共通分々解が成立つ環に就いて II.

森　新　治　郎

(昭和18年5月4日受附)

同じ標題の前書[1]に於て，著者はイデヤルの共通分々解が成立する充分條件として，次の二條件を擧げた。

I′. 素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots$ の有限性。

II. イデヤル商の連鎖 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \subset \cdots$ の有限性。

而して上の兩條件が必要條件であることをも論じた。[2] 更に上の二條件が獨立であるか，否かを明にしようと努めたが，未だ徹底的な解決には達してゐない。この目的の爲に，基本の環 $\mathfrak{J}$ は單位元素を有するとし，條件 I′ を次のやうな條件 I で置き換へ，

I. 素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{J}$ は高々 $\omega+1$ なる順序型を有する。換言すれば，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{J}$ と違つた素イデヤルとするとき，素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}$ は有限で終る。

この新しい條件 I と條件 II とから，$\mathfrak{J}$ に於てイデヤルの共通分々解の成立を證明するのが本論の目的である。素イデヤルの連鎖が，更に複雜なる順序型を持つ場合に就いては，他日論ずる。斯くして條件 II のみを假定すれば，共通分々解が可能であることを，明にし得ると豫想してゐる。

本論に於て共通分々解と言へば，常に强準素イデヤルに由る共通分々解を示すものとする。

豫　備　定　理

目的の主要定理を證明するために，先づ基本の環 $\mathfrak{J}$ は可換で，單位元素を持ち，且つ次の二條件を滿足するとして，その諸性質を考察することが必要である。

條件 I $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{J}$ とは違つた素イデヤルとすれば，素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}$ は有限で終る。

---

(1) S. Mori: 本紀要, **11** (1942), 129.
(2) 森新治郎: 本紀要, **12** (1943), 205.

條件 II　イデヤル商の連鎖 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\subset\cdots$ は有限で終る。

定理 1.　$\mathfrak{J}$ に於て單位元素の存在は假定せず，條件 II のみを假定し，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{J}$ の任意のイデヤルとすれば，$\mathfrak{a}$ を含む最小素イデヤル(1)が存在し，有限の正整數 n に對して $\mathfrak{p}^n\mathfrak{r}\leqq\mathfrak{a}$ なる關係を滿足し，而も $\mathfrak{p}$ と一致するか，又は $\mathfrak{p}$ に含まれないイデヤル $\mathfrak{r}$ がある。

證　$\mathfrak{a}$ に屬する半素イデヤル(2)を $\mathfrak{h}$ とすれば，次の二つの場合が考へられる。

I.　$\mathfrak{h}$ が素イデヤルなるとき。明かに $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{a}$ を含む最小素イデヤルであるから，$\mathfrak{h}=\mathfrak{p}$ と置く。若し $\mathfrak{a}$ が準素イデヤルでないならば，

$$h_1r_1\in\mathfrak{a},\quad h_1\in\mathfrak{p},\quad h_1\notin\mathfrak{a},\quad r_1\notin\mathfrak{p}$$

なる二元素 h_1, r_1 があるから，

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(r_1),\qquad \mathfrak{a}_1\leqq\mathfrak{p}$$

なる關係を得る。その上 $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}_1$ に屬する半素イデヤルである。尙 $\mathfrak{a}_1$ が準素イデヤルでないならば，

$$h_2r_2\in\mathfrak{a}_1,\quad h_2\in\mathfrak{p},\quad h_2\notin\mathfrak{a}_1,\quad r_2\notin\mathfrak{p}$$

なる二元素 h_2, r_2 があり，

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_1:(r_2)=\mathfrak{a}:(r_1r_2)\leqq\mathfrak{p},\qquad r_1r_2\notin\mathfrak{p}$$

なる關係を得る。然し條件 II に由れば，この操作は有限回で終らねばならないから，

$$(1)\qquad \mathfrak{a}_m=\mathfrak{a}:(r)\leqq\mathfrak{p},\qquad r=r_1r_2\cdots r_m\notin\mathfrak{p}$$

なる $\mathfrak{a}_m$ は遂に $\mathfrak{p}$ に屬する準素イデヤルとなる。$\mathfrak{a}_m=\mathfrak{p}$ ならば，$(r)=\mathfrak{r}$ と置いて

$$\mathfrak{p}\mathfrak{r}\leqq\mathfrak{a},\qquad \mathfrak{r}\nleqq\mathfrak{p}$$

となつて，定理は成立する。次に $\mathfrak{a}_m\subset\mathfrak{p}$ なる場合を考察する。$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}_m$ に屬する半素イデヤルであるから，$h_1'\in\mathfrak{p}$, $h_1'\notin\mathfrak{a}_m$ なる元素 h_1' をとれば，h_1' は $\mathfrak{a}_m$ に關して冪零である。又 $\mathfrak{a}_m$ は準素イデヤルであるから $\mathfrak{a}_m\subset\mathfrak{a}_1'=\mathfrak{a}_m:(h_1')\leqq\mathfrak{p}$ であつて，$\mathfrak{a}_1'$ は $\mathfrak{p}$ に屬する準素イデヤルである。$\mathfrak{a}_1'$ が $\mathfrak{p}$ と一致しなければ，この手續は繰返される。故に條件 II に由て遂に

(1)　素イデヤル $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a}$ を含み，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{a}$ との間に素なる中間イデヤルがないとき，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ の**最小素イデヤル**といふ。

(2)　$\mathfrak{a}$ に關して冪零である凡ての元素の集合 $\mathfrak{h}$ は，$\mathfrak{a}$ を含む半素イデヤルである。この $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{a}$ **に屬する半素イデヤル**といふ。

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}'_k=\mathfrak{a}_m:(h'),\quad h'=h'_1h'_2\dots h'_k\notin\mathfrak{a}_m,\quad h'\in\mathfrak{p}$$

なる元素 h' が得られる。この結果と, $\mathfrak{a}_m$ が準素イデヤルであることから,

(2) $$\mathfrak{a}_m\subset\mathfrak{q}_1=\mathfrak{a}_m:\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{p}$$

を得る。而して $\mathfrak{q}_1$ も亦準素イデヤルである。(1) と (2) とから,

(3) $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}_1=\mathfrak{a}:(r)\mathfrak{p},\quad r\notin\mathfrak{p}$: $\mathfrak{a}$ が準素でないとき,

(3′) $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}_1=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}$: $\mathfrak{a}$ が準素なるとき。

此處で $\mathfrak{q}_1$ は $\mathfrak{p}$ に屬する準素イデヤルであるから, 前と同様にして

(4) $\mathfrak{q}_1\subset\mathfrak{q}_2=\mathfrak{q}_1:\mathfrak{p}\doteq\mathfrak{a}_m:\mathfrak{p}^2=\mathfrak{a}:(r)\mathfrak{p}^2,\quad r\notin\mathfrak{p}$: $\mathfrak{a}$ が準素でないとき,

(4′) $\mathfrak{q}_1\subset\mathfrak{q}_2=\mathfrak{q}_1:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^2$: $\mathfrak{a}$ が準素なるとき。

條件 II に由て, この操作も亦有限回で終るから, 遂に

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_{n-1}=\mathfrak{a}:(r)\mathfrak{p}^{n-1}\quad r\notin\mathfrak{p}\quad 又は\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{q}_{n-1}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^{n-1}$$

に達する。即ち $\mathfrak{p}^n\mathfrak{r}\subseteqq\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}\not\subset\mathfrak{p}$ なる關係を得る。而して $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{p}$ と一致するか, 又は $\mathfrak{p}$ に含まれないかである。

II. $\mathfrak{h}$ が素イデヤルでないとき。 條件 II から,

(5) $$\mathfrak{p}=\mathfrak{h}:(r_0),\quad r_0\notin\mathfrak{p}$$

なる元素 r_0 が存在する。この素イデヤル $\mathfrak{p}$ は明かに $\mathfrak{a}$ を含む最小素イデヤルである。$\mathfrak{h}$ に屬しない $\mathfrak{p}$ の元素 p に對しては, $pr_0\in\mathfrak{h}$, 從つて $(pr_0)^s\in\mathfrak{a}$ となるから, $r_0^s=r_1$ と置けば, イデヤル商 $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(r_1)$ は p^s を含む。然し p は $\mathfrak{h}$ に屬しないから, p^s も亦 $\mathfrak{h}$ に屬しない。從つて p^s は $\mathfrak{a}$ に含まれないから

(6) $$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(r_1)\subseteqq\mathfrak{p},\quad r_1\notin\mathfrak{p},\quad p^s\in\mathfrak{a}_1$$

となる。この關係から, $\mathfrak{a}_1$ の半素イデヤル $\mathfrak{h}_1$ に對して, $p\in\mathfrak{h}_1$ となるから, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1\subseteqq\mathfrak{p}$ である。$\mathfrak{h}_1$ が素イデヤルでないならば, $\mathfrak{h}_1$ に含まれない $\mathfrak{p}$ の元素 p_1 に對して, 前と同様に $(p_1r'_0)\in\mathfrak{h}_1$, $r'_0\notin\mathfrak{p}$ なる元素 r'_0 があり, $(p_1r'_0)^t\in\mathfrak{a}_1$ となる。故に $(r'_0)^t=r_2$ とすれば,

(7) $$\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_1:(r_2)\subseteqq\mathfrak{p},\quad r_2\notin\mathfrak{p},\quad p_1^t\notin\mathfrak{h}_1,\quad p_1^t\in\mathfrak{a}_2.$$

而して p_1 は $\mathfrak{h}_1$ に含まれないから, $\mathfrak{a}_2$ の半素イデヤル $\mathfrak{h}_2$ は p_1 を含みて, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2\subseteqq\mathfrak{p}$ となる。順次この操作を繰返して, 條件 II に由て $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{h}_k=\mathfrak{p}$ を得る。故に I に於て述べた結果から,

(8) $$\mathfrak{p}^n\mathfrak{r}'\subseteqq\mathfrak{a}_k,\quad \mathfrak{r}'\not\subset\mathfrak{p}$$

なるイデヤル $\mathfrak{r}'$ の存在が明かになる。(6) と (7) とから

(9)　$\mathfrak{a}_k=\mathfrak{a}:(r_1r_2\cdots r_k)$,　$r_1r_2\cdots r_k\notin\mathfrak{p}$.

それ故に $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}'(r_1r_2\cdots r_k)$ と置けば，(8) と (9) とから，$\mathfrak{r}'\neq\mathfrak{p}$ ならば

$$\mathfrak{p}^n\mathfrak{r}\leqq\mathfrak{a},\qquad \mathfrak{r}\not\leq\mathfrak{p}$$

となる。又 $\mathfrak{r}'=\mathfrak{p}$ ならば，$\mathfrak{p}^{n+1}(r_1\cdots r_k)\leqq\mathfrak{a}$。即ち定理は證明された。

一つの準素イデヤル $\mathfrak{q}$ に屬する半素イデヤル $\mathfrak{h}$ は素イデヤルであるから，定理 1 の第一の場合の證明に由つて $\mathfrak{h}^n\leqq\mathfrak{q}$ を得る。從つて次の重要な定理が成立つ。

定理 2.　可換環 $\mathfrak{J}$ に於て，單位元素の存在は假定されないで，條件 II のみが滿足されるならば，$\mathfrak{J}$ の準素イデヤルは凡て强準素イデヤルである。

定理 3.　可換環 $\mathfrak{J}$ に於て，單位元素の存在は假定せず，只條件 II のみを假定する。$\mathfrak{J}$ のイデヤル $\mathfrak{a}$ に屬する半素イデヤルを $\mathfrak{h}$ とすれば，$\mathfrak{h}^n\leqq\mathfrak{a}$ なる有限の正整數 n がある。

證　定理 1 に由つて，$\mathfrak{a}$ の最小素イデヤルの存在は明かであるから，これらを $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_3,\dots$ とする。又定理 1 から $\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{r}_1\leqq\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}_1\not\leq\mathfrak{p}_1$ なるイデヤル $\mathfrak{r}_1$ が見出されるから，$\mathfrak{a}<\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{m_1}\leqq\mathfrak{p}_i$ $(i=2,3,\dots)$ となる。而して $\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_3,\dots$ は又 $\mathfrak{a}_1$ の最小素イデヤルになつてゐるから，前と同様に $\mathfrak{a}_1<\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_1:\mathfrak{p}_2^{m_2}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\leqq\mathfrak{p}_j$ $(j=3,4,\dots)$ となる。然し條件 II に由つて，この手續は有限回で終らねばならないから，遂に

$$\mathfrak{a}_{k-1}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\mathfrak{p}_{k-1}^{m_{k-1}}\geqq\mathfrak{p}_k^{m_k}\quad\text{即ち}\quad\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\mathfrak{p}_k^{m_k}\leqq\mathfrak{a}$$

なる關係を得る。一方に於て $\mathfrak{h}\leqq\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\dots,k)$ であるから，$n=m_1+m_2+\cdots+m_k$ と置けば $\mathfrak{h}^n\leqq\mathfrak{a}$ となる。

以下の定理に於ては，可換環 $\mathfrak{J}$ は單位元素を持ち，條件 I 及び II を共に滿足するものとする。

定理 4.　可換環 $\mathfrak{J}$ が單位元素を持ち，條件 I, II を滿たせば，$\mathfrak{J}$ の任意のイデヤル $\mathfrak{a}\,(\neq\mathfrak{J})$ に屬する素イデヤル(1) の連鎖 $\mathfrak{p}_1<\mathfrak{p}_2<\cdots$ の項數は有限であり，その隣接二項の間に $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルが挾まれない。

證　$\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\dots)$ は $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルであるから，

(1)　$\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(d_i)$,　$d_i\notin\mathfrak{a}$　$(i=1,2,\dots)$

---

(1) $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{J}$ と異なるイデヤルとし，一つの素イデヤル $\mathfrak{p}$ に對して $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(d)$, $d\notin\mathfrak{a}$ なる元素 d があれば，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ **に屬する素イデヤル**といふ。

なる元素 $d_1, d_2, \dots$ がある。$\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots$ から，イデヤル $\mathfrak{b}$[1]

$$\mathfrak{b}=(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots)$$

を作れば，定理 1 に由つて $\mathfrak{b}$ の最小素イデヤルがある。その一つを $\mathfrak{p}$ とすれば，

$$(2) \qquad \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}.$$

若し $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ とすれば，$\mathfrak{b}$ に含まれない $\mathfrak{p}$ の一元素 p に對して，定理 1 に由つて $pp' \in \mathfrak{b}$, $p' \notin \mathfrak{b}$ なる元素 p' が存在する。然し $pp' \in \mathfrak{b}$ から，上の連鎖の一つの素イデヤル $\mathfrak{p}_\alpha$ に對して $pp' \in \mathfrak{p}_\alpha$ なる關係が成立つ。從つて p は $\mathfrak{b}$ に含まれない假定から $p' \in \mathfrak{p}_\alpha \leqq \mathfrak{b}$ となつて矛盾を生ずる。故に

$$(3) \qquad \mathfrak{b}=\mathfrak{p}.$$

$\mathfrak{p}$ 內に一元素 p を任意に取れば，(3) より $p \in \mathfrak{p}_\beta$ を得る。此處で $\mathfrak{p}_\beta$ は (2) の一つの素イデヤルであるから，(1) に由つて $pd_\beta \in \mathfrak{a}$, $d_\beta \notin \mathfrak{a}$ となる。故に $\mathfrak{p}$ 內の元素は凡て $\mathfrak{a}$ に關して零因子である。然し假定に由つて $\mathfrak{J}$ は單位元素を持つから，$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{J}$ でなくてはならない。そうでないと，上の結果から單位元素が $\mathfrak{a}$ に關して零因子となり，從つて $\mathfrak{a}=\mathfrak{J}$ なる矛盾を生ずる。斯く $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{J}$ であるから，條件 I に由つて，連鎖 (2) は有限で終る。故に (3) から $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ に屬する一つの最大素イデヤルでなくてはならぬ。

$$(4) \qquad \mathfrak{d}_0=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}$$

とすれば，前の結果に由つて，$\mathfrak{d}_0$ に屬する素イデヤルは $\mathfrak{p}$ を眞部分として含まない。今 $\mathfrak{p}'=\mathfrak{d}_0:(d') \supset \mathfrak{p}$, $d' \notin \mathfrak{d}_0$ なる素イデヤル $\mathfrak{p}'$ がありとすれば，(4) から $\mathfrak{p}'=\mathfrak{a}:(d')\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}$, 從つて $d' \notin \mathfrak{d}_0$ と (4) とから $(d')\mathfrak{p} \not\leqq \mathfrak{a}$ となつて，$\mathfrak{p}$ を含み $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルが存在することになる。これは $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a}$ に屬する最大素イデヤルである前の結果と矛盾する。それ故に $\mathfrak{d}_0$ に屬する素イデヤルは $\mathfrak{p}$ を含まない。次に $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{d}_0$ に屬するとすれば，$\mathfrak{p}=\mathfrak{d}_0:(d')$, $d' \notin \mathfrak{d}_0$ なる元素 d' がある。再び $\mathfrak{d}_1=\mathfrak{d}_0:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^2$ とすれば，前と同様に $\mathfrak{d}_1$ に屬する素イデヤルが $\mathfrak{p}$ を含むことはない。而して $d' \notin \mathfrak{d}_0$ から $\mathfrak{d}_0 \subset \mathfrak{d}_1$ を得る。$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{d}_1$ に屬するとすれば，同様に $\mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{d}_2=\mathfrak{d}_1:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^3$ なる關係を生ずる。然

---

(1) $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots)$ は，イデヤル $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, 3, \dots)$ から取り出した，任意の有限個の元素の和 $p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_n}$ として表される凡ての元素の集合を示す。この集合は明かに一つのイデヤルである。E. Noether: Math. Ann. **83** (1921), 30.

し條件 II に由つて，この手續は有限回で終らねばならぬから，$\mathfrak{d}_{m+1}=\mathfrak{d}_m:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^{m+2}=\mathfrak{d}_m=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^{m+1}$ となつて，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{d}_m$ に屬しなくなる。

一方に於て (2) の一つの素イデヤルを $\mathfrak{p}_i\,(\subset\mathfrak{p})$ とすれば，$\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(d_i)\subset\mathfrak{p}$ に由つて，$(d_i)\mathfrak{p}^{m+1}\nleqq\mathfrak{a}$ となり，$\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(d_i)\mathfrak{p}^{m+1}$ を得る。即ち $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{d}_m:(d_i)$ となる。故に (2) の內で $\mathfrak{p}$ を除いた他の凡ては $\mathfrak{d}_m$ に屬する。[1] 前と同樣にして，(2) の內で $\mathfrak{d}_m$ に屬する最大の素イデヤル $\mathfrak{p}_\alpha$ を求め得る。然し $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{d}_m$ に屬しないから，前の結果に由つて $\mathfrak{p}_\alpha\subset\mathfrak{p}$ である。$\mathfrak{p}_\alpha$ と $\mathfrak{p}$ との間には $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルは存在しない。若し $\mathfrak{p}_\alpha\subset\mathfrak{p}_\beta\subset\mathfrak{p}$ であつて，$\mathfrak{p}_\beta$ が $\mathfrak{a}$ に屬するとすれば，今得た結果から，$\mathfrak{p}_\beta$ は $\mathfrak{d}_m$ に屬し，$\mathfrak{p}_\alpha$ が $\mathfrak{d}_m$ に屬する最大素イデヤルになることと矛盾する。前と同樣にして $\mathfrak{d}_{m_1}=\mathfrak{d}_m:\mathfrak{p}_\alpha^{m_1+1}=\mathfrak{d}_m:\mathfrak{p}_\alpha^{m_1+2}$ となつて，$\mathfrak{d}_{m_1}\supset\mathfrak{d}_m$ で，その上 $\mathfrak{p}_\alpha$ は $\mathfrak{d}_{m_1}$ に屬しない。而して (2) から $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}_\alpha$ とを除いた他の凡ては $\mathfrak{d}_{m_1}$ に屬する。又 (2) の內に $\mathfrak{d}_{m_1}$ に屬する最大素イデヤル $\mathfrak{p}_{\alpha_1}$ がある。更に $\mathfrak{p}_{\alpha_1}\subset\mathfrak{p}_\alpha\subset\mathfrak{p}$ であつて，その間には $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルは全くない。然るに條件 II に由つて，$\mathfrak{a}:\mathfrak{p}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^2\subset\cdots\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^{m+1}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{p}^{m+1}\mathfrak{p}_\alpha\subset\cdots$ なる連鎖は有限で終らねばならない。故に $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルの連鎖は有限個の項よりなり，その項の間に，$\mathfrak{a}$ に屬する他の素イデヤルを挾むことは出來ない。

上の定理を應用して，次の要用な定理を證明する。

定理 5. 可換環 $\mathfrak{J}$ に於て，單位元素の存在と條件 I, II の成立とを假定すれば，$\mathfrak{J}$ の任意のイデヤル $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルは有限個である。

證 定理 4 に由つて，$\mathfrak{a}$ に屬する最大素イデヤルがあるから，これらの凡てを

$$(1)\qquad \mathfrak{p}_{11},\ \mathfrak{p}_{12},\ \mathfrak{p}_{13},\ \cdots$$

とすれば，これらは互に他を含まず，その上 $\mathfrak{p}_{1i}=\mathfrak{a}:(d_{1i})$, $d_{1i}\notin\mathfrak{a}$ なる元素 d_{1i} の存在から

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{11}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\mathfrak{p}_{13}\subset\cdots$$

なる關係を生ずる。條件 II に由れば，この連鎖は有限で終らねばならぬ。即ち $\mathfrak{a}$ に屬する最大素イデヤル (1) は有限であるから，その總數を n_1 とし，

(1) $\mathfrak{p}_0$ を $\mathfrak{d}_m$ に屬し，$\mathfrak{p}$ に含まれる素イデヤルとすれば，$\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{p}_0=\mathfrak{d}_m:(d_0)$, $d_0\notin\mathfrak{d}_m$ となる。然し $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{d}_m$ に屬しないから $\mathfrak{p}>\mathfrak{p}_0$ である。$\mathfrak{p}_0=\mathfrak{a}:(d_0\mathfrak{p}^{m+1})$, $(d_0)\mathfrak{p}^{m+1}\nleqq\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{a}$ に屬する一つの素イデヤルに含まれるが，$\mathfrak{a}$ に屬するや否やは不明である。

(2)　　$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{11} \subset \cdots \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}=\mathfrak{a}_1$

と置く。次に $\mathfrak{p}_{ij}$ を $\mathfrak{a}$ に屬する (1) 以外の素イデヤルとすれば，$\mathfrak{p}_{ij}=\mathfrak{a}:(d_{ij})$, $d_{ij} \notin \mathfrak{a}$ なる元素 d_{ij} の存在から，$\mathfrak{p}_{ij}\mathfrak{p}_{11}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}(d_{ij}) \subseteqq \mathfrak{a}$ となる。又 $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}$ は $\mathfrak{p}_{ij}$ に含まれない元素を持つから $\mathfrak{p}_{ij}=\mathfrak{a}:(d_{ij})\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}=\mathfrak{a}_1:(d_{ij})$, $d_{ij} \notin \mathfrak{a}_1$ となる。故に $\mathfrak{p}_{ij}$ は $\mathfrak{a}_1$ に屬する。それ故に $\mathfrak{a}$ に屬する凡ての素イデヤルから，(1) に屬するものを除いた殘りのものの最大を，定理 4 に由つて求める。これらを

(3)　　$\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \mathfrak{p}_{23}, \cdots$

とすれば，互に他を含まず，その凡てが $\mathfrak{a}_1$ に屬する。$\mathfrak{p}_{2j}=\mathfrak{a}_1:(d_{2j})$, $d_{2j} \notin \mathfrak{a}_1$ なる元素 d_{2j} の存在から，

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_1:\mathfrak{p}_{21} \subset \mathfrak{a}_1:\mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22} \subset \cdots$$

を生じ，條件 II からこの連鎖は有限で終る。從つて (3) の素イデヤル總數 n_2 は又有限だ。それで $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22}\cdots\mathfrak{p}_{2n_2}=\mathfrak{a}_2$ と置く。前と同様に $\mathfrak{a}$ に屬する凡ての素イデヤルから，(1) 及び (3) に含まれるもの全部を除けば，殘りは凡て $\mathfrak{a}_2$ に屬する。而してこの殘餘の素イデヤルの內には最大なるものがあつて，有限個である。斯くして定理 4 から，$\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルの有限性は明かである。

最後の豫備定理として次のものを擧げる。

定理 6. 單位元素を持つ可換環 $\mathfrak{J}$ に於て，條件 I 及び II が滿足されるとする。$\mathfrak{p}$ を任意のイデヤル $\mathfrak{a}\,(\neq \mathfrak{J})$ に屬する素イデヤルとし，n を適當に大きな正整數とすれば，$\mathfrak{p}^n$ の中には $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(d)$, $d \notin \mathfrak{a}$ なる關係を滿足する元素 d はない。

證 $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{J}$ であり $\mathfrak{J}$ は單位元素を持つから，$\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤル $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{J}$ と違つてゐる。證明のためには，$\mathfrak{p}$ の冪が常に $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(d)$, $d \notin \mathfrak{a}$ なる元素 d を含むとすれば，矛盾の生ずることを示せば足りる。$\mathfrak{a}$ の半素イデヤルを $\mathfrak{h}_0$ とすれば，定理 3 に由つて $\mathfrak{h}_0^{m_0} \subseteqq \mathfrak{a}$. 而して $\mathfrak{h}_0$ の最小素イデヤルの一つ $\mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{p}$ に含まれる。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{J}$ であるから，條件 I に由つて素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}' \subset \cdots \subset \mathfrak{p}$ は有限で終らねばならない。$\mathfrak{h}_0$ は半素イデヤルであるから，[1]

$$\mathfrak{h}_0=\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_1 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n$$

(1) 條件 II が假定された環に於ては，半素イデヤルは，その有限個の最小素イデヤルの共通分として表される。S. Mori: 本紀要, **11** (1942), 130.

となる。$\mathfrak{p}_1$ に含まれない $\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n$ の一元素 p_1 を取れば，條件 II に由つて $\mathfrak{a}:(p_1)^{k_1}=\mathfrak{a}:(p_1)^{k_1+1}=\cdots$ なる正整數 k_1 が定まる。この元素の羃 $p_1^{k_1}$ から $(\mathfrak{a}, p_1^{k_1})=\mathfrak{a}_1$ を作り，その屬する半素イデヤルを $\mathfrak{h}_1$ とすれば，

$$\mathfrak{h}_1^{m_1} \leqq \mathfrak{a}_1, \qquad \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \leqq \mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n.$$

故に $\mathfrak{h}_1$ が半素イデヤルなることから，

$$\mathfrak{h}_1=\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n \frown \mathfrak{p}_{11} \frown \mathfrak{p}_{12} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{1n_1},$$

此處で $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \ldots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ は凡て $\mathfrak{p}_1$ を含む。更に $\mathfrak{p}_2$ に含まれない $\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_3 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n \frown \mathfrak{p}_{11} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{1n_1}$ の一元素を p_2 とすれば，條件 II に由つて $\mathfrak{a}_1:(p_2^{k_2})=\mathfrak{a}_1:(p_2^{k_2+1})=\cdots$ なる正整數 k_2 が定まる。前と同樣にイデヤル $(\mathfrak{a}_1, p_2^{k_2})=\mathfrak{a}_2$ を作り，これに屬する半素イデヤルを $\mathfrak{h}_2$ とすれば，

$$\mathfrak{h}_2^{m_2} \leqq \mathfrak{a}_2, \qquad \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \leqq \mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_3 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n \frown \mathfrak{p}_{11} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{1n_1}.$$

從つて

$$\mathfrak{h}_2=\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_3 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n \frown \mathfrak{p}_{11} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{1n_1} \frown \mathfrak{p}_{21} \frown \mathfrak{p}_{22} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{2n_2},$$

此處で $\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \ldots \mathfrak{p}_{2n_2}$ は凡て $\mathfrak{p}_2$ を含む。この方法を繰返して，$\mathfrak{a}_{n-1}:(p_n^{k_n})=\mathfrak{a}_{n-1}:(p_n^{k_n+1})=\cdots$，$(\mathfrak{a}_{n-1}, p_n^{k_n})=\mathfrak{a}_n$ なる $\mathfrak{a}_n$ の半素イデヤルを $\mathfrak{h}_n$ とすれば，

$$\mathfrak{h}_n^{m_n} \leqq \mathfrak{a}_n,$$

$$\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_n=\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_{11} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{1n_1} \frown \mathfrak{p}_{21} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{2n_2} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{n1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{nn_n},$$

此處で $\mathfrak{p}_{n_1}, \mathfrak{p}_{n_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{nn_n}$ は凡て $\mathfrak{p}_n$ を含む。

再び前と同樣に $\mathfrak{p}_{11}$ に屬しない $\mathfrak{p}_0 \frown \mathfrak{p}_{12} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{1n_1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{n_1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{nn_n}$ の元素を取り，全然同一な操作を繰返せば，$\mathfrak{p}_0$ を含まない素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{ij} \subset \mathfrak{p}_{ijk} \subset \cdots$ を得る。これらの素イデヤルから $\mathfrak{b}=(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{ij}, \mathfrak{p}_{ijk}, \ldots)$ を作れば，$\mathfrak{b}$ は又素イデヤルである。然し $\mathfrak{J}$ は單位元素 e を持つから $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{J}$ である。そうでないと $e \in \mathfrak{p}_{ij\ldots t}$ となつて，$\mathfrak{p}_{ij\ldots t}$ が $\mathfrak{p}_0$ を含まない事實と矛盾する。故に條件 I から連鎖 $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{ij} \subset \mathfrak{p}_{ijk} \subset \cdots$ は有限で終り，$\mathfrak{b}=\mathfrak{p}_{ij\ldots s}$ が上の連鎖の內で $\mathfrak{p}_0$ を含まない最大のものとなる。それ故に上述の方法を有限回繰返して行へば，$\mathfrak{a}_m=(\mathfrak{a}, p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_m^{k_m})$ に屬する半素イデヤル $\mathfrak{h}_m$ が，遂に $\mathfrak{p}_0$ と一致するに至る。そうでないと $\mathfrak{p}_0$ を含まない素イデヤルの無限の連鎖を生じて，前述の結果と矛盾する。

次に $\mathfrak{p}_0$ に含まれない $\mathfrak{p}$ 內の一元素 p_{m+1} を取り，條件 II に由つて $\mathfrak{a}_m:(p_{m+1}^{k_{m+1}})=\mathfrak{a}_m:(p_{m+1}^{k_{m+1}+1})=\cdots$ なる正整數 k_{m+1} を決定し，これから $\mathfrak{a}_{m+1}=(\mathfrak{a}_m, p_{m+1}^{k_{m+1}})$ を作る。斯くすれば $\mathfrak{a}_{m+1}$ の半素イデヤル $\mathfrak{h}_{m+1}$ に屬する一つの素

イデヤル $\mathfrak{p}_0'$ は, $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_0'\subseteqq\mathfrak{p}$ なる關係を滿足する。前と同樣の操作に由つて, $\mathfrak{a}_{m+m'}=(\mathfrak{a},p_1^{k_1},p_2^{k_2},\dots,p_m^{k_m},p_{m+1}^{k_{m+1}},\dots,p_{m+m'}^{k_{m+m'}})$ の半素イデヤル $\mathfrak{h}_{m+m'}$ は $\mathfrak{p}_0'$ と一致するに至る。證明の初めに述べた通り $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_0'\subset\mathfrak{p}_0''\subset\cdots\subset$ なる連鎖は有限で終つて, $\mathfrak{p}$ に達するから, 以上を纒めて次の關係を得る。

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_t=(\mathfrak{a},p_1^{k_1},p_2^{k_2},\dots,p_t^{k_t}), & \mathfrak{a}_{i+1}=(\mathfrak{a}_i,p_{i+1}^{k_{i+1}}), \\ \mathfrak{a}_i:(p_{i+1}^{k_{i+1}})=\mathfrak{a}_i:(p_{i+1}^{k_{i+1}+1})=\cdots & (i=0,1,2,\dots,t-1). \end{cases}$$

$\mathfrak{a}_t$ に屬する半素イデヤルを $\mathfrak{h}_t$ とすれば,

$$(2)\qquad \mathfrak{h}_t^{m_t}\subseteqq\mathfrak{a}_t\subseteqq\mathfrak{h}_t,\qquad \mathfrak{h}_t=\mathfrak{p}.$$

最初の假定に由つて $\mathfrak{p}^{m_t}$ は, $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(d)$, $d\notin\mathfrak{a}$ なる元素 d を含むから, (1) と (2) とより

$$(3)\qquad d=a+a_1p_1^{k_1}+a_2p_2^{k_2}+\cdots+a_tp_t^{k_t},\qquad a\in\mathfrak{a}$$

となる。この兩邊に p_t を乘ずれば, $(d)\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{a}$ に由つて, $a_tp_t^{k_t+1}\in\mathfrak{a}_{t-1}$ を得る。故に (1) から $a_tp_t^{k_t}\in\mathfrak{a}_{t-1}$ となり, (3) は

$$(4)\qquad d=a'+a_1'p_1^{k_1}+a_2'p_2^{k_2}+\cdots+a_{t-1}'p_{t-1}^{\prime k_{t-1}},\qquad a'\in\mathfrak{a}$$

と書き改められる。此の操作を繰返して, 最後に

$$d=a^{(t)},\qquad a^{(t)}\in\mathfrak{a}$$

なる矛盾に達する。即ち定理は證明された。

主　要　定　理

前節に於て, 必要な豫備定理が凡て述べられたから, 本論の目的である次の主要定理の證明は容易である。

主要定理　可換環 $\mathfrak{J}$ に於て, 單位元素の存在と條件 I 及び II の成立とを假定すれば, $\mathfrak{J}$ の凡てのイデヤルは强準素イデヤルの共通分として表される。

證　$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{J}$ と違つた $\mathfrak{J}$ 內の任意のイデヤルとすれば, 定理 5 に由つて $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルは有限である。今これらの凡てを $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\dots,\mathfrak{p}_n$ とすれば,

$$(1)\qquad \mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(d_i),\quad d_i\notin\mathfrak{a}\quad (i=1,2,\dots,n)$$

なる元素 d_i が存在する。m_i を適當に大きな正整數とすれば, 定理 6 に由つて, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p}_i^{m_i})$ は (1) の如き元素 d_i を含まない。そうでないと $d_i\notin\mathfrak{a}$ から $d_i-a\notin\mathfrak{a}$, $d_i-a\in\mathfrak{p}_i^{m_i}$, $a\in\mathfrak{a}$ なる元素 d_i-a に對して $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(d_i-a)$ となつて, 定理 6 に矛盾する。

次に $\mathfrak{p}_i$ の元素であつて, $\mathfrak{p}_i$ 外の元素との積が $(\mathfrak{a},\mathfrak{p}_i^{m_i})$ に含まれるやうな

元素の集合を $\mathfrak{q}_i$ とすれば，$\mathfrak{q}_i$ は $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m_i})$ を含む最小の强準素イデヤルである。若し $\mathfrak{q}_i$ が (1) の關係を滿足する元素 d_i を含めば，$rd_i \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m_i})$，$r \notin \mathfrak{p}_i$ なる元素 r が存在して，(1) から $rd_i \notin \mathfrak{a}$，$\mathfrak{p}_i(rd_i) \leqq \mathfrak{a}$ となる。d_i の性質と $r \notin \mathfrak{p}_i$ とから，$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (rd_i)$ となつて，前に得た結果と矛盾する。故に $\mathfrak{q}_i$ は (1) のやうな關係を滿足する元素 d_i を含まない。

上の如くにして得た凡ての强準素イデヤル $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ から

(2)　　$$\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$$

を作れば，明かに $\mathfrak{d} \geqq \mathfrak{a}$ である。もし $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{a}$ であるならば，條件 II に由つて，$\mathfrak{a}$ に屬しない $\mathfrak{d}$ の一元素 d に對して $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (d)$，$d \notin \mathfrak{a}$ なる關係を得る。而して素イデヤル $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ に屬することゝなる。從つて $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ の內の一つと一致する。然し一方に於て $d \in \mathfrak{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ であるから，上述の $\mathfrak{q}_i$ の性質に由つて $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ でなければならぬ。これは矛盾である。それ故に $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$ であるべきだ。即ち主要定理は證明された。