Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 10. 12. 1935.)

Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, und gilt der U-Satz für die Ideale jedes echten Restklassenringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$, so heisst $\mathfrak{R}$ ein *kommutativer Ring mit abgeschwächtem U-Satz.*[1] Besitzt $\mathfrak{R}$ ferner das Einheitselement, so folgt leicht aus dem abgeschwächten U-Satz die Gültigkeit des O-Satzes[2] in $\mathfrak{R}$. In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Herr Y. Akizuki[3] bewiesen, dass in $\mathfrak{R}$ der O-Satz auch gilt, wenn $\mathfrak{R}$ statt des Einheitselements ein reguläres Element hat. Im allgemeinen kommutativen Ringe sind aber der O-Satz und der U-satz unabhängig voneinander.[4] Nach Einführung des Totalnullteilers behandle ich in dieser Arbeit die verwandte Frage nach einem notwendigen und hinreichenden Kriterium dafür, dass im Ring $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz der O-Satz gilt. Zunächst werden wir als das Hauptziel dieser Note die Struktur der nilpotenten Ringe untersuchen, und dann das Ergebnis auf die obige Frage anwenden.

Unter *Totalnullteiler* $\mathfrak{t}$ *des Rings* $\mathfrak{R}$ verstehen wir das Ideal aller der Ringelemente t von der Art, dass $\mathfrak{R}(t) = (0)$ ist.[5]

Im Folgenden wollen wir stets den allgemeinen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz ins Auge fassen.

Struktur nilpotenter Ringe mit abgeschwächtem U-Satz.

Satz 1. *Es sei der Ring* $\mathfrak{R}$ *mit abgeschwächtem U-Satz nilpotent, und es sei* $\mathfrak{t}$ *der Totalnullteiter von* $\mathfrak{R}$. *Dann ist der Restklassenring* $\mathfrak{R}/\mathfrak{t}$ *eine endliche Menge.*

(1) W. Krull, *Idealtheorie* (1935), 14. Der U-Satz ist der Noethersche Vielfachenkettensatz.

(2) W. Krull, loc. cit., 8.

(3) Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **17** (1935), 337.

(4) S. Mori, Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz, dieses Journal **3** (1933), 288.

(5) In meinen vorigen Arbeiten bedeutet Totalnullteiler eines Ringes $\mathfrak{R}$ ein Element t derart, dass $\mathfrak{R}(t) = (0)$ ist.

Da $\mathfrak{R}\big(\neq(0)\big)$ nilpotent ist, so soll für eine natürliche Zahl n $\mathfrak{R}^n = (0)$, $\mathfrak{R}^{n-1} \neq (0)$ sein, und daraus folgt $\mathfrak{t} \neq (0)$. Für den Fall $\mathfrak{R} = \mathfrak{t}$ ist der Satz klar, also nehmen wir $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{t}$ an. Hier können wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem es in $\mathfrak{R}$ ein Element r_1 derart, dass $r_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{t})$, $r_1^2 = 0$ ist, gibt, oder nicht.

Im ersten Fall ist $r_1^2 = 0$, $r_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{t})$, und der Idealquotient $\mathfrak{q}_1 = (0):(r_1)$ ist von $\mathfrak{R}$ verschieden und ein Teiler von $\mathfrak{t}$, und ferner enthält $\mathfrak{q}_1$ das Element r_1. Aber r_1 ist durch $\mathfrak{t}$ unteilbar, und daraus folgt $\mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{t}$. Nach $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{q}_1$ können wir in $\mathfrak{R}$ ein Element r_2, das nicht zu $\mathfrak{q}_1$ gehört, finden, und der Idealquotient $\mathfrak{q}_2 = (0):(r_2)$ ist auch ein Teiler von $\mathfrak{t}$ und von $\mathfrak{R}$ verschieden. Da $r_1 r_2 \neq 0$ ist, so soll $r_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_2)$ und folglich $\mathfrak{q}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_2)$ sein.

Im zweiten Fall ist $r_1^2 \neq 0$ für jedes durch $\mathfrak{t}$ unteilbare Element r_1. Wir bilden wieder den Idealquotient $\mathfrak{q}_1 = (0):(r_1)$, dann ist $\mathfrak{q}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{t}$ und $r_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_1)$. Ist $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{q}_1$, so können wir in $\mathfrak{q}_1$ ein Element r_2, das durch $\mathfrak{t}$ unteilbar ist, finden. Der Idealquotient $\mathfrak{q}_2 = (0):(r_2)$ ist auch von $\mathfrak{R}$ verschieden und ein Teiler von $\mathfrak{t}$. Dabei ist aber nach der obigen Voraussetzung $r_2^2 \neq 0$, und daher folgt $\mathfrak{q}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_2)$. Setzen wir[1] $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{q}_1 \wedge \mathfrak{q}_2$, so ist $\mathfrak{d}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{t}$ und ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{q}_1$, wenn $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{q}_1$ ist.

Wir nehmen wieder $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{d}_1$ an. Gibt es in $\mathfrak{d}_1$ ein Element d_1 derart, dass $d_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{t})$, $d_1^2 = 0$ ist, so ist der Idealquotient $\mathfrak{q}_3' = (0):(d_1)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{t}$, da $d_1 \equiv 0\,(\mathfrak{q}_3')$ ist. Nach $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{q}_3'$ können wir in $\mathfrak{R}$ ein Element r_3 finden, das durch $\mathfrak{q}_3'$ unteilbar ist, und dann ist $\mathfrak{q}_3 = (0):(r_3)$ auch ein Teiler von $\mathfrak{t}$ und $d_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_3)$, da $d_1 r_3 \neq 0$ ist. Daher folgt $\mathfrak{d}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_3)$. Ist $d_1^2 \neq 0$ für jedes durch $\mathfrak{t}$ unteilbare Element d_1 aus $\mathfrak{d}_1$, so ist der Idealquotient $\mathfrak{q}_3 = (0):(r_3)$ für ein durch $\mathfrak{t}$ unteilbares Element r_3 aus $\mathfrak{d}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{t}$ und $r_3 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_3)$, da $r_3^2 \neq 0$ ist. Folglich wird auch $\mathfrak{d}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_3)$. Setzen wir nun $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{q}_1 \wedge \mathfrak{q}_2 \wedge \mathfrak{q}_3$, so ist damit $\mathfrak{d}_2$ ein Teiler von $\mathfrak{t}$ und ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{d}_1$, wenn $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{d}_1$ ist. Ist ausserdem $\mathfrak{d}_2 \neq \mathfrak{t}$, so können wir in derselben Weise ein weiteres echtes Vielfaches $\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{q}_1 \wedge \mathfrak{q}_2 \wedge \mathfrak{q}_3 \wedge \mathfrak{q}_4$ von $\mathfrak{d}_2$ finden, das ein Teiler von $\mathfrak{t}$ ist. In solcher Weise erhalten wir eine Vielfachenkette von Idealen, die Teiler von $\mathfrak{t}\big(\neq(0)\big)$ sind,

$$\mathfrak{d}_1 \supset \mathfrak{d}_2 \supset \mathfrak{d}_3 \supset \ldots\ldots \supset \mathfrak{t}\,.$$

---

(1) Für den Durchschnitt von Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ benützen wir das Symbol $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$.

Nach dem abgeschwächten U-Satz soll damit das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Ende nehmen. Also ist

$$(1) \qquad \mathfrak{t} = \mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k\,,$$

$$\mathfrak{q}_i = (0):(r_i)\,, \qquad r_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{t}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Es sei r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, das durch $\mathfrak{q}_i$ unteilbar ist. Da $\mathfrak{t} \neq (0)$ ist, so gilt im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{t}$ der U-Satz, und daher folgt $m_i r_i = t_i$ für eine natürliche Zahl m_i, dabei ist r_i das in (1) bezeichnete Element und t_i ein Element aus $\mathfrak{t}$. Denn, ist p eine Primzahl und $\big((r_i), \mathfrak{t}\big) = \big((pr_i), \mathfrak{t}\big)$, so ist $r_i \equiv pr_i(s+r')\ (\mathfrak{t})$, wobei s eine ganze Zahl und r' ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Daraus folgt $s'r_i \equiv pr_ir'\ (\mathfrak{t})$, $s' = 1-ps$ und $s'^2r_i \equiv (pr')^2r_i\ (\mathfrak{t})$, $s'^3r_i \equiv (pr')^3r_i\ (\mathfrak{t}), \ldots.$ Aber r' ist nilpotent, und folglich ist $s'^l r_i \equiv 0\,(\mathfrak{t})$ für eine hinreichend grosse ganze Zahl l. Ist $\big((r_i), \mathfrak{t}\big) \supset \big((pr_i), \mathfrak{t}\big)$, so bilden wir $\big((p^2r_i), \mathfrak{t}\big)$. Dann ist $s''r_i \equiv 0\,(\mathfrak{t})$, oder $\big((pr_i), \mathfrak{t}\big) \supset \big((p^2r_i), \mathfrak{t}\big) \supset \mathfrak{t}$. Nach dem U-Satz bricht das Verfahren im Endlichen ab. Also soll für eine ganze Zahl m_i $m_ir_i = t_i$ sein. Daraus ergibt sich $m_ir_ir = 0$, und aus $\mathfrak{q}_i = (0):(r_i)$ erhalten wir $m_ir \equiv 0\,(\mathfrak{q}_i)$ für jedes durch $\mathfrak{q}_i$ unteilbare Element r. Mit anderen Worten ist im Restklassenring $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}/\mathfrak{q}_i$ die m_i-malige Summe jedes Elementes immer gleich Null. Nach dem U-Satz hat der Restklassenring $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_i^2$ damit nur endlich viele verschiedene Elemente. Andererseits ist aber $\mathfrak{R}_i^s = (0)$ im Ring $\mathfrak{R}_i$ für eine natürliche Zahl s. Daraus folgt, dass der Restklassenring $\mathfrak{R}_i$ nur endlich viele verschiedene Elemente hat.

Wir nehmen an, dass der Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{t}$ eine unendliche Menge ist. Dann soll $\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{q}_1/\mathfrak{t}$ auch unendlich sein, sonst wäre nach dem soeben gewonnenen Ergebnis $\mathfrak{R}'$ endlich. Ferner soll der Restklassenring $\mathfrak{d}_1' = \mathfrak{d}_1/\mathfrak{t} = \mathfrak{q}_1' \cap \mathfrak{q}_2'$ auch unendlich sein. Denn, wäre $\mathfrak{d}_1'$ endlich, so würde $r_1' \equiv r_2' \equiv r_3' \equiv \ldots (\mathfrak{q}_2' = \mathfrak{q}_2/\mathfrak{t})$ für unendlich viele verschiedene Elemente $r_1', r_2', r_3', \ldots.$ aus $\mathfrak{q}_1'$. Daraus folgte $r_1'-r_i' = r_i''$, $r_i'' \equiv 0\,(\mathfrak{q}_2')$ $(i = 2, 3, \ldots.)$. Die linke Seite der Gleichungen wäre ein Element aus $\mathfrak{q}_1'$ und die rechte Seite wäre ein Element aus $\mathfrak{q}_2'$. Also sollte $r_i''(i = 2, 3, \ldots.)$ die verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{d}_1'$ sein. Das widerspricht der Annahme, dass $\mathfrak{d}_1'$ endlich ist. Damit soll $\mathfrak{d}_1'$ unendlich sein. Dasselbe können wir für die übrigen Restklassenringe $\mathfrak{d}_i'$ beweisen. Es ist aber $\mathfrak{d}_{k-1}' = \mathfrak{d}_{k-1}/\mathfrak{t} = (0)$, und so ergibt sich ein

Widerspruch. Die Annahme, dass $\mathfrak{R}'$ unendlich ist, ist damit falsch, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz und in eine direkte Summe unzerlegbar und ist ferner $\mathfrak{R}^2 = (0)$, so ist $\mathfrak{R}$ von der Struktur*

$$\mathfrak{R} = (r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_k),$$

dabei ist k endlich, oder unendlich, und es erfüllen die Elemente r_i die Bedingungen

$$pr_{i+1} = r_i, \qquad pr_1 = 0, \qquad r_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, k)$$

für eine Primzahl p, oder in $\mathfrak{R}$ gilt $r^2 = 0$, $mr \neq 0$ für jede natürliche Zahl m und für jedes von Null verschiedene Element r.

Der Ring $\mathfrak{R}$ ist bei Komposition durch Addition eine endliche, oder unendliche Abelsche Gruppe, und unzerlegbar in eine direkte Summe. $\mathfrak{R}$ ist damit nach dem abgeschwächten U-Satz eine Abelsche Gruppe, in denen ausser 0 kein Element von endlicher Ordnung auftritt, oder eine Abelsche Gruppe, in der die Ordnung aller Elemente (ausser 0) eine Potenz der Primzahl p ist. Ist $\mathfrak{R}$ endlich, so ist der Satz klar. Es sei damit $\mathfrak{R}$ unendlich.

Ist die p^s-malige Summe eines Elementes $r(\neq 0)$ gleich Null, so wird $pr_1 = 0$ für ein von Null verschiedenes Element r_1 aus $\mathfrak{R}$, und danach ist $\mathfrak{a}_1 = (r_1)$ ein minimales Ideal in $\mathfrak{R}$. Ist für ein Element r_2' aus $\mathfrak{R}$ $pr_2' = a_1 r_1$, $0 < a_1 < p$, so setzen wir $b_1 r_2' = r_2$, $a_1 b_1 + ps_1 = 1$. Dann ist $pr_2 = r_1$, und wir setzen $\mathfrak{a}_2 = \big(\mathfrak{a}_1, (r_2)\big)$. Gibt es noch ein Element r_3' derart, dass $pr_3' \equiv 0\,(\mathfrak{a}_2)$, $pr_3' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}_1)$ ist, so ist $pr_3' = a_2 r_2$ und a_2 ist zu p relativ prim. Setzen wir wieder $b_2 r_3' = r_3$, $a_2 b_2 + p^2 s_2 = 1$, so wird $pr_3 = r_2$. Es sei ferner $\mathfrak{a}_3 = \big(\mathfrak{a}_2, (r_3)\big)$. Indem wir so fortfahren, entsteht eine endliche, oder unendliche Folge der Ideale

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \ldots\ldots,$$

von denen jedes vorangehende im folgenden enthalten ist. Da $\mathfrak{R}$ unendlich ist, so ist diese Kette für ein passendes Element r_1 unendlich, und diese Gesamtheit der in sämtlichen $\mathfrak{a}_i$ auftretenden Elemente ist wieder ein Ideal, das wir mit $\mathfrak{a}$ bezeichnen. Ist $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{a}$, so gibt es noch ein Element $\bar{r}$, das nicht in $\mathfrak{a}$ enthalten ist. Wir können nun nach abgeschwächtem U-Satz annehmen, l sei die kleinste natürliche

Zahl, für welche $l\bar{r}$ in $\mathfrak{a}$ vorkommt. Dabei muss $l = pl'$ sein, sonst würde $\bar{r} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, da für eine hinreichend grosse Zahl n $p^n\bar{r} = 0$ ist. Daraus erhalten wir

$$pl'\bar{r} = l_m r_m$$

Da aber $pr_{i+1} = r_i$ ist, so folgt daraus $pl'\bar{r} = pl_m r_{m+1}$, oder $pl'\bar{r} = pl'_m r_m$. Wenn wir $\bar{r}_1 = l'\bar{r} - l_m r_{m+1}$, oder $\bar{r}_1 = l'\bar{r} - l'_m r_m$ setzen, so wird

$$(1) \qquad p\bar{r}_1 = 0\,, \qquad \bar{r}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})\,,$$

da $l' < l$ ist. Genau wie beim Aufbau des Ideals $\mathfrak{a}$ können wir mit $\bar{r}_1$ ein Ideal $\mathfrak{b}$ bilden, und annehmen, dass $\mathfrak{b}$ die längste Kette hat, die durch irgendein Element $\bar{r}_1$ von der Eigenschaft (1) gebildet ist. Die zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ besitzen kein gemeinsames Element bis auf Null. Denn, wäre $c(\neq 0)$ ein gemeinsames Element, so würde $p^e c = k\bar{r}_1$, $0 < k < p$ für eine passende Potenz p^e der Primzahl p. Das widerspricht der Tatsache, dass $\bar{r}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ist. Ist $\mathfrak{R}$ noch von der direkten Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ verschieden, so können wir ein Element $\bar{r}_2$ derart, dass $p\bar{r}_2 = 0$, $\bar{r}_2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ ist, finden, und daraus ein weiteres Ideal $\mathfrak{c}$ bilden, das mit $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ kein Element gemein hat, und aus der längsten Kette von Idealen gewonnen ist. Daher hat $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$ kein Element gemein. Falls die direkte Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ noch nicht mit $\mathfrak{R}$ übereinstimmt, so finden wir in derselben Weise ein neues Ideal $\mathfrak{d}$, das mit $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ elementefremd ist, und aus der längsten Kette von Idealen gewonnen ist. Indem wir das Verfahren weiter fortsetzen, erhalten wir eine Vielfachenkette von Idealen

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots\ldots+\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots\ldots+\mathfrak{a} \supset \mathfrak{d}+\ldots\ldots+\mathfrak{a} \supset \ldots\ldots \supset \mathfrak{a}\,.$$

Nach dem abgeschwächten U-Satz bricht damit das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Malen ab, und wir gelangen zum Resultat $\mathfrak{R} = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\ldots\ldots+\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{R}$ aber in eine direkte Summe unzerlegbar ist, so soll $\mathfrak{R} = \mathfrak{a}$ sein, und der Satz ist bewiesen.

Der Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ des Rings $\mathfrak{R}$ ist auch ein Ring mit dem abgeschwächten U-Satz derart, dass $\mathfrak{t}^2 = (0)$ ist. Nach Satz 2 ergibt sich damit

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein nilpotenter Ring mit abgeschwächtem U-Satz und $\mathfrak{t}$ der Totalnullteiler von $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{t}$ kann dann und nur dann von der im Satz 2 ausgesprochenen zweiten Struktur sein, wenn $\mathfrak{R}^2 = (0)$ und $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe unzerlegbar ist.*

Zunächst nehmen wir $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ an. Dann ist $\mathfrak{t} \neq (0)$, da $\mathfrak{R}$ nilpotentent ist. Aus $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$ folgt $(r)\mathfrak{R} \neq (0)$ für ein Element r aus $\mathfrak{R}$, also ist $r \not\equiv 0\,(\mathfrak{t})$. Nach dem U-Satz im Restklassenring $\mathfrak{R}/(r)\mathfrak{R}$ ergibt sich $mt = rr_1$ für eine natürliche Zahl m, und dabei ist r_1 ein Element aus $\mathfrak{R}$ und t ein Element aus $\mathfrak{t}$. Da $\mathfrak{R}$ nilpotent ist und der U-Satz im Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{t}$ gilt, so ist nach dem Beweis von Satz 1 (S. 139) $m'r \equiv 0\,(\mathfrak{t})$ für eine natürliche Zahl m', und daher folgt

$$m'mt = m'rr_1 = t'r_1 = 0\,,$$

da $m'r = t'$ ein Element des Totalnullteilers $\mathfrak{t}$ ist. Mit Berücksichtigung dessen, dass t ein beliebiges Element aus $\mathfrak{t}$ ist, können wir damit behaupten, dass $\mathfrak{t}$ nicht von der zweiten Struktur ist.

Ist $\mathfrak{R}^2 = (0)$ und ist $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe zerlegbar, so wird nach dem abgeschwächten U-Satz $\mathfrak{t} = \mathfrak{R} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \dots + \mathfrak{t}_s$ und jedes $\mathfrak{t}_i$ ist unzerlegbar und von der ersten Struktur. Hierdurch gelangen wir zum Satz.

Eigenschaften des Totalnullteilers im Ring mit abgeschwächtem U-Satz.

Im vorangehenden Paragraphen haben wir nur die Untersuchungen über die nilpotenten Ringe mit abgeschwächtem U-Satz entwickelt. Wir werden uns im folgenden mit den allgemeinen Ringen $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz beschäftigen. Zu diesem Zwecke müssen wir die folgenden Sätze in bezug auf die Struktur des Rings $\mathfrak{R}$ vorausschicken.

Satz 4.(1) *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz, und $\mathfrak{R}$ besitze einen echten Nullteiler. Dann wird $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$, wo $\mathfrak{R}_1$ ein nilpotenter Ring und $\mathfrak{R}_2$ ein Ring mit Einheitselement oder Nullring ist.*

Satz 5.(2) *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz und ohne Nullteiler. Dann gilt in $\mathfrak{R}$ der O-Satz.*(3)

Hat $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, so ist der Satz einleuchtend.(4) Damit

(1) S. Mori, loc. cit., 284.

(2) Dieser Satz ist ein spezieller Fall des Satzes von Y. Akizuki; loc. cit., 342.

(3) Der O-Satz ist der Teilerkettensatz von Noether.

(4) Hat $\mathfrak{R}$ das Einheitselement und ist $\mathfrak{a}$ vom Nullideal verschieden, so wird

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{a} = \mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}'_2 + \dots + \mathfrak{R}'_t\,,$$

dabei ist $\mathfrak{R}'_i$ unzerlegbar und $\mathfrak{R}'_i$ hat ein einziges nilpotentes Primideal. Da in $\mathfrak{R}'$ der U-Satz gilt, so folgt daraus der O-Satz in $\mathfrak{R}'$.

nehmen wir an, dass $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement hat. Dann enthält $\mathfrak{a} = (r)\mathfrak{R}$ nicht das Element r und im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ist

$$(1) \qquad (r)\mathfrak{R}' = (0).$$

Da in $\mathfrak{R}'$ der U-Satz gilt, so folgt nach (1) und Satz 4

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_1' + \mathfrak{R}_2', \qquad \mathfrak{R}_1'^s = (0) \qquad (s > 1),$$

dabei bedeutet $\mathfrak{R}_2'$ ein Ring mit Einheitselement oder Nullring. Aus der Existenz des Einheitselementes folgt leicht der O-Satz in $\mathfrak{R}_2'$. Aus (1) folgt $mr \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ für eine natürliche Zahl m. Da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler hat, so ergibt sich damit $mr_1' = r_0'r_1'$ in $\mathfrak{R}'$ für jedes Element r_1' aus $\mathfrak{R}_1'$, und daraus folgt $m^s r_1' = r_0'^s r_1'$. Damit ist $m^s r_1' = 0$ in $\mathfrak{R}'$. Folglich ist $\mathfrak{R}_1'$ eine endliche Menge und der Satz ist bewiesen.

Mit Hilfe dieser Sätze wollen wir nun zeigen:

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz, und es sei $\mathfrak{t}$ der Totalnullteiler von $\mathfrak{R}$. In $\mathfrak{R}$ gilt dann und nur dann der O-Satz, wenn $\mathfrak{t}$ eine endliche Basis hat.*[1]

Wenn $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler hat, so folgt aus Satz 5 die Gültigkeit des Satzes. Zum Beweise werden wir damit annehmen, das Nullideal von $\mathfrak{R}$ sei nicht prim. Dann ist $\mathfrak{R}$ nach Satz 4 die direkte Summe von Idealen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2,$$

wo $\mathfrak{R}_1$ nilpotent ist, und $\mathfrak{R}_2$ das Einheitselement hat oder Nullring ist. Da aber die Gültigkeit des Satzes in $\mathfrak{R}_2$ nach der Fussnote in S. 144 ganz klar ist, so brauchen wir nur nachzuweisen, dass der Satz auch im nilpotenten Ring $\mathfrak{R}_1$ gilt.

Gilt in $\mathfrak{R}_1$ der O-Satz, so soll der Totalnullteiler $\mathfrak{t}_1$ von $\mathfrak{R}_1$ eine endliche Basis haben, da in $\mathfrak{t}_1$ der O-Satz auch gilt.

Wenn der Totalnullteiler $\mathfrak{t}_1$ von $\mathfrak{R}_1$, also von $\mathfrak{R}$, eine endliche Basis hat, so hat jedes Ideal in $\mathfrak{t}_1$ nach dem abgeschwächtem U-Satz auch eine endliche Basis. Nach Satz 1 ist aber der Restklassenring $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{t}_1$ eine endliche Menge und dadurch können wir leicht beweisen, dass in $\mathfrak{R}_1$ der Basissatz gilt, d. h. dass jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}_1$ eine endliche Basis hat. Denn, ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{t}_1$, so hat $\mathfrak{d}(\neq 0)$ eine endliche Basis. Aus der

(1) Man sagt, das Ideal $\mathfrak{a}$ im Ringe $\mathfrak{R}$ habe die *endliche Basis* $a_1, a_2, \ldots, a_m$, wenn $\mathfrak{a}$ aus der Menge aller Summen $a = (a_1' + n_1)a_1 + (a_2' + n_2)a_2 + \ldots + (a_m' + n_m)a_m$ besteht, dabei bedeuten $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ Elemente aus $\mathfrak{R}$, und $n_1, \ldots, n_m$ ganze rationale Zahlen.

Endlichkeit des Restklassenrings $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{t}_1$ folgt auch, dass jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}_1$ eine endliche Basis hat. Bekanntlich folgt aber der O-Satz aus dem Basissatz, womit der Satz bewiesen ist.

Ist $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$, so ist der Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{R}$ nach den Sätzen 2, 3, und 4 die direkte Summe von endlich vielen unzerlegbaren Idealen, die von der im Satz 2 bezeichneten ersten Struktur sind. Ist der O-Satz in $\mathfrak{R}$ vorausgesetzt, so wird $\mathfrak{t}$ damit die direkte Summe von endlich vielen Idealen $\mathfrak{t}_i$, die von der folgenden Struktur sind:

$$\mathfrak{t}_i = (t_1, t_2, \ldots\ldots, t_k), \qquad t_{j+1}^2 = 0, \qquad pt_{j+1} = t_j, \qquad pt_1 = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots\ldots k-1),$$

wo p eine Primzahl und k endlich ist. Daraus folgt, dass der Totalnullteiler $\mathfrak{t}$ eine endliche Menge ist.

Ist $\mathfrak{R}^2 = (0)$, und ist $\mathfrak{R}$ als direkte Summe darstellbar, so ist der Totalnullteiler von $\mathfrak{R}$ nach Satz 2 und nach dem abgeschwächten U-Satz auch die direkte Summe von endlich vielen Idealen, die von der ersten Struktur sind. Damit folgt aus der Voraussetzung des O-Satzes die Endlichkeit des Totalnullteilers. Bei Gültigkeit der beiden Sätze, O-Satz und abgeschwächter U-Satz, kann der Totalnullteiler von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann eine unendliche Menge sein, wenn $\mathfrak{R}$ unzerlegbar und $\mathfrak{R}^2 = (0)$ ist. Das Ergebnis lautet also:

Satz 7. *Wenn wir den Ring $\mathfrak{R}$ mit abgeschwächtem U-Satz, der in eine direkte Summe unzerlegbar und wo $\mathfrak{R}^2 = (0)$ ist, ausnehmen, so ist für Gültigkeit des O-Satzes im Ring mit abgeschwächtem U-Satz die notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Totalnullteiler des Rings eine endliche Menge ist.*

Aus dem soeben formulierten Satz folgt nach den Sätzen 3 und 4:

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit abgeschwächtem U-Satz und $\mathfrak{R}^2 \neq (0)$. In $\mathfrak{R}$ gilt dann und nur dann der O-Satz, wenn die Anzahl der Elemente r aus $\mathfrak{R}$ derart, dass für irgendeine natürliche Zahl k $(r)\mathfrak{R}^k = (0)$ ist, endlich ist.*