Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz. II.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 20. 4. 1936.)

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit[1] werden wir die besonderen Eigenschaften des nilpotenten Ringes $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz noch näher untersuchen, einerseits um den Beweis des grundlegenden Satzes in meiner vorigen Arbeit[2] kürzer zu gestalten, andererseits um zu zeigen, dass bei der Untersuchung der nilpotenten Ringe der Totalnullteiler stets eine wichtige Rolle spielt. Im letzten Teile soll die direkte Summezerlegung des Ringes $\mathfrak{R}$ behandelt werden, wobei nur der abgeschwächte U-Satz vorausgesetzt wird. Bei dieser Untersuchung lasse ich mich von der Analogie mit den endlichen nilpotenten Ringen leiten, welche ich in meiner vorigen Arbeit[3] untersucht habe. Die Wichtigen Begriffe, die wir bei dieser Diskussion benutzen, sind die Begriffe des Totalnullteilers und der Zurückleitung.[4]

Einige Sätze über nilpotente Ringe.

Der erste Teil des Beweises vom grundlegenden Satz 1 wird durch den folgenden Satz verkürzt und verallgemeinert.

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein nilpotenter Ring mit abgeschwächtem U-Satz. Dann ist jeder Idealquotient $\mathfrak{q} = (0):\mathfrak{a}$ darstellbar als Durchschnitt von endlich vielen Idealquotienten $\mathfrak{q}_i$ derart, dass $\mathfrak{q}_i = (0):(r_i)$ ist.*

(1) Nach der B. H. Neumann mir erwiesenen Aufmerksamkeit werde ich die Beweise der Sätze im letzten Paragraphen umständlich erzählen. Vgl. Fortschritte d. Math. **57**$_1$ (1931), 167.

(2) S. Mori, Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz, dieses Journal **6** (1936), 139.

(3) S. Mori, Zusammenhang zwischen Primäridealen und Minimalidealen, dieses Journal **1** (1931), 77.

(4) W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. **23** (1925), 175.

Es sei $\mathfrak{a}' = (0):\mathfrak{q}$, dann ist $\mathfrak{a}'$ offenbar ein Teiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q} = (0):\mathfrak{a}'$. Ist r_1 ein beliebiges Element von $\mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{q}_1 = (0):(r_1)$ ein Teiler von $\mathfrak{q}$. Wenn $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$ ist, so ist der Satz schon bewiesen. Also nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$ ist. Dann gibt es in $\mathfrak{q}_1$ ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element q_1, und aus $(q_1)\mathfrak{a}' \neq (0)$ folgt die Existenz eines Elementes r_2 in $\mathfrak{a}'$ derart, dass $r_2 q_1 \neq 0$ ist. Der Idealquotient $\mathfrak{q}_2 = (0):(r_2)$ enthält das Ideal $\mathfrak{q}$, aber nicht das Element q_1, und folglich ist $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{q}_1$. Ist $\mathfrak{d}_2$ noch von $\mathfrak{q}$ verschieden, so gibt es in $\mathfrak{d}_2$ ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element q_2, und für ein Element r_3 aus $\mathfrak{a}'$ ist $r_3 q_2 \neq 0$, da $(q_2)\mathfrak{a}' \neq (0)$ ist. Setzen wir wieder $\mathfrak{q}_3 = (0):(r_3)$, so ist $\mathfrak{q}_3$ nach $r_3 \equiv 0(\mathfrak{a}')$ ein Teiler von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_3$ enthält nicht das Element q_2. Der Durchschnitt $\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3$ ist damit ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{d}_2$ und ein Teiler von $\mathfrak{q}$. Der Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{R}$ ist kein Nullideal und durch $\mathfrak{q}$ teilbar, denn $\mathfrak{R}$ ist nilpotent. Da in $\mathfrak{R}$ aber der abgeschwächte U-Satz vorausgesetzt wird, so ergibt damit eine Fortsetzung dieses Verfahrens den Beweis unseres Satzes.

Ist $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ für den nilpotenten Ring $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz, so ist nach Satz 3 eine endlich-malige Summe jedes Elementes r aus $\mathfrak{R}$ stets gleich mit Null, nämlich es ist $nr = 0$ für eine ganze Zahl n. Die kleinste positive Zahl n, für welche $nr = 0$ ist, heisst die *Ordnung des Elementes* r. Ist $\mathfrak{R}$ ausserdem in eine direkte Summe unzerlegbar, so ist die Ordnung jedes Elementes eine Potenz einer Primzahl p. Aus der Tatsache folgt

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein nilpotenter Ring mit abgeschwächtem U-Satz und in eine direkte Summe unzerlegbar, und es seien* $\mathfrak{q}_1 = (0):\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{q}_2 = (0):\mathfrak{a}_2$ *zwei Idealquotienten von der Art, dass* $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2$ *ist, und dass dazwischen kein weiterer Idealquotient von der Form* $(0):\mathfrak{b}$ *eingeschoben werden kann. Dann ist die Anzahl der verschiedenen Elemente des Restklassenrings* $\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_2$ *nicht grösser als p^n, wo n die Anzahl der Ideale einer direkten Summezerlegung des Totalnullteilers* $\mathfrak{t}$ *von $\mathfrak{R}$, und p die zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primzahl bedeutet.*

Bilden wir die Idealquotienten

$$(1) \qquad \mathfrak{a}_1' = (0):\mathfrak{q}_1, \qquad \mathfrak{a}_2' = (0):\mathfrak{q}_2,$$

so muss $\mathfrak{a}_1' \subset \mathfrak{a}_2'$ sein, weil $\mathfrak{q}_1 = (0):\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{q}_2 = (0):\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2$ ist. Da $\mathfrak{a}_1' \neq (0)$ ist, und da der abgeschwächte U-Satz gilt, so können wir damit in $\mathfrak{a}_2'$ ein durch $\mathfrak{a}_1'$ unteilbares Element a_2' finden, sodass es kein

Ideal zwischen $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{a}' = \big(\mathfrak{a}_1', (a_2')\big)$ gibt. Aus (1) folgt dann $\mathfrak{q}_1(a_2') \neq (0)$, $\mathfrak{q}_2\mathfrak{a}' = (0)$. Setzen wir $\mathfrak{q}' = (0):\mathfrak{a}'$, so erhalten wir daraus $\mathfrak{q}_2 \leqq \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}_1$. Denn, wäre $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}'$, so ergäbe sich ein Widerspruch $\mathfrak{q}_1(a_2') = (0)$. Da es aber zwischen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ keinen Idealquotient von der Form $(0):\mathfrak{b}$ gibt, so folgt daraus

$$(2) \qquad \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}', \qquad \mathfrak{q}_2 = (0):\mathfrak{a}'.$$

Nun sei q_1 ein beliebiges durch $\mathfrak{q}_2$ unteilbares Element aus $\mathfrak{q}_1$, dann ist nach (2) $q_1a_2' \neq 0$. Da $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2$ ist, so muss $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ sein. Nach Satz 3 und der Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{R}$ ist die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{R}$ eine Potenz einer Primzahl p. Da es aber zwischen $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{a}' = \big(\mathfrak{a}_1', (a_2')\big)$ kein Ideal gibt, so ist

$$pa_2' \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1'), \qquad ra_2' \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1')$$

für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$. Nach $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{q}_1 = (0)$ ist damit $t = q_1a_2'$ ein Element aus $\mathfrak{t}$ und $pt = 0$. Sind zwei durch $\mathfrak{q}_2$ unteilbare Elemente q_1 und q_1' aus $\mathfrak{q}_1$ inkongruent mod. $\mathfrak{q}_2$, so muss $q_1a_2' \neq q_1'a_2'$ sein. Sonst würde $q_1 \equiv q_1'\,(\mathfrak{q}_2)$, und wir hätten einen Widerspruch. $t = q_1a_2'$ und $t' = q_1'a_2'$ sind damit zwei verschiedene Elemente aus $\mathfrak{t}$, und $pt = 0$, $pt' = 0$. Diese Tatsachen bedeuten, dass die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_2$ nicht grösser als die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{t}$ von der Ordnung p ist. Nach den Sätzen 2 und 3 folgt daraus unser Satz.

Satz 11. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein nilpotenter Ring mit abgeschwächtem U-Satz, und es sei der Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe unzerlegbar, so gibt es für jeden Teiler $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{t}$ ein Ideal $\mathfrak{a}'$ von der Art, dass $\mathfrak{a} = (0):\mathfrak{a}'$ ist.*

In dem Fall $\mathfrak{R}^2 = (0)$ ist der Satz richtig. Wir nehmen somit $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ an. Da der Totalnulteiler $\mathfrak{t}$ in eine direkte Summe unzerlegbar ist, so ist $\mathfrak{R}$ auch in eine direkte Summe unzerlegbar, und nach Satz 3 ist die Ordnung jedes Elementes aus $\mathfrak{R}$ eine Potenz einer Primzahl p. Nach Satz 1 ist der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{t}$ eine endliche Menge, und folglich können wir eine Hauptkompositionsreihe von Idealen

$$(1) \qquad \mathfrak{t} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$$

finden. Ist a_1 ein durch $\mathfrak{t}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{a}_1$, so ist

$$(2) \qquad \mathfrak{a}_1 = \big(\mathfrak{t}, (a_1)\big), \qquad pa_1 \equiv 0\,(\mathfrak{t}), \qquad \mathfrak{R}(a_1) \equiv 0\,(\mathfrak{t}).$$

Der Idealquotient $\mathfrak{a}_1' = (0) : \mathfrak{a}_1$ ist von $\mathfrak{R}$ verschieden. Sind r_1 und r_2 zwei durch $\mathfrak{a}_1'$ unteilbare beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$, so werden nach (2)

$$\mathfrak{R}(r_1a_1) = (0), \ \mathfrak{R}(r_2a_1) = (0), \ pr_1a_1 = 0, \ pr_2a_1 = 0, \ r_1a_1 \neq 0, \ r_2a_1 \neq 0.$$

Da $\mathfrak{t}$ unzerlegbar ist, so muss nach Satz 2 $r_2a_1 - kr_1a_1 = 0$ für eine ganze Zahl k sein. Aus $(r_2 - kr_1)\big(\mathfrak{t}, (a_1)\big) = (r_2 - kr_1)\mathfrak{a}_1 = (0)$ und $\mathfrak{a}_1' = (0) : \mathfrak{a}_1$ folgt $r_2 - kr_1 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1')$. Also ist $\mathfrak{a}_1'$ ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$, und der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}_1'$ hat nur p verschiedene Elemente.

Es sei a_2 ein Element von der Art, dass $\mathfrak{a}_1'(a_2) = (0)$, $a_2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{t})$ ist. Dann ist $ra_2 \equiv 0\,(\mathfrak{t})$, $ra_2 \neq 0$ für ein durch $\mathfrak{a}_1'$ unteilbares Element r aus $\mathfrak{R}$. Nach $pr \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1')$ ist p die Ordnung des Elementes ra_2. Aus (2) folgt auch, dass ra_1 ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{t}$ und von der Ordnung p ist. Damit ist $r(ka_1 - a_2) = 0$, wo k eine mit p relativ-prime ganze Zahl ist. Aus $(ka_1 - a_2)\mathfrak{a}_1' = 0$ ergibt sich damit $ka_1 - a_2 \equiv 0\,(\mathfrak{t})$, also muss nach (2) $a_2 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1)$ und folglich

$$\mathfrak{a}_1 = (0) : \mathfrak{a}_1' \tag{3}$$

sein.

Da es kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gibt, so können wir auch ein Element a_2 finden, so dass

$$\mathfrak{a}_2 = \big(\mathfrak{a}_1, (a_2)\big), \qquad pa_2 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1), \qquad \mathfrak{R}(a_2) \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1) \tag{4}$$

ist. Nach (3) ist der Idealquotient $\mathfrak{a}_2' = (0) : \mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{a}_1'$ verschieden, und $\mathfrak{a}_2' \subset \mathfrak{a}_1'$. Sind r_1 und r_2 zwei durch $\mathfrak{a}_2'$ unteilbare beliebige Elemente aus $\mathfrak{a}_1'$, so werden nach (4)

$$\mathfrak{R}(r_1a_2) = (0), \ \mathfrak{R}(r_2a_2) = (0), \ pr_1a_2 = 0, \ pr_2a_2 = 0, \ r_1a_2 \neq 0, \ r_2a_2 \neq 0.$$

Nach der Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{t}$ ist $r_2a_2 - kr_1a_2 = 0$ für eine ganze Zahl k. Aus $(r_2 - kr_1)\big(\mathfrak{a}_1, (a_2)\big) = (r_2 - kr_1)\mathfrak{a}_2 = (0)$, $\mathfrak{a}_2' = (0) : \mathfrak{a}_2$ folgt $r_2 - kr_1 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_2')$. Also gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{a}_2'$. Ist $\mathfrak{a}_2'(a_3) = (0)$, $a_3 \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}_1)$, so wird damit $pr_1a_3 = 0$, $r_1a_3 \equiv 0\,(\mathfrak{t})$, $r_1a_3 \neq 0$ für ein durch $\mathfrak{a}_2'$ unteilbares Element r_1 aus $\mathfrak{a}_1'$. Andererseits ist nach (4) r_1a_2 ein Element aus $\mathfrak{t}$ und von der Ordnung p. Da $\mathfrak{t}$ aber in eine direkte Summe unzerlegbar ist, so erhalten wir damit $r_1(la_2 - a_3) = 0$ für eine mit p relativ-prime ganze Zahl l. Aus $\mathfrak{a}_1' = \big(\mathfrak{a}_2', (r_1)\big)$ folgt damit $(la_2 - a_3)\mathfrak{a}_1' = (0)$, und aus (3) ergibt sich $a_3 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_2)$. Somit muss

$\mathfrak{a}_2 = (0) : \mathfrak{a}_2'$ sein. Indem wir so fortfahren, bis wir zum Ideal $\mathfrak{a}$ in (1) gelangen, erhalten wir das im Satz ausgesprochene Resultat.

Satz 12. *Es sei im nilpotenten Ringe $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz der Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ in eine direkte Summe unzerlegbar. Für einen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Teiler $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{t}$ gibt es dann und nur dann ein Element r derart, dass $\mathfrak{a} = (0) : (r)$ ist, wenn der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ein und nur ein Minimalideal hat.*

Da $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist, so nehmen wir zunächst $\mathfrak{a} = (0) : (r)$ an, und es sei $\mathfrak{a}_1$ ein minimaler Teiler von $\mathfrak{a}$. Dann ist

$$\mathfrak{a}_1 = \big(\mathfrak{a}, (a_1)\big)\,, \qquad pa_1 \equiv 0\,(\mathfrak{a})\,, \qquad \mathfrak{R}(a_1) \equiv 0\,(\mathfrak{a})\,, \qquad a_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})\,.$$

Damit ist das Element $ra_1 = t$ ein Element aus $\mathfrak{t}$ und von der Ordnung p. Für einen anderen minimalen Teiler $\mathfrak{a}_1'$ von $\mathfrak{a}$ gilt auch

$$\mathfrak{a}_1' = \big(\mathfrak{a}, (a_1')\big)\,, \qquad pa_1' \equiv 0\,(\mathfrak{a})\,, \qquad \mathfrak{R}(a_1') \equiv 0\,(\mathfrak{a})\,, \qquad a_1' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})\,,$$

und folglich ist $ra_1' = t'$ ein Element aus $\mathfrak{t}$ von der Ordnung p. Da $\mathfrak{t}$ aber in eine direkte Summe unzerlegbar ist, so wird nach Satz 2 $t' = st$ für eine mit p relativ-prime ganze Zahl s. Daraus folgt $r(a_1' - sa_1) = 0$, $a_1' - sa_1 \equiv 0\,(\mathfrak{a})$; also erhalten wir $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1'$. Hiermit hat der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ein und nur ein minimales Ideal.

Wir nehmen umgekehrt an, dass $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ein und nur ein Minimalideal hat. Dann hat $\mathfrak{a}$ einen und nur einen minimalen Teiler $\mathfrak{a}_1 = \big(\mathfrak{a}, (a_1)\big)$. Nach Satz 11 können wir ein Ideal $\mathfrak{a}'$ finden, so dass $\mathfrak{a} = (0) : \mathfrak{a}'$ ist. Für ein Element r aus $\mathfrak{a}'$ muss damit $ra_1 \neq 0$ sein, sonst ergäbe sich ein Widerspruch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}' = (0)$. Ist $\bar{\mathfrak{a}} = (0) : (r)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, so muss $\mathfrak{a}_1$ durch $\bar{\mathfrak{a}}$ teilbar sein, weil $\mathfrak{a}_1$ der einzige minimale Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Daraus folgt ein Widerspruch $(r)\mathfrak{a}_1 = (0)$, $ra_1 = 0$; also muss $\mathfrak{a} = (0) : (r)$ sein.

Über Zerlegung der Ringe mit abgeschwächtem U-Satz.

In diesem Paragraphen werden wir einen Satz über direkte Summezerlegung der Ringe mit abgeschwächtem U-Satz beweisen, der ein gewisses Analogon zu dem Satz über die Zerlegung einer Gruppe als direktes Produkt(1) bildet. Zu diesem Zweck werden wir den Begriff der Zurückleitung(2) einführen.

(1) A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 2. Aufl. 133.
(2) K. Krull, loc. cit.

Sind $\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ die Darstellungen von $\mathfrak{R}$ als direkte Summe der Ideale aus $\mathfrak{R}$, und ist b ein Element aus $\mathfrak{b}$, so folgt daraus die eindeutige Darstellung von b

$$b = a_1 + a_2,$$

wo a_1 bzw. a_2 ein Element aus $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_2$ ist. Für das Element a_1 existiert auch infolge der Gleichung $\mathfrak{R} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ eine eindeutige Darstellung

$$a_1 = b^{(1)} + c^{(1)},$$

wo $b^{(1)}$ bzw. $c^{(1)}$ ein Element aus $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ ist. Da $b^{(1)}$ ein Element aus $\mathfrak{b}$ ist, so können wir in derselben Weise die eindeutigen Darstellungen

$$b^{(1)} = a_1^{(1)} + a_2^{(1)}, \qquad a_1^{(1)} = b^{(2)} + c^{(2)}$$

erhalten, wo $b^{(2)}$ auch ein Element aus $\mathfrak{b}$ ist. Indem wir auf diese Weise fortfahren, erhalten wir eine Folge der Elemente aus $\mathfrak{b}$

$$b, \ b^{(1)}, \ b^{(2)}, \ b^{(3)}, \ldots,$$

die durch das Element b eindeutig bestimmt ist. Diese Folge soll als die *Folge der Zurückleitungen des Elementes b hinsichtlich* $\mathfrak{a}_1$ bezeichnet werden. In der Tat können die folgenden speziellen Folgen der Zurückleitungen vorkommen:[1]

1. Wenn das Nullelement in der Folge auftritt, so heisst die Folge *endlich hinsichtlich* $\mathfrak{a}_1$.

2. Wenn ein Element ausser 0 und b in der Folge vielmal auftritt, so heisst die Folge *gemischt-periodisch hinsichtlich* $\mathfrak{a}_1$.

3. Wenn das erste Element b wieder in der Folge auftritt, so heisst die Folge *rein-periodisch hinsichtlich* $\mathfrak{a}_1$.[2]

Für die periodische Folge der Zurückleitungen gilt

Satz 13. *Sind $\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ zwei Darstellungen des Ringes $\mathfrak{R}$ als direkte Summe der Ideale aus $\mathfrak{R}$, und ist die Folge der Zurückleitungen jedes Elementes aus $\mathfrak{b}$ hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$ immer periodisch, oder endlich, so ist $\mathfrak{b}$ als direkte Summe der Ideale $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{e}$ darstellbar,*[3] *und dabei ist $\mathfrak{r}$ die Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{b}$, die eine rein-periodische Folge der Zurückleitungen hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$ haben, und $\mathfrak{e}$ die*

(1) S. Mori, Zusammenhang zwischen Primäridealen und Minimalidealen, dieses Journal **1** (1931), 101.

(2) Das Nullelement gehört den beiden Klassen 1 und 3.

(3) Das Ideal $\mathfrak{r}$, order $\mathfrak{e}$, kann Nullideal sein.

Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{b}$, *die eine endliche Folge der Zurückleitungen hinsichtlich* $\mathfrak{a}_1$ *besitzen.*

Ist die Folge der Zurückleitungen der Elementes b bzw. b' aus $\mathfrak{b}$ hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$

$$(1) \qquad b, b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, \ldots .$$

$$(2) \qquad b', b'^{(1)}, b'^{(2)}, b'^{(3)}, \ldots ,$$

so ist die Folge der Zurückleitungen des Elementes $b \pm b'$ aus $\mathfrak{b}$ hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$

$$(3) \qquad b \pm b', \quad b^{(1)} \pm b'^{(1)}, \quad b^{(2)} \pm b'^{(2)}, \ldots .$$

Sind (1) und (2) beide rein-periodisch (endlich), so ist (3) auch rein-periodisch (endlich). Es sei r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, dann ist die Folge der Zurückleitungen des Elementes rb aus $\mathfrak{b}$ hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$

$$(4) \qquad rb, rb^{(1)}, rb^{(2)}, \ldots .$$

Ist (1) rein-periodisch (endlich), so ist damit (4) auch rein-periodisch (endlich). Daraus folgt unmittelbar, dass die im Satz ausgesprochenen Gesamtheiten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{e}$ beide Ideale aus $\mathfrak{R}$, oder aus $\mathfrak{b}$, sind. Ferner haben die beiden Ideale $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{e}$ kein gemeinsames Element ausser dem Nullelement.

Es sei nun (1) gemischt-periodisch, aber nicht rein-periodisch. Also es seien alle $b, b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}, \ldots, b^{(m+n-1)}$ verschieden und

$$(5) \qquad b^{(m+x)} = b^{(m+x+n)} = b^{(m+x+2n)} = b^{(m+x+3n)} = \ldots .$$
$$(x = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Für die positiven ganzen Zahlen $m(\geqq 1)$ und $n(\geqq 1)$ können wir zwei positive ganze Zahlen s und t bestimmen, so dass

$$(6) \qquad sn = t+m, \quad s \geqq 1, \quad 1 \leqq t \leqq n$$

ist. Dann ist Element $b^{(t+m)}$ ein Element aus $\mathfrak{b}$ und besitzt die Folge der Zurückleitungen hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$

$$(7) \qquad b^{(t+m)}, \quad b^{(t+m+1)}, \ldots, \quad b^{(t+m+n)}, \ldots ,$$

wo nach (5) $b^{(t+m)} = b^{(t+m+n)} = b^{(t+m+2n)} = \ldots$ ist. Das Element $b - b^{(t+m)}$ besitzt die Folge der Zurückleitungen

$$(8) \qquad b-b^{(t+m)}, \quad b^{(1)}-b^{(t+m+1)}, \ldots\ldots, \quad b^{(sn)}-b^{(t+m+sn)}, \ldots\ldots$$

Nach (5) und (6) ist $b^{(sn)}-b^{(t+m+sn)} = b^{(t+m)}-b^{(t+m)} = 0$; also ist die Folge (8) endlich. Hiermit ist

$$b = (b-b^{(t+m)})+b^{(t+m)},$$

wo das Element $b-b^{(t+m)}$ aus $\mathfrak{b}$ die endliche Folge der Zurückleitungen (8) besitzt, und das Element $b^{(t+m)}$ die rein-periodische Folge der Zurückleitungen (7) hat. Daraus folgt unser Satz 13.

Satz 14. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein nilpotenter Ring mit abgeschwächtem U-Satz, und es seien $\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ die Darstellungen von $\mathfrak{R}$ als direkte Summe, und ferner sei die Ordnung jedes Elementes aus $\mathfrak{R}$ eine Potenz einer Primzahl p. Ist $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b} \neq (0)$, $\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b} \neq (0)$, so ist $\mathfrak{b}$ in eine direkte Summe von Idealen zerlegbar.*

Ein beliebiges Element b aus $\mathfrak{b}$ besitzt die Folge der Zurückleitungen hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$

$$(1) \qquad b, \ b^{(1)}, \ b^{(2)}, \ldots\ldots$$

Zunächst nehmen wir an, dass b ein Element aus dem Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ ist. Dann müssen alle Elemente der Folge (1) auch Elemente von $\mathfrak{t}$ sein. Da die Ordnung von b eine Potenz p^a der Primzahl p ist, so ist $p^a b = 0$, und folglich werden

$$(2) \qquad p^a b^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots\ldots).$$

Nach Satz 2 ist aber die Anzahl der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{t}$, deren Ordnung nicht grösser als p^a ist, endlich. Daraus folgt, dass die Folge (1) der Zurückleitungen des Elementes b periodisch, order endlich ist.

Zweitens sei b kein Element des Totalnullteilers $\mathfrak{t}$. In diesem Fall gilt auch die Beziehung (2). Nach Satz 1 existieren in der Folge (1) nur endlich viele inkongruente Elemente mod. $\mathfrak{t}$, und folglich existieren in der Folge (1) nur endlich viele verschiedene Elemente. In beiden Fällen ist damit die Folge (1) periodisch oder endlich. Da $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b} \neq (0)$ ist, so existiert in $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}$ ein von Null verschiedenes Element b, und die Folge der Zurückleitungen von b hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$ ist $b, b, b, \ldots\ldots$ Also ist die Folge rein-periodisch. Aus $\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b} \neq (0)$ folgt, dass für ein Element b' aus $\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b}$ die Folge der Zurückleitungen hinsichtlich $\mathfrak{a}_1$ $b', 0, 0, \ldots\ldots$ ist. Damit ist $\mathfrak{b}$ nach Satz 13 in eine direkte Summe zerlegbar.

Zunächst behandeln wir die direkte Summezerlegung eines speziellen Ringes $\mathfrak{R}$ derart, dass $\mathfrak{R}^2 = (0)$ ist, und wir beweisen von ihm den folgenden

Satz 15. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz, und es sei $\mathfrak{R}^2 = (0)$. Sind zwei verschiedene Zerlegungen von $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe der unzerlegbaren Ideale gegeben, so ist die Anzahl der Ideale gleich, und zu jedem Ideale der einen Zerlegung gibt es ein Ideal der anderen, das mit ihm ring-isomorph ist.*[1]

Ist $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe zerlegbar, so ist $\mathfrak{R}$ als eine direkte Summe der Ringe $\mathfrak{R}_i$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_m$$

darstellbar, wo $\mathfrak{R}_i$ die Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{R}$, deren Ordnung eine Potenz einer Primzahl p_i ist, bedeutet, und die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ von einander verschieden sind. Aber $\mathfrak{R}$ lässt sich nur auf eine Weise in eine solche direkte Summe zerlegen. Es sei somit im folgenden die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{R}$ eine Potenz der Primzahl p. Es sei

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \dots + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}'_1 + \mathfrak{a}'_2 + \dots + \mathfrak{a}'_s,$$

wo alle Ideale $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}'_j$ in eine direkte Summe unzerlegbar sind. Nach Satz 2 besitzt jedes Ideal aus $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}'_j$ nur $p-1$ verschiedene Elemente von der Ordnung p. Bezeichnen wir mit λ die Anzahl aller Elemente aus $\mathfrak{R}$ von der Ordnung p, so ist damit $\lambda = p^r - 1 = p^s - 1$, und daher folgt $r = s$.

Es folgt aus der Struktur $\mathfrak{a}_i$, dass die Gesamtheit $\bar{\mathfrak{a}}_i$ der p^a-maligen Summe aller Elemente von $\mathfrak{a}_i$ auch in eine direkte Summe unzerlegbar ist. Nun seien $p^{m_1}, \dots, p^{m_r}, p^{n_1}, \dots, p^{n_s}$ die Anzahl der Elemente der Ideale $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}'_1, \dots, \mathfrak{a}'_s$. Hier können wir die Ideale so numerieren, dass $m_1 \geqq m_2 \geqq \dots \geqq m_r$, $n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_s$ sind, und dabei können m_i, n_j unendlich sein. Sind m_i und n_j beide unendlich, so setzen wir $m_i = n_j$. Es sei n_k die erste unter diesen Zahlen, welche von der entsprechenden m_k verschieden ist, also sei $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2, \dots,$ $m_{k-1} = n_{k-1}$, $m_k < n_k$. Die p^{m_k}-malige Summe aller Elemente von $\mathfrak{a}_i$ bzw. $\mathfrak{a}'_j$ bildet das Ideal $\bar{\mathfrak{a}}_i$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}'_j$, und wir erhalten daher

(1) Ist der Ring $\mathfrak{R}$ auf einem anderen Ringe $\overline{\mathfrak{R}}$ umkehrbar eindeutig abgebildet, und wenn bei dieser Abbildung Differenz und Produkt sich entsprechen, so heissen die Ringe *ring-isomorph.*

$$\overline{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{a}}_1 + \ldots\ldots + \bar{\mathfrak{a}}_{k-1} = \bar{\mathfrak{a}}_1' + \ldots\ldots + \bar{\mathfrak{a}}_k',$$

wobei alle $\bar{\mathfrak{a}}_i$, $\bar{\mathfrak{a}}_j'$ in eine direkte Summe unzerlegbar sind. Ist σ die Anzahl aller Elemente aus $\overline{\mathfrak{R}}$ von der Ordnung p, so muss damit $\sigma = p^{k-1}-1 = p^k-1$ sein, und wir erhalten einen Widerspruch. Also muss $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2, \ldots\ldots, m_r = n_r$ sein. Wenn $m_i = n_i$ ist, so ist $\mathfrak{a}_i$ nach seiner Struktur mit $\mathfrak{a}_i'$ ring-isomorph, obgleich m_i unendlich ist, und daher folgt der Satz 15.

Im allgemeinen Fall lautet nun der zum Fundamental Satz[1] bei zerlegbaren Gruppen analogische

Satz 16. *Sind zwei verschiedene direkte Summezerlegungen eines Ringes mit abgeschwächtem U-Satz in unzerlegbare Ideale gegeben, so ist die Anzahl der unzerlegbaren Ideale gleich, und zu jedem Ideal der einen Zerlegung gibt es ein unzerlegbares Ideal der anderen, das mit ihm ring-isomorph ist.*

Falls der Ring $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz keinen Nullteiler besitzt, so ist $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe unzerlegbar, und der Satz ist evident. Es sei also $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Nullteiler. Dann wird $\mathfrak{R}$ eine direkte Summe eines nilpotenten Rings und eines Rings mit Einheitselement.[2] Aber der Ring mit Einheitselement ist in eine direkte Summe eindeutig zerlegbar. Ein nilpotenter Ring ist auf eine und nur eine Weise die direkte Summe der Ideale, bestehend aus allen Elementen, deren Ordnung Potenzen verschiedener Primzahlen sind. Im Fall $\mathfrak{R}^2 = (0)$ ist unser Satz schon bewiesen.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ ein nilpotenter Ring, bestehend aus allen Elementen, deren Ordnung Potenzen einer Primzahl p sind. Es sei ferner $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ und

$$(1) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{b}_s,$$

wobei alle $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j$ unzerlegbar sind. Da $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ ist, so existiert in einem der unzerlegbaren Ideale $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{b}_s$, etwa $\mathfrak{b}_1$, ein Element b_1, das nicht dem Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{R}$ gehört. Das Element b_1 lässt sich nach (1) auf eine und nur eine Weise als Summe der Elemente aus $\mathfrak{a}_i$

$$(2) \qquad b_1 = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_r$$

(1) A. Speiser, loc. cit.

(2) S. Mori, Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz, dieses Journal **3** (1933), 284.

darstellen, und dabei ist wenigstens ein Element aus $a_1, \ldots, a_r$, etwa a_1, nicht im Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ enthalten. Aus $\mathfrak{N}(a_1) \neq (0)$ folgt $a_1 a_1' \neq 0$ für ein Element a_1' aus $\mathfrak{a}_1$, und daher ergibt sich auch $b_1 a_1' \neq 0$. Die Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ besitzen damit ein von Null verschiedenes gemeinsames Element $b_1 a_1'$, also ist $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$. Ist nun eines aus $a_2, a_3, \ldots. a_r$, etw a_2, nicht im Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ enthalten, so folgt aus $\mathfrak{N}(a_2) \neq (0)$ auch $a_2 a_2' = b_1 a_2' \neq 0$ für ein Element a_2' aus $\mathfrak{a}_2$. Hieraus folgt $\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$ und nach Satz 14 muss $\mathfrak{b}_1$ in eine direkte Summe zerlegbar sein, womit wir einen Widerspruch erhalten. Daraus folgt

1. *In der Darstellung* (2) *von b_1 ist ein und nur ein Element a_1 nicht in $\mathfrak{t}$ enthalten, und alle anderen a_i sind in $\mathfrak{t}$ enthalten, wenn b_1 nicht zu $\mathfrak{t}$ gehört.*

Ist p^n die Ordnung von b_1, so folgt aus (2) $p^n a_1 = 0, \ldots, p^n a_r = 0$. Ist $p^{n'}$ die Ordnung von a_1, so muss damit $n' \leqq n$ sein. Ist $n' < n$, so ist nach (2) $p^{n'} b_1 = p^{n'} a_2 + \ldots. + p^{n'} a_r \neq 0$. Also ist $\mathfrak{a}_2 + \ldots. + \mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$. Da aber $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$ ist, so ist $\mathfrak{b}_1$ nach Satz 14 in eine direkte Summe zerlegbar, was unser Voraussetzung widerspricht. Daraus folgt

2. *In der Darstellung* (2) *ist die Ordnung von b_1 gleich mit der Ordnung von a_1, wenn $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$ ist.*

Ist $\bar{b}_1 = a_1 + \bar{a}_2 + \ldots. + \bar{a}_r$ für ein Element $\bar{b}_1$ aus $\mathfrak{b}_1$, so folgt aus (2) $b_1 - \bar{b}_1 = a_2 - \bar{a}_2 + \ldots. + a_r - \bar{a}_r$. Da $\mathfrak{b}_1$ aber unzerlegbar ist, so soll $b_1 - \bar{b}_1 = 0$ sein. Daher ergibt sich

3. *Bei der Zuordnug* (2) *entsprechen zwei verschiedenen Elementen von $\mathfrak{a}_1$ immer zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{b}_1$, wenn $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$ ist.*

Nach (1) können wir auch das Element a_1 aus $\mathfrak{a}_1$ auf eine und nur eine Weise als Summe der Elemente aus $\mathfrak{b}_i$

$$a_1 = b_1' + b_2' + \ldots. + b_s' \tag{3}$$

darstellen, wo b_i' ein Element aus $\mathfrak{b}_i$ ist. Aus $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 \neq (0)$ folgen ganz genau wie beim obigen Falle die obigen Eigenschaften 2 und 3 für jedes Element aus $\mathfrak{a}_1$. *Nach der Beziehung* (2) *ordnen wir einem beliebigen Element b_1 aus $\mathfrak{b}_1$ das Element a_1 aus $\mathfrak{a}_1$ zu.* Es sei nun *a_1' ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}_1$*, dann ist die Ordnung p^N von a_1' endlich. Betrachten wir die Gesamtheit $\bar{\mathfrak{b}}_1$ aller Elemente aus $\mathfrak{b}_1$, deren Ordnung nicht grösser als p^N ist, so ist $\bar{\mathfrak{b}}_1$ ein endliches Ideal, und die Gesamtheit $\bar{\mathfrak{a}}_1$ aller nach (2) den Elementen aus $\bar{\mathfrak{b}}_1$ entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{a}_1$ bildet ein Ideal aus $\mathfrak{a}_1$. Dabei ist $\bar{\mathfrak{b}}_1$ mit $\bar{\mathfrak{a}}_1$ ringisomorph. Da nach der Eigenschaft 2 die Ordnung jedes Elementes aus $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_1$ nicht grösser als p^N ist, so ist $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_1$ in der Gesamtheit $\bar{\mathfrak{a}}_1$ aller Elemente aus $\mathfrak{a}_1$, deren Ordnung nicht grösser als p^N ist, enthalten. Das nach (3) zu $\bar{\mathfrak{a}}_1$ entsprechende Ideal $\bar{\bar{\mathfrak{b}}}_1$ aus $\mathfrak{b}_1$ ist in $\bar{\mathfrak{b}}_1$ enthalten. Da $\bar{\mathfrak{a}}_1$ und $\bar{\mathfrak{b}}_1$ beide endlich sind, so muss damit $\bar{\mathfrak{a}}_1 = \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_1$ sein. Bei der Zuordnung (2) gibt es damit in $\mathfrak{b}_1$ ein Element, das einem *beliebig gegebenen Element* a_1' aus $\mathfrak{a}_1$ entspricht. Hiermit ist $\mathfrak{b}_1$ nach der Zuordnung (2) mit $\mathfrak{a}_1$ ring-isomorph.

Auf solche Weise können wir in der Zerlegung (1) beweisen, dass die Anzahl der Ideale $\mathfrak{a}_i$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}_i^2 \neq (0)$ gleich mit der Anzahl der Ideale $\mathfrak{b}_i\left(\mathfrak{b}_i^2 \neq (0)\right)$ ist, und dass jedes $\mathfrak{a}_i\left(\mathfrak{a}_i^2 \neq (0)\right)$ mit einem $\mathfrak{b}_i\left(\mathfrak{b}_i^2 \neq (0)\right)$ ring-isomorph ist. Es sei damit $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mit $\mathfrak{b}_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ ring-isomorph, und es seien $\mathfrak{a}_{k+1} + \ldots + \mathfrak{a}_r$ und $\mathfrak{b}_{k+1} + \ldots + \mathfrak{b}_s$ im Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{R}$ enthalten. Dabei besitzen die Ideale $\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{b}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{b}_s$ die im Satz 2 ausgesprochene erste Struktur. Wenn wir die Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{R}$ von der Ordnung p bilden, so folgt daraus leicht $r = s$. Wir bilden die Gesamtheit $\bar{\mathfrak{a}}_i$ bzw. $\bar{\mathfrak{b}}_i$ der p^n-maligen Summe aller Elemente aus $\mathfrak{a}_i$ bzw. $\mathfrak{b}_i$. Dann wird

$$\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{a}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{a}}_k + \ldots + \bar{\mathfrak{a}}_r = \bar{\mathfrak{b}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{b}}_k + \ldots + \bar{\mathfrak{b}}_r,$$

wo die Ideale $\bar{\mathfrak{a}}_{k+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_r$, $\bar{\mathfrak{b}}_{k+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{b}}_r$ Nullideal, order von der im Satz 2 ausgesprochenen ersten Struktur sind. Ferner ist $\bar{\mathfrak{a}}_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ mit $\bar{\mathfrak{b}}_i$ ring-isomorph. Wenn wir die Gesamtheit aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{R}}$ von der Ordnung p betrachten, so können wir leicht beweisen, dass die Anzahl der nicht-verschwindenden Ideale aus $\bar{\mathfrak{a}}_{k+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_r$ gleich mit der Anzahl der vom Nullideal verschiedenen Ideale aus $\bar{\mathfrak{b}}_{k+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{b}}_r$ ist. Es seien $p^{m_{k+1}}, \ldots, p^{m_r}$ und $p^{n_{k+1}}, \ldots, p^{n_r}$ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{a}_r$ und $\mathfrak{b}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{b}_r$, so stimmen damit diese zwei Reihen in ihrer Gesamtheit, aber nicht notwendig in ihrer Reihenfolge, überein. Sind zwei Zahlen, etwa m_{k+1}, n_{k+1}, unendlich, so sehen wir sie als gleich an. Wenn $m_{k+1} = n_{k+1}$ ist, so ist $\mathfrak{a}_{k+1}$ mit $\mathfrak{b}_{k+1}$ ring-isomorph, denn $\mathfrak{a}_{k+1}$ und $\mathfrak{b}_{k+1}$ sind im Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{R}$ enthalten und von der im Satz 2 ausgesprochenen Struktur. Also ist der Satz in allen Teilen vollständig bewiesen.

Es sei $\mathfrak{t}$ der Totalnullteiler eines Rings $\mathfrak{R}$. Dann heissen zwei ring-isomorphe Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{R}$ *ring-isormorph in bezug auf* $\mathfrak{t}$, wenn es eine ring-isomorphe Zuordnung $a \to a'$ der Elemente von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gibt, derart, dass $a - a' \equiv 0\ (\mathfrak{t})$ ist.

Stellen wir diese Definition auf, so folgt nach der Eigenschaft I bei der Zuordnung (2) im Beweise des vorigen Satzes

Satz 17. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz, und es sei* $\mathfrak{t}$ *der Totalnullteiler von* $\mathfrak{R}$. *Sind zwei verschiedene Zerlegungen von* $\mathfrak{R}$ *in eine direkte Summe der unzerlegbaren Ideale gegeben, so ist die Anzahl der Ideale gleich, und zu jedem Ideal der einen Zerlegung gibt es ein Ideal der anderen, das mit ihm ring-isomorph in bezug auf* $\mathfrak{t}$ *ist.*