# Zur Zerlegung der Ideale in abzählbaren Ringen.

Vcn

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 22. 9. 1934.)

Herr W. Krull hat in seiner Arbeit(1) den folgenden Satz angegeben: *Jedes Ideal aus einem kommutativen Ring ist dann und nur dann als Durchschnitt endlich vieler Primärideale darstellbar, wenn im Ring der Doppelkettensatz von isolierten Komponentenidealen jedes Ideals gilt.*

In diesem Aufsatz möchte ich die Krullsche Bedingung durch eine noch schärfere ersetzen. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die schärfere Bedingung für die endliche Zerlegung jedes Ideals im abzählbaren Ring anzugeben. Unter einem *abzählbaren Ringe* verstehen wir einen Ring, in dem jedes Ideal eine abzählbare Basis besitzt.

### Die notwendige Bedingung.

In diesem Paragraphen verstehen wir unter dem Ring $\mathfrak{R}$ einen allgemeinen kommutativen Ring ohne jede Bedingung.

Satz I. *Ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ als kürzester Durchschnitt von endlich zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primäridealen darstellbar, so stimmen bei zwei verschiedenen kürzesten Darstellungen eines Ideals die zugehörigen Primideale überein.*

Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal und es seien

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \ldots\ldots], \quad \mathfrak{a} = [\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_n]$$

zwei kürzeste Darstellungen von $\mathfrak{a}$ durch die zu verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ bzw. $\mathfrak{p}'_i$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}_i$ bzw. $\mathfrak{q}'_i$. Setzen wir $\mathfrak{d}_i = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_m, \ldots]$, so wird

$$\mathfrak{q}_i \not\equiv 0\ (\mathfrak{d}_i)\ , \ \mathfrak{d}_i \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)\ , \qquad \mathfrak{a} = [\mathfrak{d}_i, \mathfrak{q}_i]\ ,$$

da $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m, \ldots]$ eine kürzeste Darstellung ist. Ist $d_i$ ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{d}_i$, so ist das Produkt von $d_i$ mit einer Potenz

(1) W. Krull, Ueber einen Hauptsatz der allgemeinen Idealtheorie, Sitzungsberichte Heidelberg (1929).

eines beliebigen Elementes $p_i$ aus $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar. Wäre $p_i' d_i \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ für ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element $p_i'$, so würde $d_i \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_i)$, und wir hätten einen Widerspruch $d_i \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$. Hiermit ist $d_i$ ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element von der Art, dass das Produkt von $d_i$ mit einer Potenz jedes Elementes $p_i$ aus $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar, aber das Produkt von $d_i$ mit jedem durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbaren Element durch $\mathfrak{a}$ unteilbar ist. Wäre $\mathfrak{p}_i$ von jedem aus $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n'$ verschieden, so würden $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_s'$ die echten Teiler von $\mathfrak{p}_i$, und $\mathfrak{p}_{s+1}', \ldots, \mathfrak{p}_n'$ würden kein Teiler von $\mathfrak{p}_i$ sein. Daher folgte $d_i \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_{s+1}'), (\mathfrak{q}_{s+2}'), \ldots, (\mathfrak{q}_n')$, und wir könnten ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element $d'$ aus $[\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_s']$ finden. Damit sollte nach der obig gewonnenen Eigenschaft von $d_i$ $d_i d' \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ sein, und ferner wäre $d_i d' \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1'), \ldots, (\mathfrak{q}_s')$, also ergäbe sich ein Widerspruch $d_i d' \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$. Damit soll $\mathfrak{p}_i$ mit einem aus $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_n'$ identisch sein. Da dieses Resultat für jedes $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ gilt, so ist unser Satz bewiesen.

Satz 2. *Ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, so wird*

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (r^m) = \mathfrak{a} : (r^{m+1}) = \mathfrak{a} : (r^{m+2}) = \ldots\ldots..$$

*für eine hinreichend grosse ganze Zahl $m$, wobei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal und $r$ irgendein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Ferner ist die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten $\mathfrak{r}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ endlich.*

Es sei $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch die endlich vielen zu verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_i$, gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}_i$, und zum Beweise nehmen wir an, dass für jede grosse ganze Zahl $m$ immer $\mathfrak{a} : (r^m) \neq \mathfrak{a} : (r^{m+1})$ ist, wo $r$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Dann ist das Element $r$ durch das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{a}$ unteilbar, und ferner soll $r$ ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$ sein. Ist $r$ durch die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ teilbar, aber durch kein anderes teilbar, so ist $r^{m+1}$ durch $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s]$ teilbar, aber durch kein anderes Primärideal teilbar, wenn $m$ hinreichend gross ist. Aus $\mathfrak{a} : (r^m) \neq \mathfrak{a} : (r^{m+1})$ folgt die Existenz eines Elementes $r'$, so dass

$$r' r^m \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \qquad r' r^{m+1} \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

ist, und dabei soll $r' \equiv 0$ $\left([\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n]\right)$ sein. Da $r^m \equiv 0$ $\left([\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s]\right)$ ist, so folgt daraus $r' r^m \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, und wir erhalten einen Widerspruch. Hiermit soll $\mathfrak{a} : (r^m) = \mathfrak{a} : (r^{m+1}) = \mathfrak{a} : (r^{m+2}) = \ldots$ für eine hinreichend grosse ganze Zahl $m$ sein.

Da für eine hinreichend grosse Zahl $m$

$$r^m \equiv 0\big([\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s]\big), \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (r^m) = \mathfrak{a} : (r^{m+1}) = \ldots\ldots,$$
$$\mathfrak{r} \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{s+1}), \ \ldots\ldots, \ (\mathfrak{q}_n)$$

sind, so ist $(r^m)\,[\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n] \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ und folglich muss $\mathfrak{r}=[\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ sein.(1) Als Spezialfall ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ für $s = 0$, und $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}$ für $s = n$. Nach Sats I sind die zugehörigen Primideale eindeutig bestimmt; also ist die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten $\mathfrak{r}$ für das Ideal $\mathfrak{a}$ endlich.

## Die hinreichende Bedingung.

Ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ ein Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, und gibt es ein Element $p$ von der Art, dass das Produkt von $p$ mit einer endlichen Potenz jedes Elementes aus $\mathfrak{p}$ stets durch $\mathfrak{a}$ teilbar, aber das Produkt von $p$ mit jedem durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Element durch $\mathfrak{a}$ unteilbar ist, so heisst $\mathfrak{p}$ ein *zugehöriges Primideal von* $\mathfrak{a}$, und $p$ ein $\mathfrak{p}$ *entsprechendes Element in bezug auf* $\mathfrak{a}$.

Wenn einem Ideal $\mathfrak{a}$ die abzählbar vielen Elemente $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots$ angehören, und wenn sich jedes Element $a$ aus $\mathfrak{a}$ in der Form

$$a = (a_1+r_1)\omega_1 + \ldots\ldots + (a_t+r_t)\omega_t \quad (t = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

darstellen lässt, wobei $a_i$ die rationalen ganzen Zahlen, und $r_i$ die Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten, so heissen diese Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ die *abzählbar viele Basis von* $\mathfrak{a}$.

Besitzt jedes Ideal vom Ring $\mathfrak{R}$ stets eine abzählbar viele Basis, so heisst der Ring $\mathfrak{R}$ ein *abzählbarer Ring.*

Satz 3. *Ist der Ring* $\mathfrak{R}$ *abzählbar, und ist* $\mathfrak{b} : (r^m) = \mathfrak{b} : (r^{m+1}) = \mathfrak{b} : (r^{m+2}) = \ldots\ldots$ *für eine hinreichend grosse ganze Zahl* $m$, *wobei* $\mathfrak{b}$ *ein beliebiges Ideal und* $r$ *irgendein Element aus* $\mathfrak{R}$ *bedeutet, und ist* $\mathfrak{p}$ *ein zugehöriges Primideal eines Ideals* $\mathfrak{a}$, *so gibt es ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal* $\mathfrak{q}$, *das ein Teiler von* $\mathfrak{a}$ *ist, und kein* $\mathfrak{p}$ *entsprechendes Element in bezug auf* $\mathfrak{a}$ *enthält.*

Da jedes Ideal eine abzählbar viele Basis besitzt, so können wir

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{a},\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ldots)$$

(1) Daher folgt der Satz: *Wenn jedes Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar ist, so ist jedes isolierte Komponentenideal eines Ideals eindeutig bestimmt.* Vgl. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* **2.** 43.

setzen. Aus unserer Voraussetzung folgt

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{a} : (r_1^{m_1}) = \mathfrak{a} : (r_1^{m_1+1}) = \mathfrak{a} : (r_1^{m_1+2}) = \ldots\ldots,\\
&(\mathfrak{a}, r_1^{m_1+1}) : (r_2^{m_2}) = (\mathfrak{a}, r_1^{m_1+1}) : (r_2^{m_2+1}) = (\mathfrak{a}, r_1^{m_1+1}) : (r_2^{m_2+2}) = \ldots\ldots\\
&(\mathfrak{a}, r_1^{m_1+1}, r_2^{m_2+1}) : (r_3^{m_3}) = (\mathfrak{a}, r_1^{m_1+1}, r_2^{m_2+1}) : (r_3^{m_3+1})\\
&\qquad = (\mathfrak{a}, r_1^{m_1+1}, r_2^{m_2+1}) : (r_3^{m_3+2}) = \ldots\ldots\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

für die hinreichend grossen ganzen Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots$ Setzen wir

$$\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a},\ r_1^{m_1+1},\ r_2^{m_2+1},\ r_3^{m_3+1},\ \ldots\ldots\ldots),$$

so wird $\mathfrak{p}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}'$. Ist $\mathfrak{q}$ die Gesamtheit von allen und nur den Elementen aus $\mathfrak{p}$, das Produkt von denen mit einem durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Element durch $\mathfrak{a}'$ teilbar ist, so ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, und wir können

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}',\ r_1',\ r_2',\ r_3',\ \ldots\ldots\ldots)$$

setzen. Ist ein $\mathfrak{p}$ entsprechendes Element $p$ in bezug auf $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar, so wird für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $r$

$$rp \equiv (a_{i_1} + v_{i_1}) r_{i_1}^{m_{i_1}+1} + (a_{i_2} + v_{i_2}) r_{i_2}^{m_{i_2}+1} + \ldots\ldots + (a_{i_n} + v_{i_n}) r_{i_n}^{m_{i_n}+1} \quad (\mathfrak{a}),$$
$$(i_1 < i_2 < i_3 < \ldots\ldots < i_n),$$

wo $a$ die natürlichen Zahlen, und $v$ die Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten. Aus $rpr_{i_n}^k \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ für eine hinreichend grosse Zahl $k$ folgt nach (1)

$$(a_{i_n} + v_{i_n}) r_{i_n}^{m_{i_n}+1} \equiv 0 \left( (\mathfrak{a},\ r_1^{m_1+1},\ r_2^{m_2+1},\ \ldots\ldots,\ r_{i_n-1}^{m_{i_n-1}+1}) \right).$$

Daher folgt

$$rp \equiv (a_1' + v_1') r_1^{m_1+1} + (a_2' + v_2') r_2^{m_2+1} + \ldots\ldots + (a_{i_n-1}' + v_{i_n-1}') r_{i_n-1}^{m_{i_n-1}+1} \quad (\mathfrak{a}).$$

Auf solche Weise erhalten wir endlich $rp \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, wo $r \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ ist. Das widerspricht der Eigenschaft des Elementes $p$, dass das Produkt von $p$ mit jedem durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Element $r$ durch $\mathfrak{a}$ unteilbar ist. Hiermit enthält das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ kein $\mathfrak{p}$ entsprechendes Element in bezug auf $\mathfrak{a}$.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{R}$ ein abzählbarer Ring, und ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{b} : (r^m) = \mathfrak{b} : (r^{m+1}) = \mathfrak{b} : (r^{m+2}) = \ldots$ für eine hinreichend grosse ganze Zahl $m$, wobei $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal, und $r$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ ist, und ist die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten $\mathfrak{r}$ für ein Ideal $\mathfrak{b}$ immer endlich, so ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar.*

Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, das nicht primär ist, und es sei $r_1$ ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$. Setzen wir $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (r_1)$, so ist $\mathfrak{r}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$. Ist das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}_1$ von $\mathfrak{r}_1$ prim, so ist $\mathfrak{h}_1$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$, und $r_1$ ein $\mathfrak{h}_1$ entsprechendes Element. Im anderen Fall gibt es zwei Elemente $r_2$, $r_2'$, so dass

$$r_2 r_2' \equiv 0 \ (\mathfrak{r}_1), \qquad r_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1), \qquad r_2' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1)$$

ist. Daher folgt $r_1 r_2 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, und der Idealquotient $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{a} : (r_1 r_2)$ enthält das Element $r_2'$. Ist das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}_2$ von $\mathfrak{r}_2$ prim, so ist $\mathfrak{h}_2$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$, und $r_1 r_2$ ein $\mathfrak{h}_2$ entsprechendes Element. Im anderen Fall können wir auch zwei Elemente $r_3$ und $r_3'$ finden, so dass

$$r_3 r_3' \equiv 0 \ (\mathfrak{r}_2), \qquad r_3 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_2), \qquad r_3' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_2)$$

ist. Wir setzen wieder $\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{a} : (r_1 r_2 r_3)$, wo $r_1 r_2 r_3 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist. Eine endliche Fortsetzung dieses Verfahrens muss ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$ liefern. Denn die Elemente $r_2'$, $r_3'$, .... sind sämtlich nicht nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$, und nach unserer Voraussetzung sind die Idealquotienten

$$\mathfrak{r}_2' = \mathfrak{a} : (r_2'^{m_2}) = \mathfrak{a} : (r_2'^{m_2+1}) = \ldots\ldots, \quad \mathfrak{r}_3' = \mathfrak{a} : (r_3'^{m_3}) = \mathfrak{a} : (r_3'^{m_3+1}) = \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{a}$ verschieden. Ferner enthält $\mathfrak{r}_2'$ das Element $r_1 r_2$, und $\mathfrak{r}_3'$ das Element $r_1 r_2 r_3$, u.s.w. Wäre $r_1 r_2 \equiv 0$ $(\mathfrak{r}_3')$, so würde $r_3'^{m_3} \equiv 0$ $(\mathfrak{r}_2)$, und folglich würde $r_3' \equiv 0$ $(\mathfrak{h}_2)$; also hätten wir einen Widerspruch. Damit muss $r_1 r_2 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{r}_3')$ sein, und in gleicher Weise können wir beweisen, dass

$$r_1 r_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{r}_4'), \ (\mathfrak{r}_5'), \ \ldots\ldots; \ r_1 r_2 r_3 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{r}_4'), \ (\mathfrak{r}_5'), \ \ldots\ldots;$$
$$r_1 r_2 r_3 r_4 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{r}_5'), \ (\mathfrak{r}_6'), \ \ldots\ldots; \ \ldots\ldots$$

ist. Folglich sind alle $\mathfrak{r}_2'$, $\mathfrak{r}_3'$, .... verschieden. Da nach unserer Voraussetzung die Anzahl solcher Idealquotienten $\mathfrak{r}_2'$, $\mathfrak{r}_3'$, .... endlich ist, so ist unsere Behauptung richtig, dass wir durch einen endlichen Prozess ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$ gewinnen können.

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ die verschiedenen zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$, und es seien $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ entsprechenden Elemente in bezug auf $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{p}_s, \ldots, \mathfrak{p}_m$ unteilbar, aber durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{s-1}$ teilbar, so können wir in $\mathfrak{p}_1$ ein Element $r_1$ finden, so dass $r_1$ durch $\mathfrak{p}_s, \ldots, \mathfrak{p}_m$ unteilbar ist. Denn wir können $\mathfrak{p}_t, \ldots, \mathfrak{p}_m$ aus $\mathfrak{p}_s, \ldots, \mathfrak{p}_m$ finden, so dass $\mathfrak{p}_t, \ldots, \mathfrak{p}_m$ durch einander unteilbar, und $\mathfrak{p}_s, \ldots \mathfrak{p}_{t-1}$ wenigstens durch eines aus $\mathfrak{p}_t, \ldots, \mathfrak{p}_m$ teilbar ist. Damit können wir ein Element $r'_{t+i}$ finden, so dass

$$r'_{t+i} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{t+i}),\ r'_{t+i} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1),\ (\mathfrak{p}_t),\ \ldots.,\ (\mathfrak{p}_{t+i-1}),\ (\mathfrak{p}_{t+i+1}),\ \ldots.,\ (\mathfrak{p}_m)$$
$$(i = 0, \ldots., m-t)$$

ist. Setzen wir $r_1 = r'_t + r'_{t+1} + \ldots + r'_m$, so wird $r_1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$, $r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{s+i})$ $(i = 0, 1, \ldots., m-s)$. Der Idealquotient $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a} : (r_1^{m_1}) = \mathfrak{a} : (r_1^{m_1+1}) = \ldots$ enthält die Elemente $p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$, aber keines aus $p_s, \ldots, p_m$. Zwei verschiedene zugehörige Primideale $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$ besitzen verschiedene Primidealteiler aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$. Damit sind die Idealquotienten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_m$ von einander verschieden. Da die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten $\mathfrak{r}$ für $\mathfrak{a}$ endlich ist, so soll die Anzahl der zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$ auch endlich sein.

Es seien nun $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle verschiedenen zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$. Nach Satz 3 entspricht aber ein zugehöriges Primärideal $\mathfrak{q}_i$ von $\mathfrak{a}$ dem Primideal $\mathfrak{p}_i$, Setzen wir $\mathfrak{d} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$, so muss $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$ sein. Sonst gäbe es in $\mathfrak{d}$ ein Element $d$ von der Art, dass $d$ einem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ entspricht. Folglich wäre $\mathfrak{p}$ mit einem, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ identisch. Aber $\mathfrak{q}_1$ enthält das Element $d$, und wir hätten damit einen Widerspruch gegen die Eigenschaft von $\mathfrak{q}_1$. Hiermit muss $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ sein.

Zusammenfassend ist bewiesen:

Hauptsatz. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein abzählbarer Ring. Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, wenn für eine hinreichend grosse ganze Zahl m*

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (r^m) = \mathfrak{a} : (r^{m+1}) = \mathfrak{a} : (r^{m+2}) = \ldots.$$

*ist, wobei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal und $r$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet, und wenn die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten $\mathfrak{r}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ endlich ist.*