha^{(p)});\, \alpha < \Omega\Big)\Big]\\ &= [b^{(1)} \oplus \cdots \oplus b^{(p)}] = p[b^{(1)}].\end{aligned}$$

故に $\frac{p}{q}[a] = \vee(p[b_\alpha];\, \alpha < \Omega)$. しかるに $\frac{p}{q}[a_\alpha]=p[b_\alpha]$, $[a]=\vee([a_\alpha];\, \alpha < \Omega)$ なれば，(v) が成立する。

補題 4.11. a が有限なるとき，有理数の列 $\{\lambda_i\}$ ありて，$\lambda_i[a]$ が定義せられ，$\lambda_i \to 0$ ならば，$\wedge(\lambda_i[a];\, i=1,2,\dots)=[0]$.

[證] 今すべての i に對して $\lambda_i[a] \geqq [b]$ なるが如き $[b]$ があつたとする。$\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$ とおけば，$[a]=q_i[c_i]$ なる c_i ありて，$p_i[c_i]=\lambda_i[a]$ である。從つて $p_i[c_i] \geqq [b]$. しかるに $\frac{p_i}{q_i} \leqq \frac{1}{n_i}$ なるが如き自然數 n_i ありて，$n_i \to \infty$ である。$n_i p_i \leqq q_i$ なれば，$n_i p_i[c_i]$ 從つて $n_i[b]$ は定義せられ，$[a] \geqq n_i p_i[c_i] \geqq n_i[b]$. 故に補題 4.6 より $[b]=[0]$ 從つて $\wedge(\lambda_i[a];\, i=1,2,\dots)$ は存在し，$[0]$ に等しい。

定理 4.6. $a, b \in L_{\mathrm{I}}$ にして a が有限なるときは，次の性質を有する f_λ $(0 \leqq \lambda \leqq \infty$, λ : 有理數) が存在する。

(1°) $f_\lambda \in Z$, $\vee(\oplus f_\lambda;\, 0 \leqq \lambda \leqq \infty) = e(a)$,

(2°) $0 \leqq \lambda < \infty$ ならば $[f_\lambda \frown b] = \lambda[f_\lambda \frown a]$, すべての $m=1,2,\dots$ に對して $m[f_\infty \frown a] \leqq [f_\infty \frown b]$,

(3°) $[b] = \Big[\big(z_{\mathrm{I}} - e(a)\big) \frown b\Big] + [f_\infty \frown b] + \vee(\lambda[f_\lambda \frown a];\, 0 \leqq \lambda < \infty)$,

(4°) $f_\infty = r_\infty(h, b) \frown e(a)$ にして，b が有限ならば $f_\infty = 0$.

[證] $z_{m,n} = r_m(h,b) \frown r_n(h,a)$ $(m=0,1,\dots,\infty;\, n=0,1,\dots)$ とおけば，補題 4.8 より，$z_{m,n} \in Z$, $\vee(\oplus z_{m,n};\, m=0,1,\dots,\infty,\, n=0,1,2,\dots)=z_{\mathrm{I}}$, $m[z_{m,n} \frown h] = [z_{m,n} \frown b]$, $n[z_{m,n} \frown h] = [z_{m,n} \frown a]$, すべての $m=1,2,\dots$ に對して $m[z_{\infty,n} \frown h]$

$\leqq[z_{\infty,n}\frown b]$. 從つて $[z_{m,n}\frown b]=\dfrac{m}{n}[z_{m,n}\frown a]$, すべての $m=1,2,\ldots$ に對して $\dfrac{m}{n}$ $[z_{\infty,n}\frown a]\leqq[z_{\infty,n}\frown b]$. λ が負ならざる有理數なるとき,

$$f_\lambda=\vee\left(\oplus z_{m,n};\ \frac{m}{n}=\lambda,\ m=0,1,\ldots,\ n=1,2,\ldots\right),\ f_\infty=\vee(\oplus z_{\infty,n};\ n=1,2,\ldots)$$

とおけば, 補題 4.2 より $[f_\lambda\frown b]=\lambda[f_\lambda\frown a]$, すべての $m=1,2,\ldots$ に對して $m[f_\infty\frown a]\leqq[f_\lambda\frown b]$. 又補題 4.8 (1°), (4°), (5°) より $\vee\left(\oplus r_n(h,a);\ n=1,2,\ldots\right)=e(a)$ なれば,

$$f_\infty=\vee\left(\oplus\left(r_\infty(h,b)\frown r_n(h,a)\right);\ n=1,2,\ldots\right)=r_\infty(h,b)\frown e(a)\,.$$

又 $r_0(h,a)=z_{\mathrm{I}}-e(a)$ なれば

$$\vee(\oplus z_{m,0};\ m=0,1,\ldots,\infty)=\vee\left(\oplus\left(r_m(h,b)\frown(z_{\mathrm{I}}-e(a)\right);\ m=0,1,\ldots,\infty\right)$$
$$=z_{\mathrm{I}}-e(a)\,.$$

故に (1°) が成立する。(3°) は (1°), (2°) を用ひて補題 4.2 より成立する。

定義 4.7. 半順序集合 D に於て, $\delta_1,\delta_2\in D$ ならば, $\delta_1\leqq\delta_3$, $\delta_2\leqq\delta_3$ なるが如き $\delta_3\in D$ が存在するときは, D を有向集合といふ。有向集合 D の要素 δ を添字とする $[L]$ の有限なる要素の集合 $([a_\delta];\ \delta\in D)$ があるとする。もし $[a]$ 及び有限なる要素の集合 $([b_\delta];\ \delta\in D)$, $([c_\delta];\ \delta\in D)$ が存在し,

(1°) すべての $\delta\in D$ に對して $[b_\delta]\leqq[a_\delta]\leqq[c_\delta]$,

(2°) $\delta<\delta'$ ならば $[b_\delta]\leqq[b_{\delta'}]\leqq[a]\leqq[c_{\delta'}]\leqq c_\delta]$,

(3°) $\wedge([a]-[b_\delta];\ \delta\in D)=[0]$, $\wedge([c_\delta]-[a];\ \delta\in D)=[0]$,

が成立するとき, $[a_\delta]\to[a]$ にてあらはす。

定義 4.8. L_{II} に於て, a は有限にして, 負ならざる有理數 λ を添字とする e_λ ありて,

(1°) $e_\lambda\in Z_{\mathrm{II}}$, $\lambda_1<\lambda_2$ ならば $e_{\lambda_1}\leqq e_{\lambda_2}$, $e_0=0$,

(2°) $z\leqq z_{\mathrm{II}}-e_\lambda$ なる $z\in Z$ に對して, $\lambda[z\frown a]$ が存在する,

とする。$[0,\infty)$ の分割

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_i<\cdots,\qquad \lim_{i\to\infty}\lambda_i=\infty\,,$$

を δ にてあらはし, かゝる δ の全體を D とし, δ' を δ の再分割とするとき $\delta<\delta'$ とおけば, D は有向集合である。

$$[s_\delta]=\left(\lambda_i[(e_{\lambda_{i+1}}-e_{\lambda_i})\frown a];\ i=0,1,\ldots\right)$$

とおけば, 明らかに $\delta<\delta'$ ならば $[s_\delta]\leqq[s_{\delta'}]$. 故に $[b]$ ありて $\vee([b]-[s_\delta];$

$\delta\in D)=[0]$ なるときは，定義 4.7 より $[s_\delta]\to[b]$ である。このとき

$$[b]=\int_0^\infty \lambda d[e_\lambda\frown a]$$

にてあらはす。

定理 4.7. $a, b\in L_{\mathrm{II}}$ にして，a が有限なるとき，次の性質を有する e_λ $(0\leqq\lambda<\infty,\ \lambda$: 有理數) が存在する。

(1°) $e_\lambda\in Z_{\mathrm{II}}$, $\lambda_1<\lambda_2$ ならば $e_{\lambda_1}\leqq e_{\lambda_2}$, $e_0=0$.

(2°) $\bigvee(e_\lambda;\ 0\leqq\lambda<\infty)\oplus r_\infty(a, b)=e(a)$.

(3°) $z\in Z_{\mathrm{II}}$ に對して，$z\leqq z_{\mathrm{II}}-e_\lambda$ なるとき及びそのときに限り $\lambda[z\frown a]\leqq[z\frown b]$.

(4°) $[(e_{\frac{m+1}{n}}-e_{\frac{m}{n}})\frown b]=\dfrac{m}{n}[(e_{\frac{m+1}{n}}-e_{\frac{m}{n}})\frown a]+[p_m]$,

但し $[p_m]\leqq\dfrac{1}{n}[(e_{\frac{m+1}{n}}-e_{\frac{m}{n}})\frown a]$.

(5°) $[b]=\Big[\big(z_{\mathrm{II}}-e(a)\big)\frown b\Big]+[r_\infty(a, b)\frown b]+\int_0^\infty\lambda d[e_\lambda\frown a]$.

(6°) b が有限ならば $r_\infty(a, b)=0$.

[證] 補題 3.9, 定義 4.5 より $n[a_n]=[a]$ なるが如き a_n $(n=1, 2, \ldots)$ が存在する。定理 4.3, 定理 4.4 を L_{II} に適用し，$e_{m,n}=q_m((a_n, b)$ とおく。しかるときは

(i) $e_{m,n}\in Z_{\mathrm{II}}$, $e_{m,n}-e_{m+1,n}=r_m(a_n, b)$, $e_{0,n}=1$,

(ii) $[r_m(a_n, b)\frown b]=\dfrac{m}{n}[r_m(a_n, b)\frown a]+[p_m]$, $[p_m]\leqq\dfrac{1}{n}[r_m(a_n, b)\frown a]$,

(iii) $z\leqq e_{m,n}$ なるとき及びそのときに限り $\dfrac{m}{n}[z\frown a]\leqq[z\frown b]$.

(iv) $\bigwedge(e_{m,n};\ m=0, 1, \ldots)=r_\infty(a_n, b)\oplus\big(1-e(a)\big)$,

(v) すべての $m=1, 2, \ldots$ に對して $\dfrac{m}{n}[r_\infty(a_n, b)\frown a]\leqq[r_\infty(a_n, b)\frown b]$.

從つて定理 4.3 より $r_\infty(a_n, b)=r_\infty(a, b)$.

今 $e_{\frac{m}{n}}=z_{\mathrm{II}}-e_{m,n}$ とおくときは，$z\leqq z_{\mathrm{II}}-e_{\frac{m}{n}}$ のとき及びそのときに限り $\dfrac{m}{n}[z\frown a]\leqq[z\frown b]$. 故に $\dfrac{m}{n}<\dfrac{p}{q}$ ならば $e_{\frac{m}{n}}\leqq e_{\frac{p}{q}}$. 從つて (1°), (3°) が成立する。(iv), (v) より (2°) が成立する。又 (i), (ii) より (4°) が成立する。

$$[s_n]=\bigvee\Big(\frac{m}{n}[(e_{\frac{m+1}{n}}-e_{\frac{m}{n}})]\frown a);\ m=0, 1, \ldots\Big)$$

とおけば, (2°), (4°) より

$$[b]=\Big[\big(1-e(a)\big)\frown b\Big]+[r_\infty(a,b)\frown b]+[s_n]+[p^{(n)}],\qquad [p^{(n)}]\leqq\frac{1}{n}[a].$$

故に今 $[c]=[s_n]+[p^{(n)}]$ とおくときは, $[c]-[s_n]=[p^{(n)}]$ なれば, 補題 4.11 より $\wedge([c]-[s_n];\ n=1,2,\dots)=\wedge([p^{(n)}];\ n=1,2,\dots)=[0]$. 故に $[0,\infty)$ の一般の分割 δ につきては尙更 $\wedge([c]-[s_\delta];\ \delta\in D)=[0]$. 故に定義 4.8 より

$$[c]=\int_0^\infty\lambda d[e_\lambda\frown a].$$

故に (5°) が成立する。(6°) は定理 4.3 (5°) である。

[注意 4.5] 定理 4.6 (3°), 定理 4.7 (5°) はベクトル束に於ける Radon-Nikodym の定理(1) に對應する。

(本研究は文部省科學研究費の補助による)

---

(1) 前田・小笠原 [1], 33 參照。

引 用 文 獻

I. Halperin, [1] *Dimensionality in reducible geometries.* Annals of Math., **40** (1939), 581-599.

小平邦彥, [1] 可換デナイ *operator ring* ノスペクトル分解ニツイテ, I, 全國紙上數學談話會, **245** (昭 17), 1439-1476.

前田文友, [1] 連續幾何學ト *Zorn* ノ補題, 同上 **236** (昭 17), 1056-1058.

[2] ベクトル束の一つの立場, 位相數學, **4-2** (昭 17), 23-31.

前田文友・小笠原藤次郎, [1] ベクトル束の表現, 廣島文理科大學理科紀要, **12** (昭 17), 17-35.

J. v. Neumann, [1] *Lectures on continuous geometries,* I, 1936.

[2] 同上 III, 1936-1937.

J. v. Neumann and I. Halperin, [1] *On the transitivity of perspective mappings,* Annals of Math., **41** (1940), 87-93.