Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I—Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles.

Par

Kiyosi OKA.

(Reçu Mai 1, 1936.)

Introduction.—Malgré le progrès récént de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, diverses choses importantes restent plus ou moins obscures, notamment: le type de domaines dans lesquels le théorème de Runge ou ceux de M. P. Cousin subsistent, la relation entre la convexité de M. F. Hartogs et celle de MM. H. Cartan et P. Thullen[1]; parmi eux il y a des relations intimes. C'est à traiter ces problèmes que le présent mémoire et ceux qui suivront, sont destinés.

Or, je m'aperçois que l'on peut parfois diminuer la difficulté de ces problèmes, en élevant à dimensions convenables les espaces où l'on s'occupe. Dans le présent mémoire, en réalisant l'idée générale pour un cas particulier, je vais montrer un principe qui réduit les domaines du titre aux domaines cylindriques à dimensions plus élevées, pour ainsi dire. (Pour la forme concrète, voir le problème I de No. 1.)

Lorsque le principe est établi une fois, on peut en déduire que le théorème de M. P. Cousin concernant les pôles donnés reste valable dans les domaines du titre. (Pour la forme exacte, voir le théorème I de No. 5.) La réciproque est aussi vraie. Actuellement, je vais démontrer ces théorèmes à la fois d'après le procédé de récurrence. On retrouvera, d'ailleurs, à l'aide du principe ci-dessus, immédiatement le théorème de Runge pour les domaines du titre, qui fut exposé par M. A. Weil.[2]

Je m'occupe ainsi, pour le présent mémoire, dans l'intérieur des domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles; cela est en

---

(1) Voir l'Ouvrage de MM. H. Behnke et P. Thullen: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, spécialement aux pages 54, 68, 79.

(2) Sur les séries de polynomes de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris, 1932.

L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Annalen, 1935.

même temps pour fournir les recherches moins restrictives des lemmes qui me sont indispensables.[1]

1. Définitions.—Dans l'espace $((x))$ des n variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérons la région[2] Δ définie par

$$(\Delta) \qquad x_i \in X_i, \quad R_j((x)) \in Y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,\nu),$$

où X_i, Y_j sont des domaines[3] bornés et univalents (schlicht) sur le plan, et $R_j((x))$ des fonctions rationnelles. Toute région que l'on peut exprimer en forme pareille, sera dite pour simplifier la langue, *d'appartenir à* (Ω_0). Etant donnée une région de (Ω_0) dans l'espace $((x))$, nous appelons *l'ordre de la région* le minimum des nombres de fonctions rationnelles des n variables x_i, par lesquelles on puisse définir la région, les fonctions x_i étant exclues. L'ordre de la région Δ est $\leqq \nu$; toute région de (Ω_0) de l'ordre nul est un domaine cylindrique. Il est commode de donner ici les problèmes à traiter en forme concrète.

Problème I.—En introduisant les nouvelles variables complexes $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, considérons l'espace $((x, y))$, et dans lequel la multiplicité Σ définie par

$$(\Sigma) \qquad y_j = R_j((x)), \quad ((x)) \in \Delta, \qquad (j=1,2,\ldots,\nu).$$

La frontière de la multiplicité Σ se situe entièrement sur le contour du domaine cylindrique,

$$(C) \qquad x_i \in X_i, \quad y_j \in Y_j, \qquad (i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,\nu).$$

Soit $f((x))$ une fonction holomorphe des n variables x_i dans Δ[4]; regardons la de nouveau comme fonction des $n+\nu$ variables x_i, y_j, elle est holomorphe en tout point M, $((x^0, y^0))$ sur Σ, puisque $((x^0))$ est nécessairement un point de Δ.

Dans ces conditions, *construire une fonction holomorphe dans* (C'), *admettant la valeur donnée* $f(M)$ *pour tout point* M *sur la portion de* Σ *dans* (C'), (C') étant un domaine donné dans l'intérieur à (C).

(1) Pour la généralisation du théorème de M. Cousin, je pense que l'on peut aussi y parvenir à partir de l'intégrale de M. A. Weil, cité ci-dessus.

(2), (3). Un ensemble ouvert sera dit dans la suite, distinctivement domaine ou région, suivant qu'il est certainement connexe ou non; on sous-entend que les régions (domaines) du mémoire actuel sont univalentes, sans exception.

(4) Lorsque la région Δ est formée de plusieurs composantes connexes, $f((x))$ peut naturellement se composer des fonctions analytiques distinctes.

Nous l'appelons *problème I d'ordre* ν, dont ν est la moitié de la différence entre le nombre des dimensions de l'espace $((x, y))$ est celui de la multiplicité Σ. L'ordre commence cette fois-ci, de 1.

Problème II.—Nous donnons dans la région Δ des pôles $(\mathfrak{p})$ par la méthode habituelle, à savoir que: En faisant correspondre à tout point P de Δ, un polycylindre (γ) et une fonction $g((x))$ qui y est méromorphe, de façon que, pour toute partie commune des (γ), les fonctions attachées $g((x))$ soient équivalentes mutuellement par rapport à soustraction; nous définissons les pôles $(\mathfrak{p})$ localement par ceux des fonctions $g((x))$. Alors, voici le problème:

Trouver une[1] *fonction méromorphe admettant les pôles* $(\mathfrak{p})$ *donnés, pour une région* Δ' *donnée à priori dans l'intérieur à* Δ.

Ceci sera appelé *problème II d'ordre* μ, μ étant l'ordre de Δ. On sait bien grâce à M. *P. Cousin*,[2] que le problème II de l'ordre nul est résoluble.

2. Réduction du problème I.—Nous allons montrer d'abord que:

Si les problèmes I et II sont résolubles pour tout ordre $<\nu$, *le problème I reste résoluble pour l'ordre* ν.

En effet, nous supposons que l'on peut résoudre les problèmes I et II pour tout ordre $<\nu$. Nous prenons pour la forme exacte du problème I d'ordre ν, ce qui est donné au numéro précédent. Dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_\nu)$, considérons la région,

$$(D) \qquad x_i \in X_i, \qquad y_\nu \in Y_\nu,$$
$$R_k((x)) \in Y_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \nu-1),$$

et la multiplicité,

$$(S) \qquad y_\nu = R_\nu((x)), \qquad ((x)) \in \Delta.$$

On trouve que toute la frontière de la multiplicité S est supportée sur le contour de D.

Nous faisons attacher à tout point de la région D, une fonction $g((x), y_\nu)$ des $n+1$ variables x_i, y_ν, de telle manière que:

1°. Pour tout point P en dehors de la multiplicité S,

---

(1) Même usage du mot que précédent.

(2) Acta, 1895.

$$g((x), y_\nu) = 0\,.$$

2°. Pour tout point M sur S,

$$g((x), y_\nu) = \frac{f((x))}{Q((x))\cdot y_\nu - P((x))}\,,$$

où $P((x))$ et $Q((x))$ signifient des polynomes des x_i rélativement primes (au sens algébrique), telles que $R_\nu((x)) = P((x))/Q((x))$.

Nous allons délimiter chacune des fonctions g dans un polycylindre (γ). Pour tout point P en dehors de S, il nous suffit d'attacher un (γ) de centre P, qui ne contienne aucun point de S. Soit ensuite M un point quelconque sur S; il y a deux choses auxquelles nous devons faire attention: 1°. Il faut choisir un polycylindre autour M, pour lequel la fonction f reste holomorphe. Ce qui est possible, puisque f est holomorphe dans la région $\varDelta$, et de l'autre côté, si les coordonnées de M sont $((x^0), y_\nu^0)$, $((x^0))$ appartient toujours à $\varDelta$. 2°. Soit T la portion intérieure à D, de la multiplicité $Q((x))y_\nu - P((x)) = 0$; pour tout point M', $((x'), y_\nu')$ sur T, il y a deux cas possibles: ou bien M' est un point de S, ce qui entraine que $((x'))$ appartient à $\varDelta$, ou bien $((x'))$ est un point d'indétermination de $R_\nu((x))$, alors $((x'))$ ne tombe jamais dans $\varDelta$. Or, il faut éviter les deuxièmes points M'. Cela est toujours atteint. Car, tous ces points sont situés nécessairement à distance non nulle par rapport à M, d'après ce que nous avons vu. Pour tout point M sur S, nous attacherons ainsi un polycylindre (γ) de centre M, remplissant ces deux conditions.

Les fonctions $g((x), y_\nu)$ ainsi définies sont méromorphes dans leurs propres polycylindres (γ), et satisfont mutuellement la condition d'équivalence. Elles définissent donc, comme ensemble les pôles $(\mathfrak{p})$ dans D. Tous les pôles $(\mathfrak{p})$ sont d'ailleurs supportés sur S. Or, la région D de l'espace $((x), y_\nu)$ appartient évidemment à $(\varOmega_0)$, dont l'ordre ne surpasse pas $\nu-1$. Il existe donc, d'après l'hypothèse, une fonction $G((x), y_\nu)$ méromorphe dans D', admettant $(\mathfrak{p})$ pour pôles, D' étant une région complètement intérieure à D, dont la forme exacte sera donnée plus tard.

Posons

$$\varphi((x), y_\nu) = G((x), y_\nu)\,[Q((x))y_\nu - P((x))]\,.$$

Pour la fonction φ ainsi acquise, il est immédiatement verifié qu'elle est holomorphe dans D', et de plus que

$$\varphi[(x), R_\nu((x))] = f((x))\,,$$

pour tout point sur S, dans D'.[1]

Pour D', nous prenons la région

$$(D') \qquad x_i \in X'_i\,, \quad y_\nu \in Y'_\nu\,,$$
$$R_k((x)) \in Y'_k\,, \qquad (i=1,2,\ldots,n\,;\ k=1,2,\ldots,\nu-1),$$

X'_i, Y'_j étant $(n+\nu)$ domaines complètement intérieurs à X_i, Y_j, respectivement, et cela de telle façon que le domaine cylindrique

$$x_i \in X'_i\,, \qquad y_j \in Y'_j \qquad (i=1,2,\ldots,n\,;\ j=1,2,\ldots,\nu),$$

contienne le domaine donné (C'), avec sa frontière.

Nous voulons construire une fonction F des $n+\nu$ variables x_i, y_j holomorphe dans (C'), telle que

$$F[x_1,\ldots,x_n, R_1((x)),\ldots, R_{\nu-1}((x)), y_\nu] = \varphi(x_1,\ldots,x_n, y_\nu)\,,$$

sur la portion intérieure à (C') de la multiplicité, $y_k = R_k((x))$, $(k=1,2,\ldots,\nu-1)$. Telle fonction $F((x,y))$ existe certainement, d'après l'hypothèse. Car, ce n'est qu'un problème I d'ordre $\nu-1$.

Or, pour tout point M, $((x,R))$ sur la multiplicité Σ, dans (C'), on a

$$F[x_1,\ldots,x_n, R_1((x)),\ldots, R_\nu((x))] = \varphi[x_1,\ldots,x_n, R_\nu((x))]$$
$$= f(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

La fonction $F((x,y))$ est donc, la solution cherchée. C. Q. F. D.

Remarquons d'ailleurs que *le problème 1 d'ordre 1 est résoluble.*

3. Réduction du problème II. Conclusion. Il s'agit maintenant du problème II. Pour appliquer la méthode classsique de M. P. Cousin au cas actuel, voici une difficulté à vaincre. Il s'agit de construire une fonction admettant la coupure donnée pour nos régions, exactement:

Problème A.—Reprenant la région Δ de No. 1, nous traçons une courbe de Jordan simple et rectifiable L dans le domaine X_1 du plan x_1, dont les extrémités sont a, b; soit T l'ensemble de points $((x))$ satisfaisant à $x_1 \in L$, $((x)) \in \Delta$. Soit Δ' une région quelconque à l'intérieur de Δ, T' la partie de T contenue dans Δ'.

(1) Je dois l'idée à M. H. Cartan pour ce mode d'application du théorème de M. Cousin. Voir: Sur les fonctions de deux variables complexes. Bull. Sci. math. 1930.

Dans ces circonstances, étant donnée une fonction $f((x))$ des n variables x_i, bien déterminée et holomorphe au voisinage d'un point quelconque de T, *trouver une fonction* $\varphi((x))$ *des* n *variables* x_i, *bien déterminée et holomorphe en tout point dans* Δ', *sauf à* T', *et admettant pour* T' *une coupure du caractère suivant :*

1°. Traversant T', excepté pour $x_1 = a, b, \varphi((x))$ permet le prolongement analytique, et cela de façon que

$$\varphi((x)) - \psi((x)) = \pm f((x)),$$

$\psi((x))$ étant la nouvelle fonction, le signe + ayant lieu pour $((x))$ au côté gauche de T'. On entend par là, que le point x_1 est au côté gauche de la courbe L tracée de a à b.

2°. Au voisinage d'un point quelconque sur $x_1 = b$, dans Δ', le prolongement analytique de la fonction

$$\varphi((x)) - \frac{f((x))}{2\pi i} \log (b - x_1)$$

reste holomorphe. Pour $x_1 = a$, il n'y a qu' à remplacer le logarithme par. $-\log (a - x_1)$.

Ceci sera appelé problème A d'ordre μ, μ étant l'ordre de Δ. On verra alors que :

S'il est possible de résoudre tout problème I d'ordre $\leqq \nu$, *on peut résoudre tout problème A d'ordre* $\leqq \nu$.

Pour l'effet, nous allons démontrer que le problème A formulé ci-dessus a nécessairement des solutions, sous l'hypothèse que tout problème I d'ordre $\leqq \nu$ est résoluble. Ceci est suffisant. Car, quoique l'ordre du problème peut être inférieur à ν, on peut ramener à cette forme tout problème A ayant l'ordre égal à ν. Nous supposons pour la clarté que la région donnée Δ' est de la forme

$$(\Delta') \qquad x_i \in X'_i, \qquad R_j((x)) \in Y'_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n ; j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Nous faisons correspondre à la région Δ, le domaine cylindrique (C) et la multiplicité Σ dans l'espace $((x, y))$, d'après la méthode de No. 1. Soient (C'), Σ' ceux qui correspondent à Δ'.

La fonction $f((x))$ étant bien définie et holomorphe au voisinage d'un point quelconque sur T', pour toute région donnée à l'intérieur de Δ, on peut trouver un domaine G contenant L, de façon que $f((x))$ soit holomorphe en tout point commun de la région donnée et le domaine $x_1 \in G$. Nous supposons pour la simplicité, qu'il en est ainsi pour Δ même. Ce qui ne diminue pas de généralité, puisque Δ' est contenue avec sa frontière dans Δ. Nous supposons d'ailleurs que

$$L < G' < G < X_1',$$

dont G' est un domaine donné de nouveau dans l'intérieur à G; ceci est encore atteint, sans perdre la généralité.

Dans ces conditions, nous voulons trouver une fonction $F((x, y))$ des $n+\nu$ variables x_i, y_j, holomorphe dans la partie commune de (C') et $x_1 \in G'$, et admettant la valeur $f((x))$ pour tout point $((x, y))$ sur Σ' appartenant à $x_1 \in G'$. Cela étant un problème I d'ordre ν, $F((x, y))$ existe d'après l'hypothèse.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\Phi((x, y)) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)}{t - x_1} dt,$$

prise suivant la courbe L sur le plan x_1, de a à b. La région où la fonction holomorphe $F((x, y))$ est définie, n'est que le domaine cylindrique

$$x_1 \in G', \qquad x_k \in X_k', \qquad y_j \in Y_j'. \qquad (k = 2, 3, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont G' contient L. La propriété de l'integrale $\Phi((x, y))$ est donc, bien connue grâce à M. P. Cousin.[1] C'est ainsi:

Soit U' l'ensemble de points tels que $x_1 \in L$, $((x, y)) \in (C')$; l'intégrale $\Phi((x, y))$ a un sens, et représente une fonction holomorphe en tout point de (C'), sauf à U', où elle jouit d'une certaine propriété; pour l'exprimer, il suffit de modifier les conditions (1°, 2°) auxquelles la fonction demandée $\varphi((x))$ doit satisfaire, en remplaçant

$$\Delta', \qquad T', \qquad \varphi((x)), \qquad \psi((x)), \qquad f((x)),$$

par

$$(C'), \qquad U', \qquad \Phi((x, y)), \qquad \Psi((x, y)), \qquad F((x, y)),$$

respectivement.

Or, quand $((x))$ décrit Δ', le point M de l'espace $((x, y))$, ayant les coordonnées $x = x_i$, $y_j = R_j((x))$, trace la multiplicité Σ'. Posons donc,

$$\varphi((x)) = \Phi(M).$$

(1) Voir p. e.: Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* II_1 (1929), § 22 de Chap. III.

La fonction $\varphi((x))$ est alors bien définie dans Δ', excepté à T', en sorte que elle représente une fonction holomorphe des n variables x_i au voisinage de chacun de ces points. Comme d'ailleurs, près de U',

$$f((x)) = F(M),$$

pour tout point M sur Σ', des propriétés de $\Phi((x, y))$ à U', il en résulte immédiatement les propriétés cherchées de $\varphi((x))$ pour T'. $\varphi((x))$ est donc, une solution du problème. C. Q. F. D.

Il nous reste à démontrer que l'on peut résoudre tout problème II d'ordre $\leqq \nu$, sous l'hypothèse que tout problème A d'ordre $\leqq \nu$ a des solutions. Mais, cette fois-ci, la méthode classique étant applicable presque littéralement,(1) nous nous contentons d'y renvoyer le lecteur.(2)

Nous avons ainsi la proposition que: si tout problème I d'ordre $\leqq \nu$ est résoluble, on peut résoudre tout problème II d'ordre $\leqq \nu$.

Des deux propositions auxiliaires, il en résulte que:

Conclusion.—Les problèmes I, II de No. 1 sont toujours résolubles.

4. Remarques sur les développements.—Nous nous occuperons dans la suite de compléter la proposition précédente. Dans ce but, nous commençons par nous servir de quelques connaissances sur les développements des fonctions.

1°. Considérons d'abord un domaine Δ à l'espace $((x))$, de la forme

$$(\Delta) \qquad |x_i| < r_0, \qquad |R_j((x))| < 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où $R_j((x))$ expriment des fonctions rationnelles des x_i, r_0 étant une constante positive. Si l'ensemble des points définis par ces inégalités, est constitué de plusieurs composantes connexes, on entend par Δ l'une d'elles. Pour tel domaine, on sait d'après *M. A. Weil* que toute fonction holomorphe est développable en série de fonctions rationnelles.(3) Or, ceci est une conséquence immédiate du principe que nous venons d'établir.

(1) Toutes les modifications nécessaires sont de la seule forme suivante: au lieu de considérer « un domaine cylindrique (d), $x_p \in (a_p)$, $x_q \in A_q$, $(p = 1, 2, \ldots, \lambda;\ q = \lambda+1, \lambda+2, \ldots, n)$, dans le domaine cylindrique donné (D), $x_i \in A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ », on doit considérer au présent cas, « la partie commune de (d) et la région donnée Δ, (D) étant, cette fois-ci, un domaine cylindrique quelconque contenant Δ ».

(2) Osgood: § 23, 24 de Chap. III.

(3) Cité plus haut.

En effet, étant donnée une fonction holomorphe $f((x))$ dans le domaine Δ, on peut trouver pour tous $0 < r < r_0$, $0 < \rho < 1$, une nouvelle fonction $F((x, y))$ holomorphe dans le polycylindre

$$(C') \qquad |x_i| < r, \qquad |y_j| < \rho, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

de façon que pour tout point M de (C') ayant les coordonnées de la forme $x_i = x_i$, $y_j = R_j((x))$, on ait

$$F(M) = f((x)).$$

La fonction $F((x, y))$ est développable autour de l'origine en série de Taylor valable au moins pour (C'). D'où, en posant $y_j = R_j((x))$ dans le développement, on obtient une série de fonctions rationnelles convergeant uniformément vers $f((x))$ dans l'intérieur à Δ',

$$|x_i| < r, \qquad |R_j((x))| < \rho, \qquad ((x)) \in \Delta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Plus précisèment, tout terme de la série est un polynome par rapport à x_i, $R_j((x))$. De là, il en résulte pour Δ même, un développement de $f((x))$ de la même nature.

2°. Considérons ensuite un domaine borné D à l'espace $((x))$, convexe par rapport à une classe $\mathfrak{K}$ de fonctions rationnelles des n variables x_i holomorphes dans D.[1] D est alors, nécessairement univalent. Soit D' un domaine quelconque à l'intérieur de D, soit δ la «Minimaldistanz» de D' par rapport à D; $\delta > 0$. Considérons dans D, l'ensemble de points Σ, dont la «Randdistanz» d'un point quelconque soit égale à $\delta/2$ par rapport à D. A tout point M sur Σ, il correspond toujours au moins une fonction f de $\mathfrak{K}$, telle que

$$|f(M)| > 1,$$

et de l'autre côté

$$|f| < 1 \qquad \textit{pour } D'$$

soit (γ) un polycylindre autour M, intérieur à D, et pour lequel $|f| > 1$. Ainsi, tout point M de l'ensemble fermé Σ est le centre de (γ) jouissant de la propriété. Nous pouvons donc recouvrir Σ, avec un nombre fini de (γ), d'après le lemme de Borel-Lebesgue.

Soit $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ les fonctions de $\mathfrak{K}$, correspondant à ces (γ). Considérons dans D, l'ensemble de points satisfaisant à

(1) MM. H. Cartan et P. Thullen: Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Annalen, 1932.

$$|f_j((x))| < 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Parmi les composantes connexes de l'ensemble, on trouve toujours l'une qui comprend D', que nous dénotons par Δ. La frontière de Δ est encore contenue dans D, puisque le domaine Δ ne peut s'étendre au delà de Σ.

Nous pouvons ainsi faire correspondre à tout domaine D' complètement intérieur à D, un domaine Δ du caractère indiqué. Ceci reste légitime pour un domaine non borné, pourvu que le domaine ne comprenne que des points à distance finie; dont la vérification est immédiate. Nous avons donc, d'après ce qui précède, la proposition suivante:

Soit D un domaine à l'espace $((x))$ au sens propre, convexe par rapport à une classe $\mathfrak{R}$ de fonctions rationnelles des n variables x_i holomorphes dans D. Toute fonction holomorphe dans le domaine est développable en série de fonctions rationnelles convergeant uniformément à l'intérieur de D, et cela de telle manière que le terme général soit un polynome des x_i et des fonctions de $\mathfrak{R}$.

5. THÉORÈME I.—*Soit D un domaine du caractère ci-dessus. Etant donnés des pôles $(\mathfrak{p})$ dans D, par la méthode de No. 1, il existe toujours une fonction méromorphe dans le domaine, admettant $(\mathfrak{p})$ pour pôles.*

En effet, construisons dans D la suite de domaine

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots,$$

tendant vers D, Δ_n étant de la même nature que le domaine Δ du numéro précédent. Nous savons ce qui est toujours atteint, n'importe que D soit borné ou non. Nous supposons pour simplifier la langue, que Δ_n est contenu à l'intérieur de Δ_{n+1}, n étant quelconque.

Considérons ensuite la suite de fonctions

$$\Phi_1((x)), \qquad \Phi_2((x)), \ldots, \qquad \Phi_n((x)), \ldots,$$

où $\Phi_n((x))$ signifie une fonction méromorphe des n variables x_i admettant les pôles $(\mathfrak{p})$, pour Δ_n, Δ_n étant quelconque de la suite précédente. Telle fonction $\Phi_n((x))$ existe certainement, puisque pour la trouver, il suffit de résoudre un problème II pour Δ_{n+1}, un domaine appartenant évidemment à (Ω_0).

Or, la différence

$$\Omega_n((x)) = \Phi_{n+1}((x)) - \Phi_n((x))$$

est une fonction holomorphe dans Δ_n, pour tout n. On peut donc, développer $\Omega_n((x))$ pour Δ_n, en série de fonctions holomorphes dans le domaine donné D, en vertu de la proposition précédente.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, nous pouvons compléter la démonstration tout pareillement qu'aux domaines cylindriques.(1) Nous ne répétons pas cela. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.—*Dans la condition du problème I formulé à No. 1, on peut trouver une fonction holomorphe des* $n+\nu$ *variables* x_i, y_j *dans le domaine cylindrique* (C), *admettant la valeur* $f(M)$ *pour tout point* M *sur la multiplicité* Σ.

Nous appelons pour l'effet, que le problème I ou II donné à No. 1, est *complètement* résoluble, s'il reste résoluble pour $(C') = (C)$ ou $\Delta' = \Delta$, respectivement.

Considérons le problème II. Il est immédiatement constaté que toutes les composantes connexes de la région Δ remplissent les conditions posées au domaine D dans le théorème I. Le problème II est donc résoluble complètement pour toute composante connexe, et conséquemment pour Δ même, par définition.

Quant au problème I, le raisonnement exposé au No. 2, reste applicable au cas actuel, sans modification. De là, d'après ce qui précède, il s'ensuit que: si tout problème I d'ordre inférieur à ν est complètement résoluble, il en est ainsi pour l'ordre ν, pour tout $\nu > 1$; et spécialement pour $\nu = 1$, il l'est toujours. On peut donc résoudre le problème I complètement. C. Q. F. D.

(1) Osgood, § 24 de Chap. III.